

# 几何-曲线型几何-扇形-0 星题

## 课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
扇形	B	1.了解扇形的特征和有关概念 2.能够通过圆的面积和周长公式推导出扇形的面积和弧长公式 3.能够运用公式计算扇形的弧长、面积和周长	少考

## 知识提要

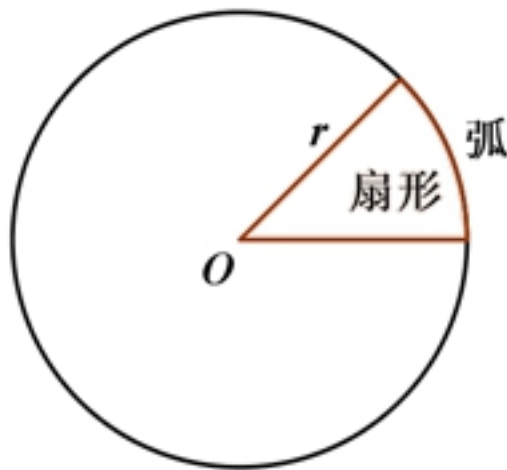
### 扇形

- 概念

圆上两点之间的部分叫做弧。

扇形是指一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫做扇形。

其中，圆的半径也称为扇形的半径，而两条半径所形成的夹角称为扇形的圆心角。



• 公式

$$\text{扇形的弧长} = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

$$\text{扇形的面积} = \frac{n}{360} \pi r^2$$

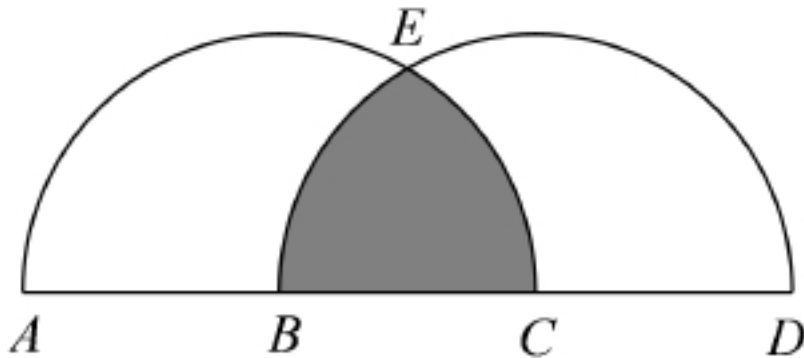
其中， $n$  表示圆心角的度数

注意：扇形的弧长不是周长，扇形的周长还需要加上两条半径。

## 精选例题

### 扇形

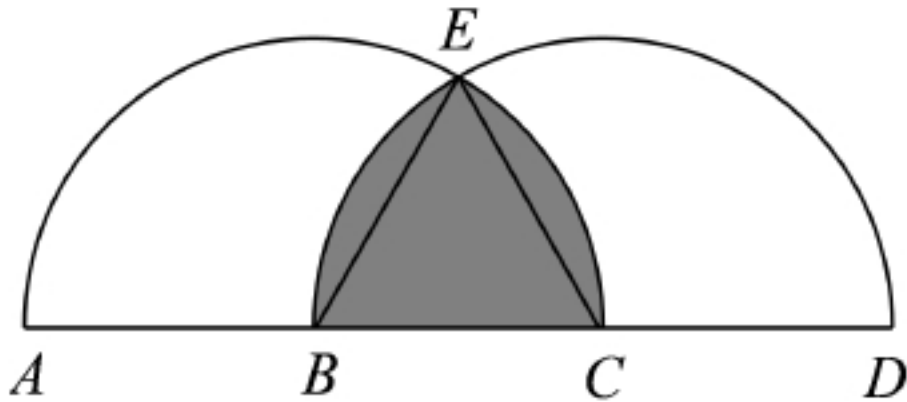
1. 如图，分别以  $B$ 、 $C$  为圆心的两个半圆的半径都是 1 厘米，则阴影部分的周长是\_\_\_\_\_厘米。（ $\pi$  取 3）



【答案】 3

【分析】 BE, BC, CE 均为圆的半径，所以  $\triangle BCE$  等边三角形，每个角均为 60 度，所以阴影部分的两段圆弧均为 60 度的扇形所对应的圆弧，所以周长为

$$\frac{60}{360} \times \pi \times d \times 2 + 1 = \frac{1}{6} \times 3 \times 2 \times 2 + 1 = 3(\text{厘米}).$$



2. 下图中，两个圆心角是  $90^\circ$  的扇形盖在大圆上，小圆盖在两个扇形上，它们的圆心都在同一点。如果小圆、大圆、扇形的半径比是  $1:3:4$ ，那么阴影图形面积占整个图形面积的\_\_\_\_\_ %.



【答案】 32

【分析】 设大圆、小圆、扇形的半径分别是  $r$ 、 $3r$ 、 $4r$ 。  
整个商标的面积是

$$\frac{1}{2}\pi(4r)^2 + \frac{1}{2}\pi(3r)^2 = 12.5\pi r^2;$$

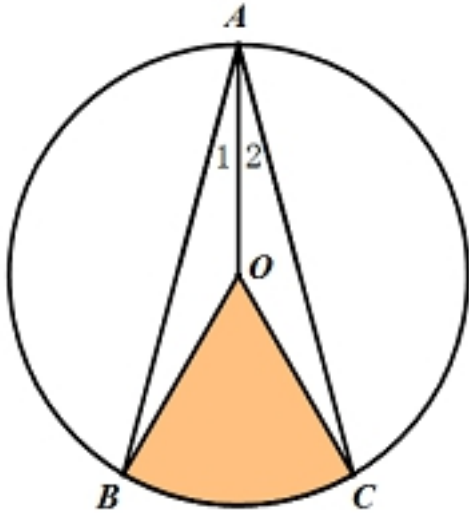
阴影部分的面积是

$$\frac{1}{2}\pi(3r)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 4\pi r^2,$$

所以，阴影图形面积占整个商标图形的面积的

$$\frac{4\pi r^2}{12.5\pi r^2} = 32\%.$$

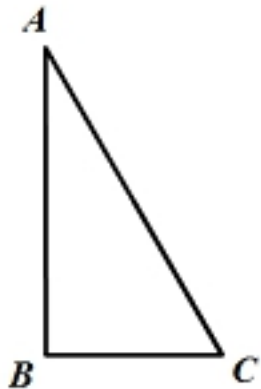
3. 如下图所示，已知圆心是  $O$ ，半径  $r = 9$  厘米， $\angle 1 = \angle 2 = 15^\circ$ ，那么阴影部分的面积是\_\_\_\_\_平方厘米。（ $\pi = 3.14$ ）



【答案】 42.39

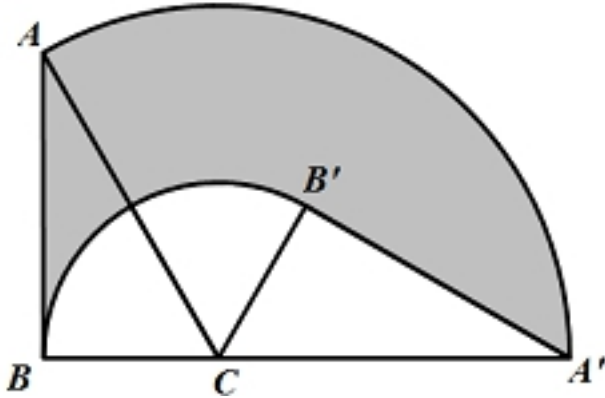
【分析】 因为圆的半径都相等，于是  $OA = OB$ 。在等腰三角形  $AOB$  中两个底角都是  $15^\circ$ 。又知道三角形内角之和是  $180^\circ$ ，所以，三角形  $AOB$  的顶角  $\angle AOB = 180^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 150^\circ$ 。同理  $\angle AOC = 150^\circ$ ，因此  $\angle BOC = 360^\circ - (150^\circ + 150^\circ) = 60^\circ$ 。这就是说，阴影部分扇形的面积是圆面积的  $\frac{1}{6}$ ，即  $\frac{1}{6} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{6} \times 3.14 \times 9^2 = 42.39$  (平方厘米)。

4. 如图，直角三角形  $ABC$  中， $\angle B$  为直角，且  $BC = 2$  厘米， $AC = 4$  厘米，则在将  $\triangle ABC$  绕  $C$  点顺时针旋转  $120^\circ$  的过程中， $AB$  边扫过图形的面积为\_\_\_\_\_。（ $\pi \approx 3.14$ ）



【答案】 12.56 平方厘米。

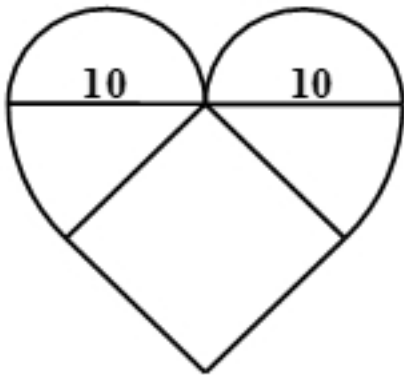
【分析】 如下图所示，假设  $\triangle ABC$  旋转  $120^\circ$  到达  $\triangle A'B'C$  的位置，阴影部分为  $AB$  边扫过的图形。



从图中可以看出，阴影部分面积等于整个图形的总面积减去空白部分面积，而整个图形总面积等于扇形  $ACA'$  的面积与  $\triangle ABC$  的面积之和，空白部分面积等于扇形  $BCB'$  的面积与  $\triangle A'B'C$  的面积，由于  $\triangle ABC$  的面积与  $\triangle A'B'C$  的面积相等，所以阴影部分的面积等于扇形  $ACA'$  与扇形  $BCB'$  的面积之差，为

$$\frac{120}{360} \times \pi \times 4^2 - \frac{120}{360} \times \pi \times 2^2 = 4\pi = 12.56(\text{平方厘米}).$$

5. 如图，是一个由 2 个半圆、2 个扇形、1 个正方形组成的“心型”。已知半圆的直径为 10，那么，“心型”的面积是\_\_\_\_\_。（注： $\pi$  取 3.14）



【答案】 257

【分析】 图中图形面积等于一个正方形加上一个半径为 5 的圆，再加上一个半径为 10 的  $\frac{1}{4}$  圆，所以面积为：

$$10 \times 10 + \pi \times 5 \times 5 + \frac{1}{4} \times \pi \times 10 \times 10 = 257.$$

6. 分别以一个边长为 2 厘米的等边三角形的三个顶点为圆心，以 2 厘米为半径画弧，得到下图。那么，阴影图形的周长是\_\_\_\_\_厘米。（ $\pi$  取 3.14）

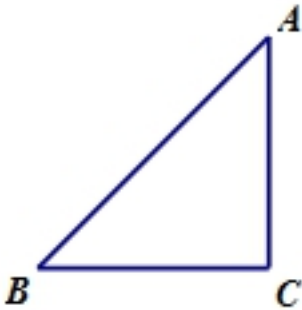


【答案】 12.56

【分析】 图形周长由 6 段弧组成，每段弧对应的圆心角为  $60^\circ$ ，所以图形的周长等于一个圆的周长。

$$2 \times 3.14 \times 2 = 12.56(\text{厘米}).$$

7. 如图， $\triangle ABC$  是一个等腰直角三角形，直角边的长度是 1 米。现在以  $C$  点为圆心，把三角形  $ABC$  顺时针转  $90$  度，那么， $AB$  边在旋转时所扫过的面积是\_\_\_\_\_平方米。（ $\pi \approx 3.14$ ）



【答案】 0.6775

【分析】 如图，顺时针旋转后， $A$  点沿弧  $AA'$  转到  $A'$  点， $B$  点沿弧  $BB'$  转到  $B'$  点， $D$  点沿弧  $DD'$  转到  $D'$  点。因为  $CD$  是  $C$  点到  $AB$  的最短线段，所以  $AB$  扫过的面积就是图中的弧  $A'AB$  与  $BDD'A'$  之间的阴影图形。

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\text{空白}},$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC} + S_{\triangle AD'C} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}(\text{平方米}),$$

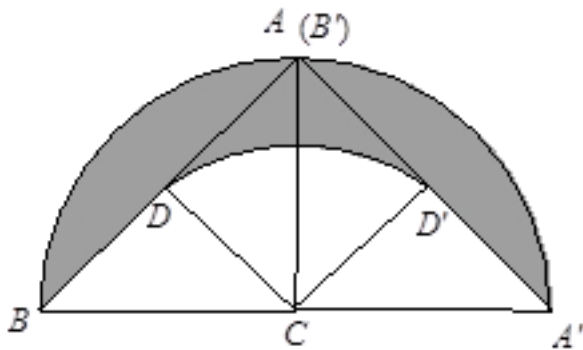
$$S_{\triangle ABC} = S_{\text{正方形 } ADCD'} = CD^2 = \frac{1}{2} \text{ (平方米)},$$

所以,

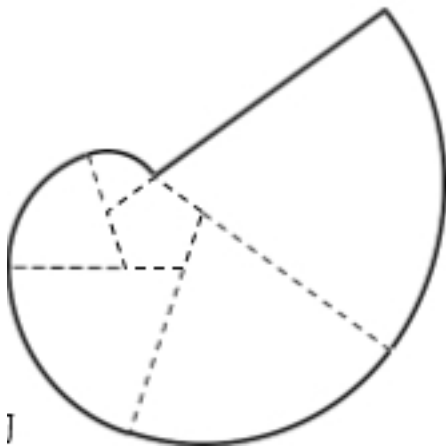
$$S_{\text{扇形 } DCD'} = \frac{\pi}{4} \times CD^2 = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} \text{ (平方米)},$$

我们推知

$$\begin{aligned} S_{\text{阴影}} &= \frac{\pi}{2} \times BC^2 - S_{\text{扇形 } DCD'} - (S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ACD'}) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2} \\ &= 0.6775 \text{ (平方米)}. \end{aligned}$$



8. 一个边长为 100 厘米的正五边形和五个扇形拼成如图的“海螺”，那么这个图形的周长是\_\_\_\_\_厘米 ( $\pi$  取 3.14) .



【答案】 2384

【分析】 周长 =  $500 + \frac{1}{5} \times 2 \times \pi \times (100 + 200 + 300 + 400 + 500) = 2384$ .

9. 6 个半径相同的小圆和 1 个大圆如图摆放. 大圆的面积是 120, 那么, 阴影部分面积是\_\_\_\_\_.



【答案】 40

【分析】 设大圆半径和小圆半径分别为  $R$  和  $r$ , 画出大小圆半径会发现它们同处一个正三角形, 如下图, 两条粗线分别为大圆直径和小圆直径, 由正三角形性质和勾股定理, 有

$$R^2 + r^2 = (2r)^2 \Rightarrow R^2 = 3r^2,$$

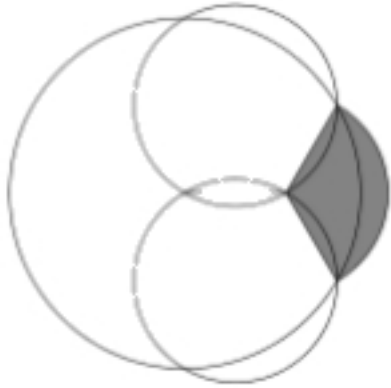
这说明大圆面积和小圆面积是 3 倍关系, 即小圆面积为 40;



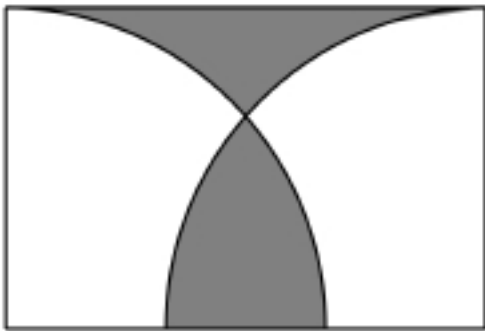
由于三个小圆面积等于大圆面积, 所以下图中红色部分面积等于灰色部分:



如下图，可以看出，上图中的两种阴影部分拼在一起可以形成扇形，一共可以形成 6 个 120 度扇形，总和为 2 个小圆，又因为两种阴影部分面积相等，所以所求面积为一个小圆面积 40.



10. 如图，分别以长方形的一条长边的两个顶点为圆心，以长方形的宽为半径作  $\frac{1}{4}$  圆，若图中的两个阴影部分的面积相等，则此长方形的长与宽的比值是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\pi:2$

【分析】 因为  $S_2 = S_4$ ，两个  $\frac{1}{4}$  圆的面积

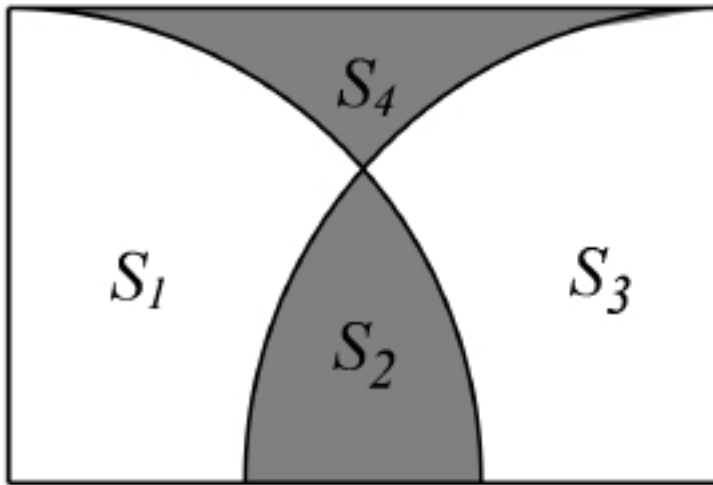
$$S_1 + S_2 + S_2 + S_3 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

与长方形面积相等.  
 所以设长为  $a$ , 宽为  $b$ ,

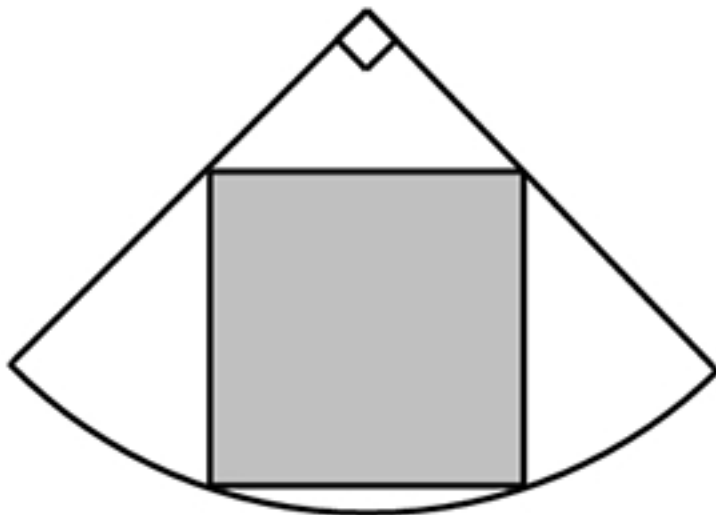
$$\frac{1}{4}\pi b^2 \times 2 = ab,$$

$$\pi b = 2a,$$

$$a:b = \pi:2.$$



11. 如下图所示, 一个  $\frac{1}{4}$  圆中有一个正方形, 阴影正方形的面积是 16, 那么图中的扇形面积是\_\_\_\_\_。(  $\pi$  取 3 )



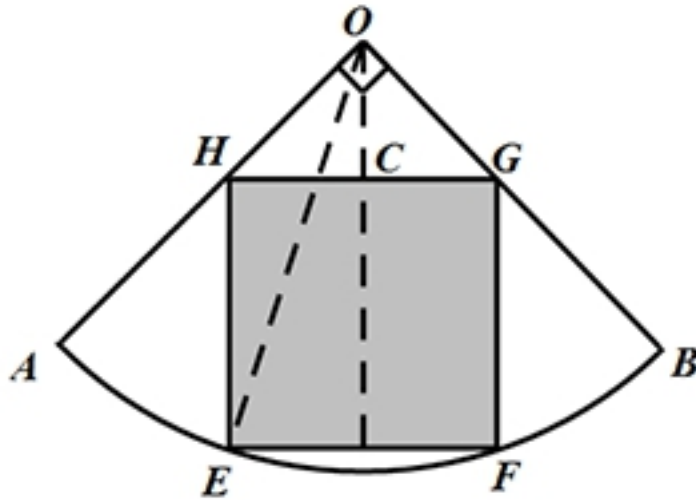
【答案】 30

【分析】 给图中标上字母，如下图所示，由于阴影正方形的面积为 16，则边长为 4， $OC = CH = ED = 2, OD = 2 + 4 = 6$ ，根据勾股定理，可知扇形的半径满足：

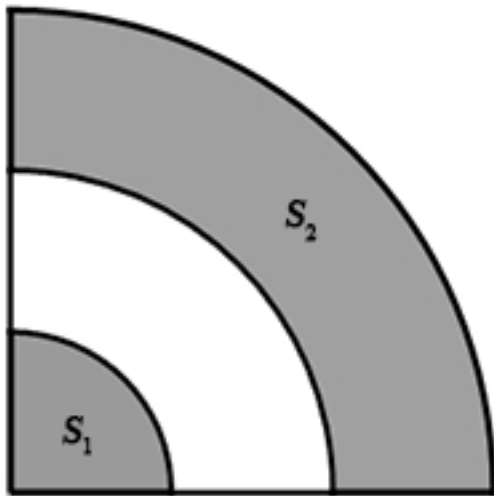
$$r^2 = 2^2 + 6^2 = 40.$$

所以图中扇形的面积为：

$$\frac{1}{4}\pi \times 40 = 30.$$



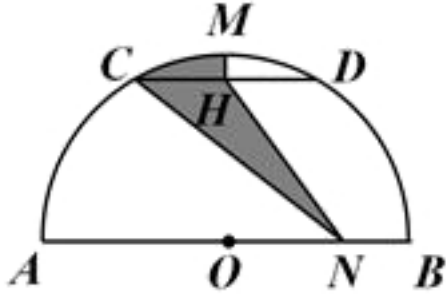
12. 半径为 10、20、30 的三个扇形如下图放置， $S_2$  是  $S_1$  的\_\_\_\_\_倍.



【答案】 5

【分析】 三个扇形的半径比为 1:2:3，则面积比为 1:4:9，所以答案为  $(9 - 4) \div 1 = 5$  倍.

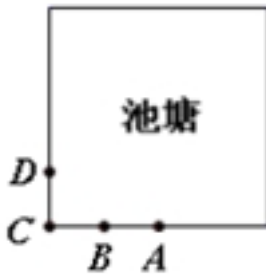
13. 如下图所示,  $AB$  是半圆的直径,  $O$  是圆心,  $AC = CD = DB$ ,  $M$  是  $CD$  的中点,  $H$  是弦  $CD$  的中点. 若  $N$  是  $OB$  上一点, 半圆的面积等于 12 平方厘米, 则图中阴影部分的面积是\_\_\_\_\_平方厘米.



【答案】 2

【分析】 连接  $OC$ 、 $OD$ 、 $OH$ , 由于  $C$ 、 $D$  是半圆的两个三等分点  $M$  是  $CD$  的中点,  $H$  是弦  $CD$  的中点, 可见这个图形是对称的. 由对称性可知  $CD$  与  $AB$  平行, 由此可得:  $\triangle CHN$  的面积与  $\triangle CHO$  的面积相等, 所以, 阴影部分面积等于扇形  $COD$  面积的一半, 而扇形  $COD$  的面积又等于半圆面积的  $\frac{1}{3}$ , 所以, 阴影部分面积等于半圆面积的  $\frac{1}{6}$ , 为  $12 \times \frac{1}{6} = 2$ (平方厘米).

14. 如图, 边长为 12 米的正方形池塘的周围是草地, 池塘边  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  处各有一根木桩, 且  $AB = BC = CD = 3$  米. 现用长 4 米的绳子将一头羊拴在其中的某根木桩上 (不计打结处). 为使羊在草地上活动区域的面积最大, 应将绳子拴在\_\_\_\_\_处的木桩上.



【答案】 C

【分析】 在  $A$  点时活动区域的面积是一个半径为 4 米的半圆, 即

$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \pi = 8\pi(\text{平方米}).$$

在  $B$ 、 $D$  点时活动区域的面积都是一个半径为 4 米的半圆加一个  $\frac{1}{4}$  半径为 1 米的圆。即

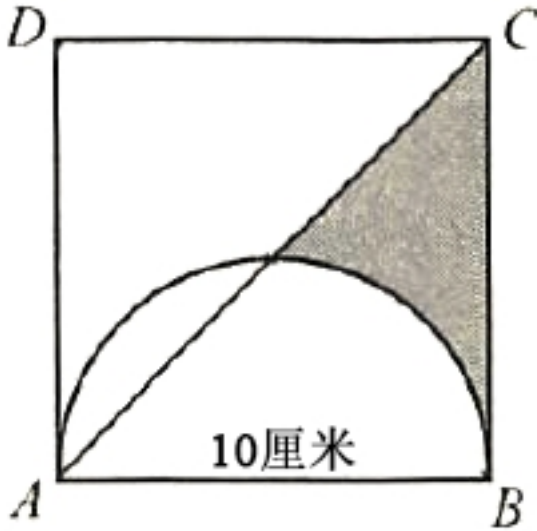
$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \pi + \frac{1}{4} \times 1^2 \times \pi = 8\frac{1}{4}\pi(\text{平方米}).$$

在  $C$  点时活动区域的面积是  $\frac{3}{4}$  个半径为 4 米的圆，即

$$\frac{3}{4} \times 4^2 \times \pi = 12\pi(\text{平方米}).$$

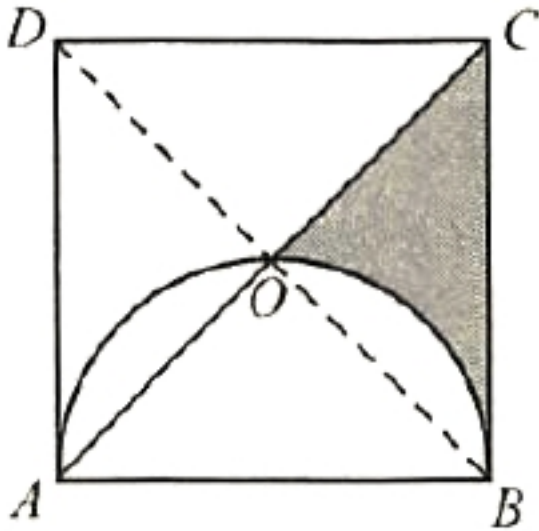
综上所述，拴在  $C$  处的木桩上时活动范围最大。

15. 如下图所示， $ABCD$  是边长为 10 厘米的正方形，且  $AB$  是半圆的直径，则阴影部分的面积是\_\_\_\_\_平方厘米。（ $\pi$  取 3.14）



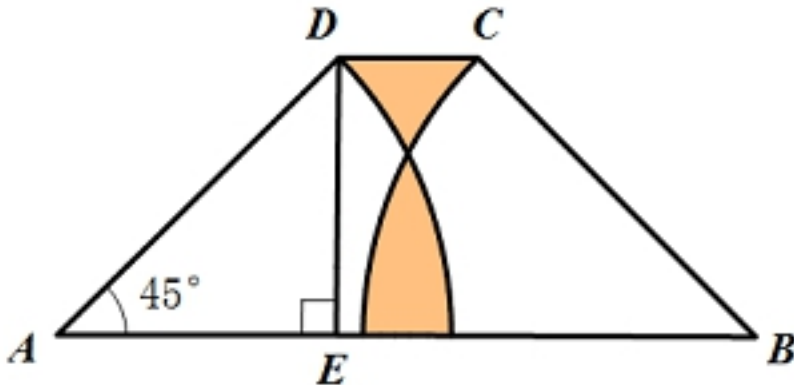
【答案】 17.875

【分析】 如下图所示，连接  $DB$ ，阴影部分的面积的 2 倍相当于  $\text{正方形面积} - \text{三角形 } DOC \text{ 的面积} - \text{半圆面积}$ ，



所以该面积 =  $(10 \times 10 - 10 \times 10 \div 4 - 3.14 \times 5 \times 5 \div 2) \div 2 = 17.875$ (平方厘米).

16. 如下图所示, 梯形  $ABCD$  中的两个阴影部分的面积相等,  $DE = 1$  厘米,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , 则  $CD =$  \_\_\_\_\_ 厘米. (其中  $\pi$  取 3.14)

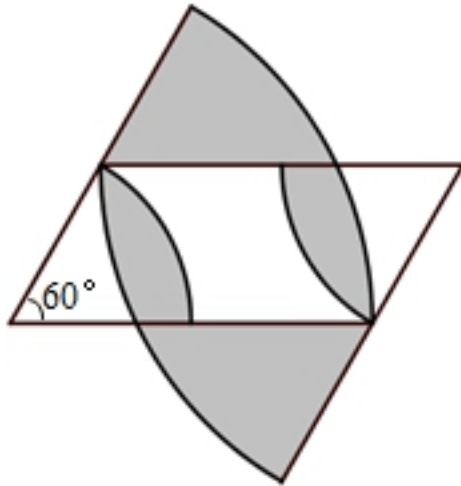


**【答案】** 0.57

**【分析】** 由于两个阴影部分面积相等, 可知扇形面积为梯形面积的一半, 又知道扇形面积为  $\frac{1}{8} \times \pi \times (1^2 + 1^2) = \frac{\pi}{4}$ , 所以梯形面积为  $\frac{\pi}{2}$ , 设  $CD$  的长为  $x$  厘米, 那么  $(x + 1 + 1 + x) \times 1 \div 2 = \frac{\pi}{2}$ .

求得  $CD$  的长为  $\frac{\pi}{2} - 1 = 0.57$ (厘米).

17. 如下图所示, 平行四边形的长边是 6, 短边是 3, 高为 2.6, 则阴影部分的面积为\_\_\_\_\_. ( $\pi$  取 3.14)



【答案】 15.9

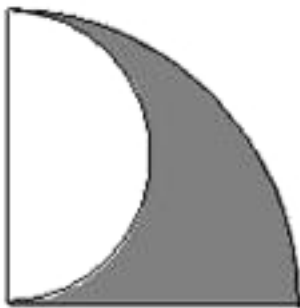
【分析】 根据容斥的思想，

阴影的一半 = 大扇形 + 小扇形 - 平行四边形，

所以阴影面积为：

$$\left[ \frac{1}{6} \times 3.14 \times (6^2 + 3^2) - 6 \times 2.6 \right] \times 2 = 15.9.$$

18. 如下图所示，为一个半圆和一个扇形，扇形的半径是半圆的直径，空白部分与阴影部分面积哪个大？

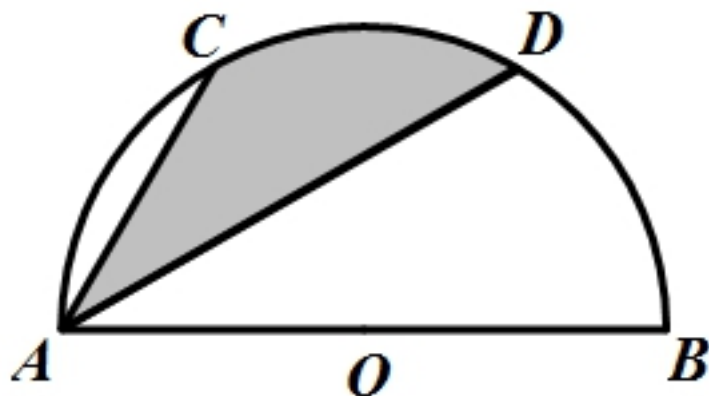


【答案】 一样大.

【分析】 记半圆的半径为 1，半圆的面积为  $\frac{1}{2}\pi$ ，扇形的半径为 2，面积为  $\pi$ 。

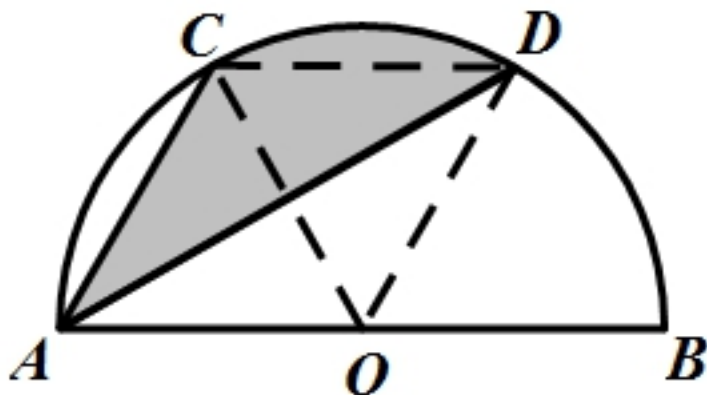
空白与阴影的面积  $\frac{1}{2}\pi : (\pi - \frac{1}{2}\pi) = 1:1$ . 一样大.

19. 如图， $C$ 、 $D$  是以  $AB$  为直径的半圆的三等分点， $O$  是圆心，且半径为 6. 求图中阴影部分的面积.



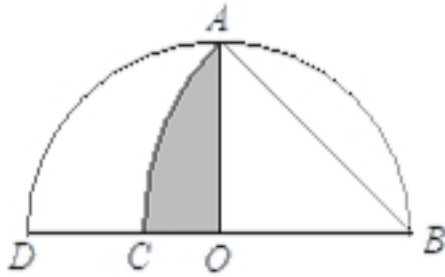
【答案】  $6\pi$

【分析】



如图，连接  $OC$ 、 $OD$ 、 $CD$ . 由于  $C$ 、 $D$  是半圆的三等分点，所以  $\triangle AOC$  和  $\triangle COD$  都是正三角形，那么  $CD$  与  $AO$  是平行的. 所以  $\triangle ACD$  的面积与  $\triangle OCD$  的面积相等，那么阴影部分的面积等于扇形  $OCD$  的面积，为  $\pi \times 6^2 \times \frac{1}{6} = 6\pi$ .

20. 已知半圆所在的圆的面积为 62.8 平方厘米，求阴影部分的面积. ( $\pi = 3.14$ )



【答案】 5.7 平方厘米

【分析】 由于阴影部分是一个不规则图形，所以要设法把它转化成规则图形来计算。从图中可以看出，阴影部分的面积是一个  $45^\circ$  的扇形与一个等腰直角三角形的面积差。

由于半圆的面积为 62.8 平方厘米，所以  $OA^2 = 62.8 \div 3.14 = 20$ 。

因此

$$S_{\triangle AOB} = OA \times OB \div 2 = OA^2 \div 2 = 10(\text{平方厘米}).$$

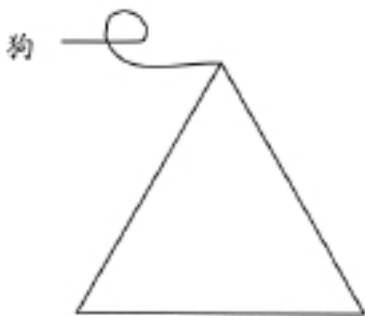
由于  $\triangle AOB$  是等腰直角三角形，所以  $AB^2 = 20 \times 2 = 40$ 。

因此

$$\begin{aligned} \text{扇形 } ABC \text{ 的面积} &= \pi \times AB^2 \times \frac{45}{360} \\ &= \pi \times 40 \times \frac{45}{360} = 15.7(\text{平方厘米}). \end{aligned}$$

所以，阴影部分的面积等于： $15.7 - 10 = 5.7$ (平方厘米)。

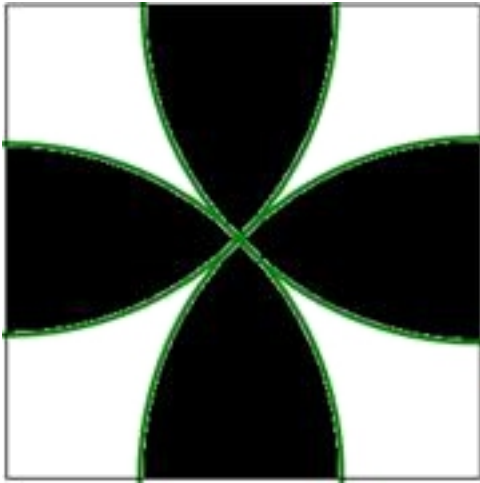
21. 如图所示，一只小狗被拴在建筑物的一角，四周都是空地。建筑物是一个边长为 2 米的等边三角形，绳长是 3 米，那么小狗的活动范围是多少？（建筑外墙不可逾越，小狗身长忽略不计， $\pi$  取 3）



【答案】 24.5

【分析】 首先画出小狗活动的范围，然后把活动范围分成几个扇形来求解， $\frac{300}{360} \times \pi \times 3^2 + \frac{240}{360} \times \pi \times 1^2 = 24.5$ .

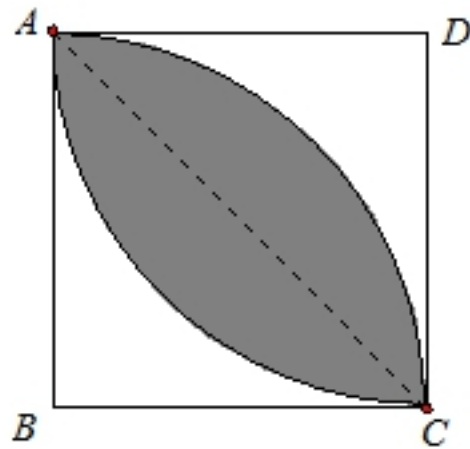
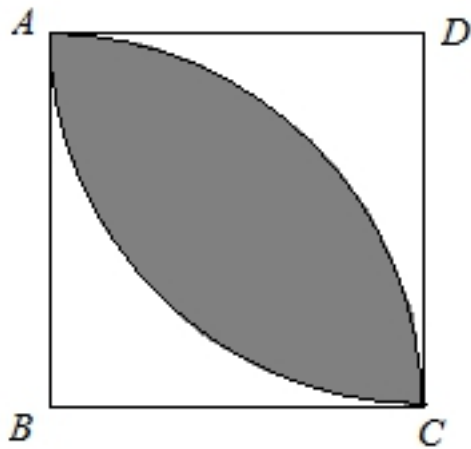
22. 已知图中正方形的边长是 2，分别以其四个顶点为圆心的直角扇形恰好交于正方形的中心，求图中阴影部分的面积.



【答案】  $2\pi - 4$

【分析】  $r^2 = 2$ ,  $S_{\text{阴影}} = \pi r^2 - 2^2 = 2\pi - 4$ .

23. 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 4 厘米，分别以  $B$ 、 $D$  为圆心以 4 厘米为半径在正方形内画圆。求阴影部分面积。（ $\pi$  取 3）



【答案】 8

【分析】 由题可知，图中阴影部分是两个扇形重叠的部分，我们可以利用容斥原理从图形整体上考虑来求阴影部分面积；同样，我们也可以通过作辅助线直接求阴影部分的面积。

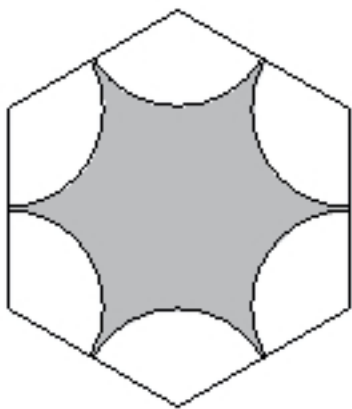
解法一：把两个扇形放在一起得到1个正方形的同时还重叠了一块阴影部分。

则阴影部分的面积为  $= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 - 4 \times 4 = 8$ ；

解法二：连接  $AC$ ，我们发现阴影部分面积的一半就是扇形减去三角形的面积，

所以阴影部分面积  $= 2 \times (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 - 4 \times 4 \div 2) = 8$ 。

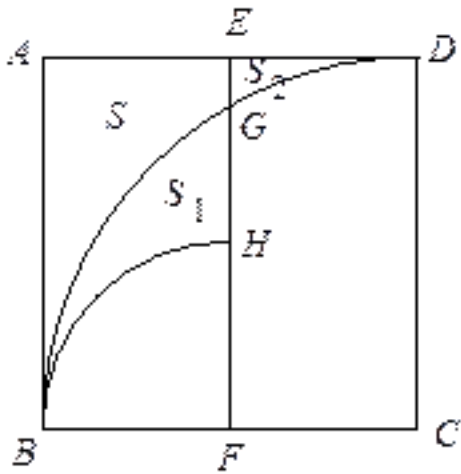
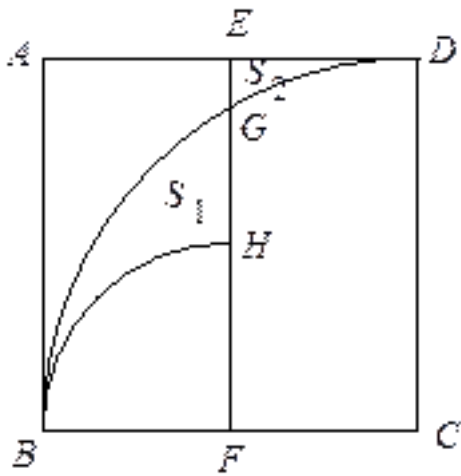
24. 如图所示，图中是一个正六边形，每个角上有一个半径是10厘米的扇形，六扇形面积总和是多少？（ $\pi$ 取3.14）



【答案】 628 平方厘米。

【分析】 扇形面积公式  $S_{\text{扇}} = \frac{n\pi R^2}{360}$  已知半径和扇形弧的度数是  $120^\circ$ ，这样就可求出扇形的面积和为  $6 \times \frac{120}{360} \times \pi \times 10^2 = 628$  (平方厘米)。

25. 如图所示， $ABCD$  是一边长为4cm的正方形， $E$  是  $AD$  的中点，而  $F$  是  $BC$  的中点。以  $C$  为圆心、半径为4cm的四分之一圆的圆弧交  $EF$  于  $G$ ，以  $F$  为圆心、半径为2cm的四分之一圆的圆弧交  $EF$  于  $H$  点，若图中  $S_1$  和  $S_2$  两块面积之差为  $m\pi - n(\text{cm}^2)$ （其中  $m$ 、 $n$  为正整数），请问  $m + n$  之值为何？



【答案】 11

【分析】 (法1)  $S_{\square FCDE} = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$ ,  $S_{\text{扇形} BCD} = \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ ,

$S_{\text{扇形} BFH} = \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 = \pi \text{ (cm}^2\text{)}$ , 而

$S_1 - S_2 = S_{\text{扇形} BCD} - S_{\text{扇形} BFH} - S_{\square FCDE} = 4\pi - \pi - 8 = 3\pi - 8 \text{ (cm}^2\text{)}$ ,

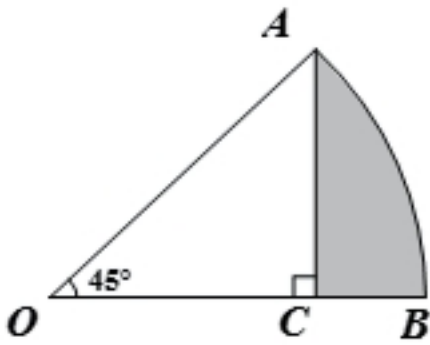
所以  $m = 3$ ,  $n = 8$ ,  $m + n = 3 + 8 = 11$ .

(法2) 如右上图,  $S + S_1 = S_{\text{BFEA}} - S_{\text{扇形} BFH} = 2 \times 4 - 2 \times 2 \times \pi \div 4 = 8 - \pi \text{ (cm}^2\text{)}$ ,

$S + S_2 = S_{\square ABCD} - S_{\text{扇形} BCD} = 4 \times 4 - 4 \times \pi \div 4 = 16 - 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ ,

所以,  $S_1 - S_2 = (8 - \pi) - (16 - 4\pi) = 3\pi - 8 \text{ (cm}^2\text{)}$ , 故  $m + n = 3 + 8 = 11$ .

26. 如图中扇形的半径  $OA = OB = 6$  厘米,  $\angle AOB = 45^\circ$ ,  $AC$  垂直  $OB$  于  $C$ , 那么图中阴影部分的面积是多少平方厘米? ( $\pi \approx 3.14$ )

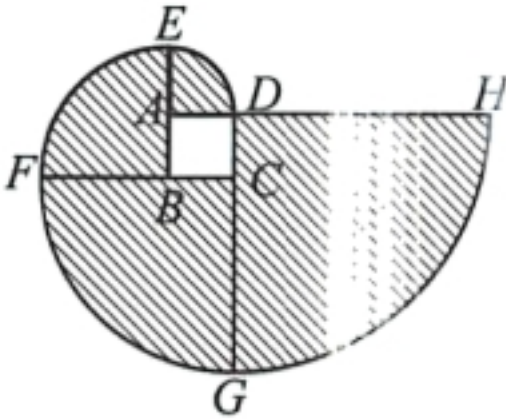


【答案】 5.13 平方厘米

【分析】 阴影部分面积为：

$$\frac{45}{360} \times \pi \times 6^2 - \frac{1}{4} \times 6^2 = \frac{1}{8} \times 3.14 \times 36 - \frac{1}{4} \times 36 = 5.13(\text{平方厘米}).$$

27. 如图，正方形  $ABCD$  边长分别为 1 厘米，依次以  $A, B, C, D$  为圆心，以  $AD, BE, CF, DG$  为半径画出四个直角扇形，那么阴影部分的面积是多少？（ $\pi$  取 3.14）



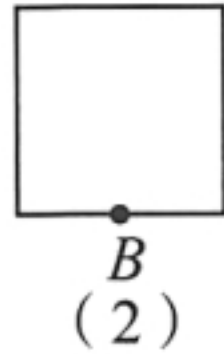
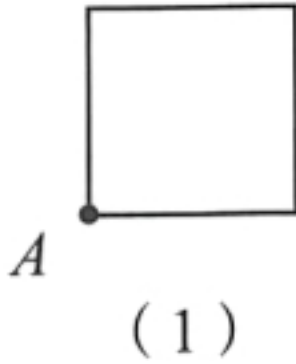
【答案】 23.55 平方厘米.

【分析】 阴影部分的面积是

$$\begin{aligned} & 3.14 \times 1^2 \times \frac{1}{4} + 3.14 \times 2^2 \times \frac{1}{4} + 3.14 \times 3^2 \times \frac{1}{4} + 3.14 \times 4^2 \times \frac{1}{4} \\ & = 23.55(\text{平方厘米}). \end{aligned}$$

28. (1) 如图(1), 一只小狗被拴在一个边长为4米的正方形的建筑物的顶点A处, 四周都是空地, 绳长8米, 小狗的活动范围是多少平方米?

(2) 如图(2) 小狗不是被拴在A处, 而是在一边的中点B处, 那么小狗的活动范围是多少平方米? (建筑外墙不可逾越, 小狗身长忽略不计,  $\pi$  取 3.14)



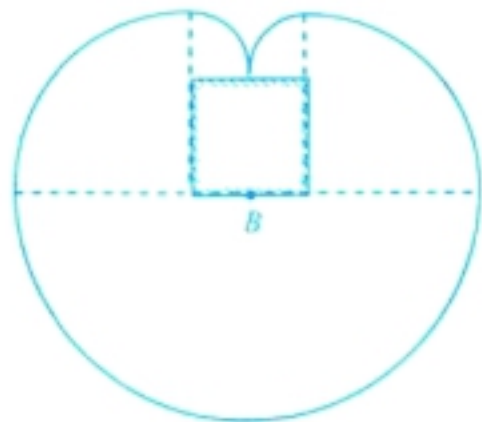
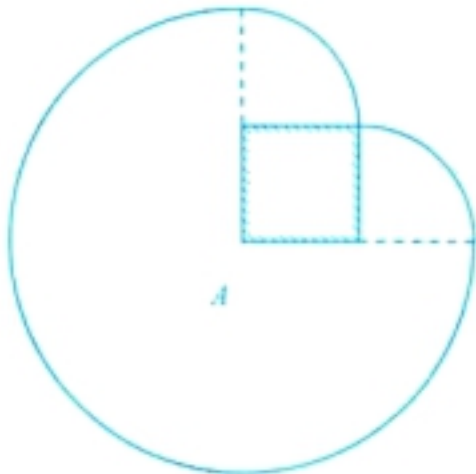
**【答案】** (1) 175.84; (2) 163.28

**【分析】** (1) 如下左图, 小狗的活动范围为圆心角为  $270^\circ$ 、半径为 8 米的扇形, 和两个圆心角为  $90^\circ$ 、半径为 4 米的扇形, 总大小为

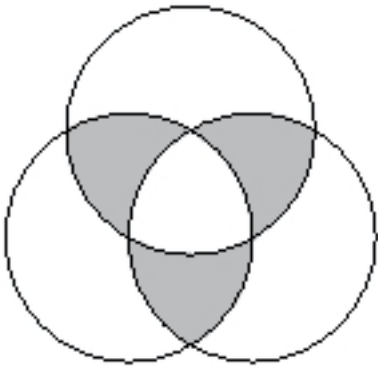
$$\frac{3}{4}\pi \times 8^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 \times 2 = 56\pi = 175.84(\text{平方米}).$$

(2) 如下右图, 小狗的活动范围为半径是 8 米的半圆, 和两个圆心角为  $90^\circ$ 、半径为 6 米的扇形, 以及两个圆心角为  $90^\circ$ 、半径为 2 米的扇形. 总大小为

$$\frac{1}{2} \times \pi \times 8^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 \times 2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 \times 2 = 52\pi = 163.28(\text{平方米}).$$

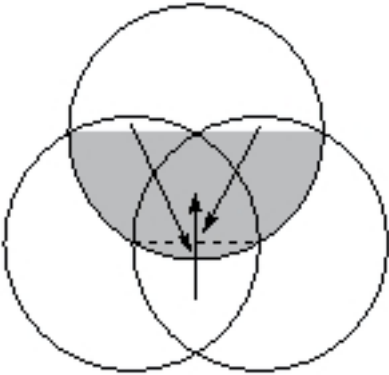


29. 如图中三个圆的半径都是  $5\text{cm}$ ，三个圆两两相交于圆心. 求阴影部分的面积和. ( $\pi$  取  $3.14$ )



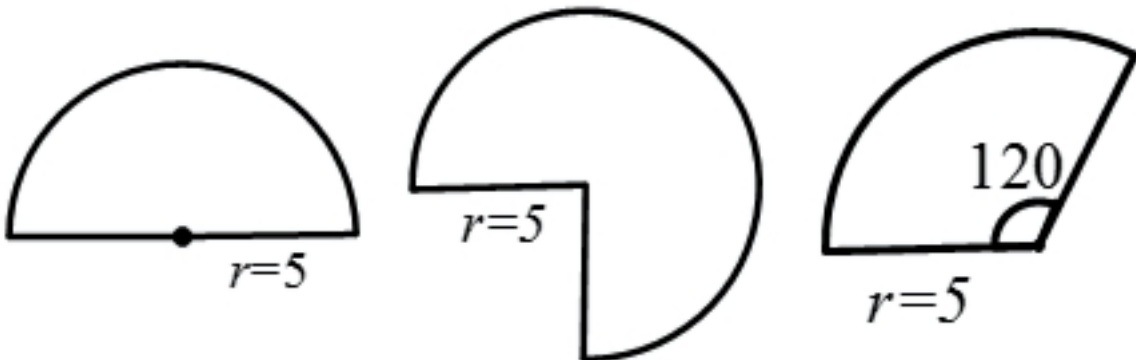
【答案】  $39.25(\text{cm}^2)$

【分析】



将原图割补成如图，阴影部分正好是一个半圆，面积为  
 $5 \times 5 \times 3.14 \div 2 = 39.25(\text{cm}^2)$ .

30. (1) 求下列各图的周长和面积各是多少? (用含  $\pi$  的式子表示)



(2) 已知一个扇形面积为 18.84 平方厘米，圆心角为  $60^\circ$ ，这个扇形的半径和周长是多少？  
( $\pi$  取 3.14)

**【答案】** (1)  $5\pi + 10$ ,  $12\frac{1}{2}\pi$ ,  $7\frac{1}{2}\pi + 10$ ,  $18\frac{3}{4}\pi$ ,  $3\frac{1}{3}\pi + 10$ ,  $8\frac{1}{3}\pi$ ;  
(2) 6 厘米, 18.28 厘米.

**【分析】** (1) 半圆的周长

$$2 \times \pi \times 5 \div 2 + 2 \times 5 = 5\pi + 10,$$

面积

$$\pi \times 5^2 \div 2 = 12\frac{1}{2}\pi;$$

$\frac{3}{4}$  圆的周长

$$2 \times \pi \times 5 \times \frac{3}{4} + 2 \times 5 = 7\frac{1}{2}\pi + 10,$$

面积

$$\pi \times 5^2 \times \frac{3}{4} = 18\frac{3}{4}\pi;$$

$\frac{1}{3}$  圆的周长

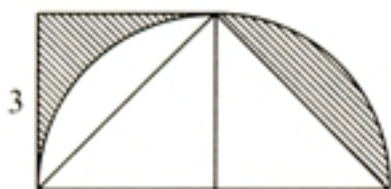
$$2 \times \pi \times 5 \times \frac{120}{360} + 2 \times 5 = 3\frac{1}{3}\pi + 10,$$

面积

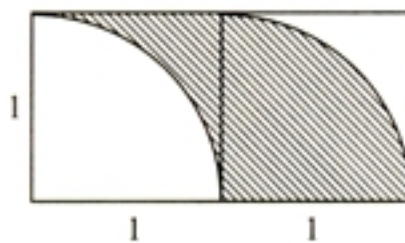
$$\pi \times 5^2 \times \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}\pi.$$

(2) 由于:  $\frac{1}{6}\pi r^2 = 18.84$ , 所以  $r = 6$ , 则扇形的周长为:  $[\frac{1}{6} \times 2 \times \pi \times 6 + 2 \times 6 = 18.28 \text{ (厘米)}]$ .

31. 如图，求各图形中阴影部分的面积。（图中长度单位为厘米， $\pi$  取 3.14）



(1)



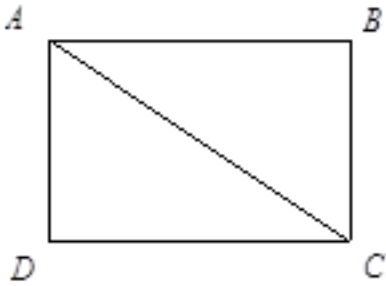
(2)

**【答案】** (1) 4.5 平方厘米; (2) 1 平方厘米.

**【分析】** (1) 将右边四分之一圆的阴影部分镜像到左边四分之一圆，阴影部分的面积为：  
 $3 \times 3 \div 2 = 4.5$  (平方厘米);

(2) 将右图的四分之一圆左移，则为一个正方形，面积为：  
 $1 \times 1 = 1$  (平方厘米).

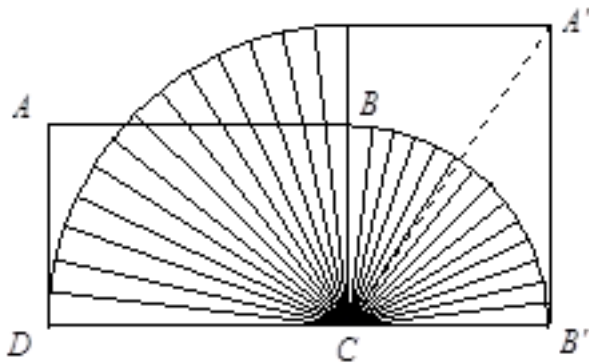
32. 如图， $ABCD$  是一个长为 4，宽为 3，对角线长为 5 的正方形，它绕  $C$  点按顺时针方向旋转  $90^\circ$ ，分别求出四边扫过图形的面积.



【答案】  $BC: \frac{9\pi}{4}$

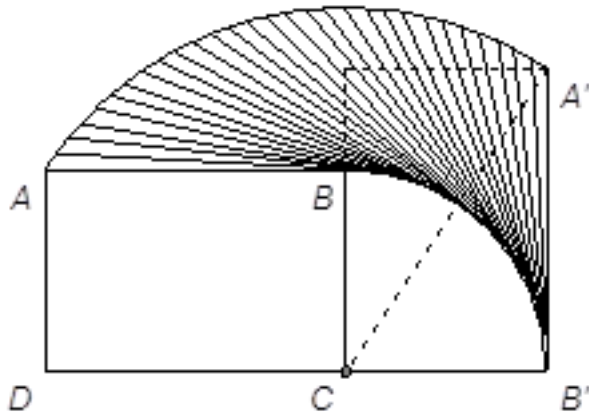
$DC: 4\pi$   
 $AB: 4\pi$   
 $AD: \frac{9\pi}{4}$

【分析】 容易发现， $DC$  边和  $BC$  边旋转后扫过的图形都是以线段长度为半径的圆的  $\frac{1}{4}$ ，如图：



因此  $DC$  边扫过图形的面积为  $4\pi$ ， $BC$  边扫过图形的面积为  $\frac{9\pi}{4}$ .  
 研究  $AB$  边的情况.

在整个  $AB$  边上，距离  $C$  点最近的点是  $B$  点，最远的点是  $A$  点，因此整条线段所扫过部分应该介于这两个点所扫过弧线之间，见如图中阴影部分：



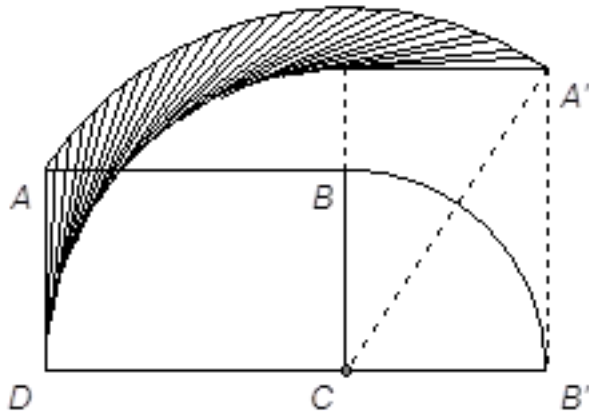
下面来求这部分的面积.

观察图形可以发现, 所求阴影部分的面积实际上是:

扇形  $ACA'$  面积 + 三角形  $A'B'C$  面积 - 三角形  $ABC$  面积 - 扇形  $BCB'$  面积 = 扇形  $ACA'$  面积 - 扇形  $BCB'$  面积 =  $\frac{5^2\pi}{4} - \frac{3^2\pi}{4} = 4\pi$ .

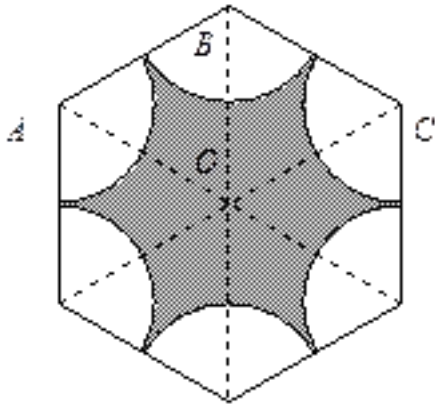
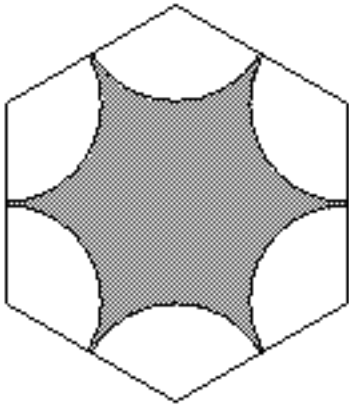
研究  $AD$  边扫过的图形.

由于在整条线段上距离  $C$  点最远的点是  $A$ , 最近的点是  $D$ , 所以我们可以画出  $AD$  边扫过的图形, 如图阴影部分所示:



用与前面同样的方法可以求出面积为:  $\frac{5^2\pi}{4} - \frac{4^2\pi}{4} = \frac{9}{4}\pi$ , 旋转图形的关键, 是先从整体把握一下”变化过程”, 即它是通过什么样的基本图形经过怎样的加减次序得到的. 先不去考虑具体数据, 一定要把思路捋清楚. 最后会发现, 所有数据要么直接告诉你, 要么就”藏”在那儿, 一定会有.

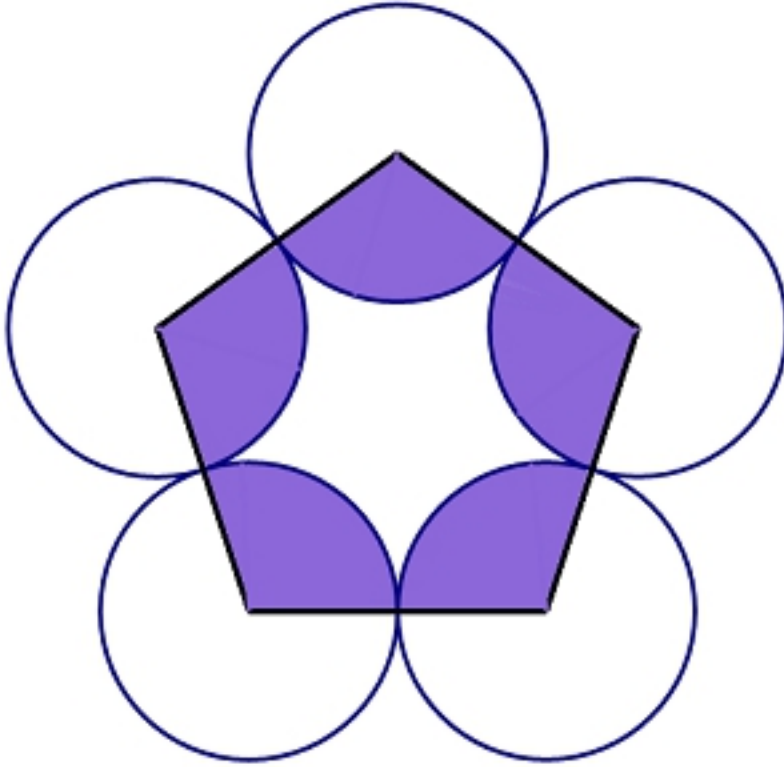
33. 如图所示, 求阴影面积, 图中是一个正六边形, 面积为 1040 平方厘米, 空白部分是 6 个半径为 10 厘米的小扇形. (圆周率取 3.14)



【答案】 412 平方厘米

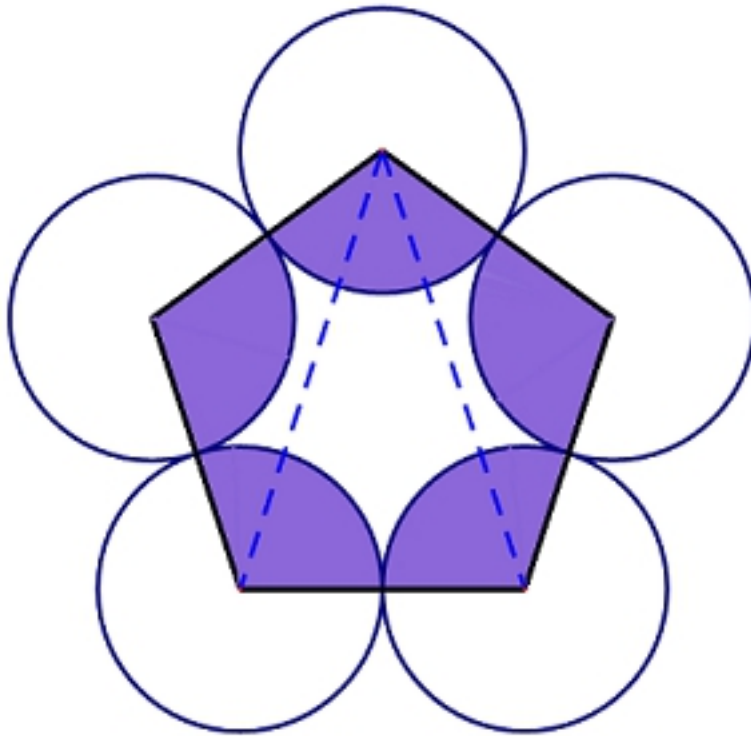
【分析】 所要求的阴影面积是用正六边形的面积减去六个小扇形面积、正六边形的面积已知，现在关键是小扇形面积如何求，有扇形面积公式  $S_{\text{扇}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 。可求得，需要知道半径和扇形弧的度数，由已知正六边形每边所对圆心角为  $60^\circ$ ，那么  $\angle AOC = 120^\circ$ ，又知四边形  $ABCO$  是平行四边形，所以  $\angle ABC = 120^\circ$ ，这样就可求出扇形的面积和为  $6 \times \frac{120}{360} \times \pi \times 10^2 = 628$ (平方厘米)，阴影部分的面积 =  $1040 - 628 = 412$ (平方厘米)。

34. 下图中五个相同的圆的圆心连线构成一个边长为 10 厘米的正五边形。求五边形内阴影部分的面积。 ( $\pi = 3.14$ )

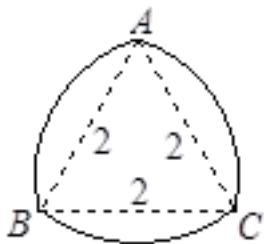


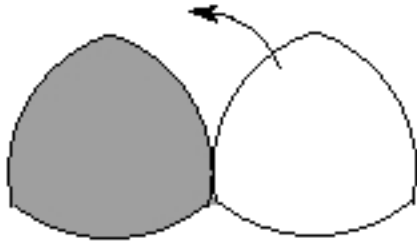
**【答案】** 117.75 平方厘米

**【分析】** 我们用两条线将五边形分成了三个三角形，如下图所示，可以看出，这个五边形的五个角的度数和是  $180 \times 3 = 540^\circ$ ,  $540 \div 360 = 1.5$  倍，即阴影部分面积相当于 1.5 个半径为 5 的圆的面积，所以阴影部分的面积是  $\pi \times 5^2 \times 1.5 = 117.75$ (平方厘米).



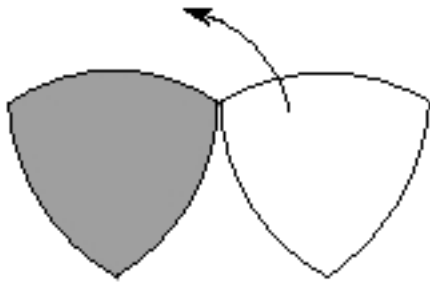
35. 先做一个边长为  $2\text{cm}$  的等边三角形，再以三个顶点为圆心， $2\text{cm}$  为半径作弧，形成曲边三角形（如下图）。再准备两个这样的图形，把一个固定住（下图中的阴影），另一个围绕着它滚动，如下图那样，从顶点相接的状态下开始滚动。请问此图形滚动时经过的面积是多少平方厘米？（ $\pi \approx 3.14$ ）



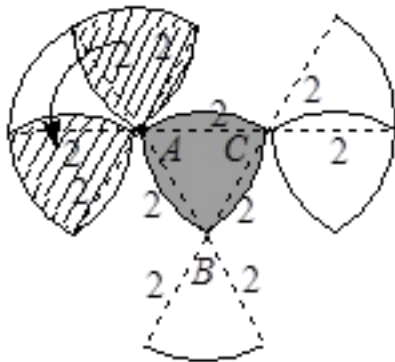


【答案】  $25.12\text{cm}^2$

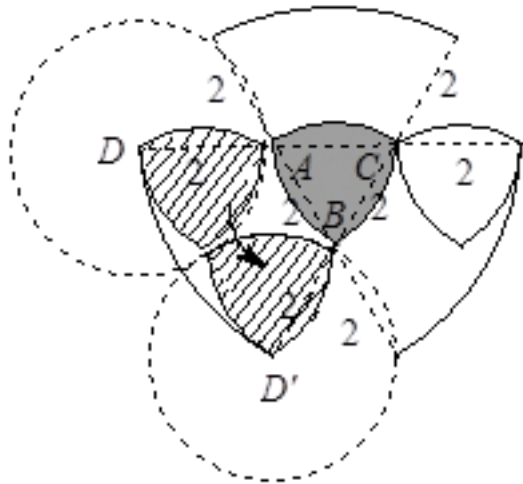
【分析】 在处理图形的运动问题时，描绘出物体的运动轨迹是解决问题的第一步，只有大的方向确定了，才能实施具体的计算。



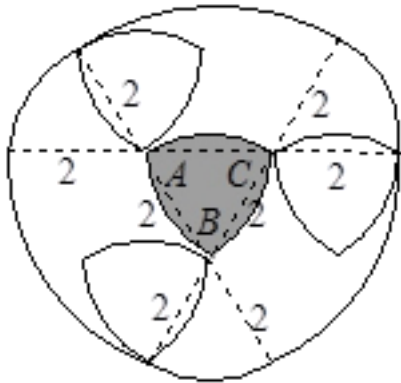
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

在数学中，本题所作出的这个曲边三角形叫“莱洛三角形”，“莱洛三角形”有一个重要的性质就是它在所有方向上的宽度都相同。

为了求出“莱洛三角形”滚动时经过的面积，可以分 2 步来思考：

第 1 步：如图(2)所示，当“莱洛三角形”从顶点 A 的上方滚动到顶点 A 的左边时，这时阴影“莱洛三角形”滚动的这部分面积是以 A 为圆心、 $2\text{cm}$  为半径、圆心角为  $60^\circ$  的扇形。在顶点 A、B、C 处各有这样的一个扇形；

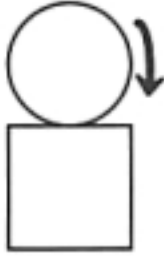
第 2 步：如图(3)所示，当“莱洛三角形”在边 AB 上滚动时，这时可以把阴影“莱洛三角形”看作是以图(3)中 D 点为圆心的圆的一部分，这个圆在以 C 点为圆心的弧 AB 上滚动，可知此时圆心 D 运动的轨迹是图(3)中的弧 DD'，所以此时阴影“莱洛三角形”滚动的这部分面积是以 C 为圆心、 $4\text{cm}$  为半径、圆心角为  $60^\circ$  的扇形减去半径为  $2\text{cm}$  的  $60^\circ$  的扇形；

综上所述，去掉图(4)中阴影“莱洛三角形”后所形成的组合图形就是要求的面积。

滚动时经过的面积是：

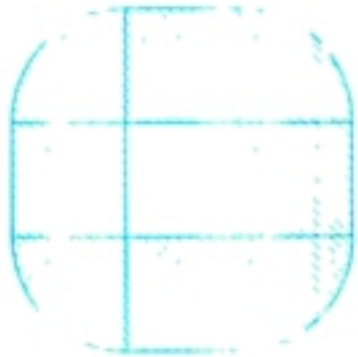
$$\begin{aligned}
 & 3 \times \left( \pi \times 2^2 \times \frac{60}{360} \right) + 3 \times \left( \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} - \pi \times 2^2 \times \frac{60}{360} \right) \\
 &= 8\pi \\
 &= 25.12(\text{cm}^2).
 \end{aligned}$$

36. 如图，正方形的边长是 2 厘米，圆形的半径是 1 厘米，当圆形绕正方形滚动一周又回到原来位置时，扫过的面积有多大？（ $\pi$  取 3.14）

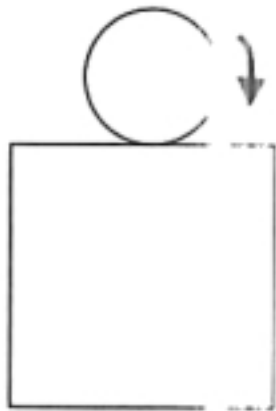


**【答案】** 28.56 平方厘米.

**【分析】** 扫过的区域如图所示，正方形的边长是 2 厘米，四个正方形的面积之和是 16 平方厘米，四个扇形正好可以拼成一个半径为 2 厘米的圆，圆的面积是 12.56 平方厘米，最后的结果是 28.56 平方厘米.

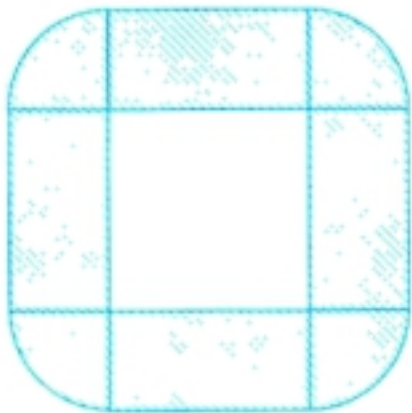


37. 图中正方形的边长是 4 厘米，圆形的半径是 1 厘米。当圆形绕正方形滚动一周又回到原来位置时，扫过的面积有多大？（ $\pi$  取 3.14）

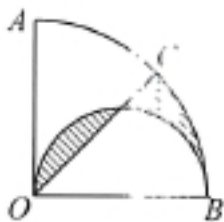


【答案】 44.56 平方厘米.

【分析】 扫过的区域如图中阴影所示，由两类图形组成：4 个长为 4 厘米、宽为 2 厘米的长方形，4 块半径为 2 厘米、圆心角为  $90^\circ$  的扇形（恰好拼成一个圆）. 所以扫过的面积是  $4 \times 2 \times 4 + \pi \times 2^2 = 44.56$ (平方厘米).



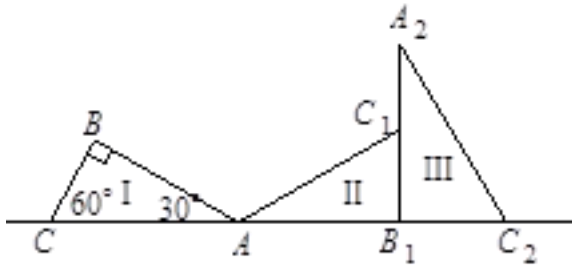
38. 如图所示，扇形  $AOB$  的圆心角是  $90^\circ$  度，半径是 2， $C$  是弧  $AB$  的中点. 求两个阴影部分的面积差. ( $\pi$  取 3.14)



【答案】 0

【分析】 两个阴影分别加上下部的空白部分可得到扇形和半圆，而扇形和半圆面积相等，所以，面积之差是 0.

39. 直角三角形  $ABC$  放在一条直线上，斜边  $AC$  长 20 厘米，直角边  $BC$  长 10 厘米. 如下图所示，三角形由位置 I 绕  $A$  点转动，到达位置 II，此时  $B, C$  点分别到达  $B_1, C_1$  点；再绕  $B_1$  点转动，到达位置 III，此时  $A, C_1$  点分别到达  $A_2, C_2$  点. 求  $C$  点经  $C_1$  到  $C_2$  走过的路径的长.

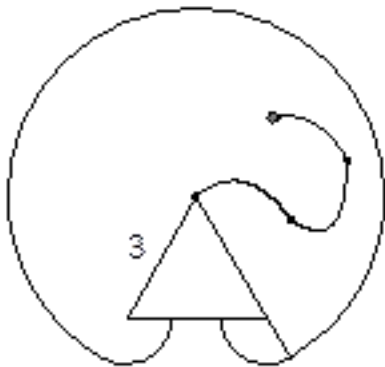


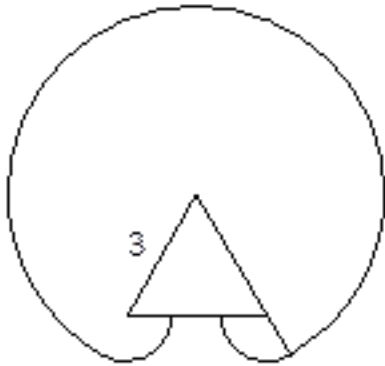
【答案】  $\frac{65}{3}\pi$  厘米.

【分析】 由于  $BC$  为  $AC$  的一半，所以  $\angle CAB = 30^\circ$ ，则弧  $CC_1$  为大圆周长的  $\frac{180^\circ - 30^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{12}$ ，弧  $C_1C_2$  为小圆周长的  $\frac{1}{4}$ ，而  $CC_1 + C_1C_2$  即为  $C$  点经  $C_1$  到  $C_2$  走过的路径的长为

$$2\pi \times 20 \times \frac{5}{12} + 2\pi \times 10 \times \frac{1}{4} = \frac{50}{3}\pi + 5\pi = \frac{65}{3}\pi(\text{厘米}).$$

40. 一只狗被拴在底座为边长 3m 的等边三角形建筑物的墙角上 (如图)，绳长是 4m，求狗所能到的地方的总面积. (圆周率按 3.14 计算)

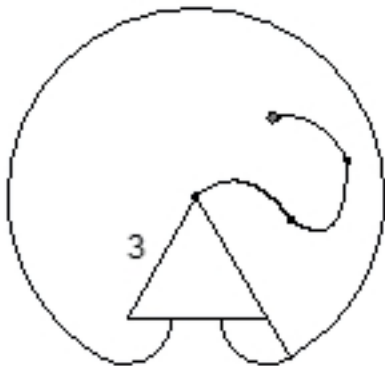




【答案】  $43.96\text{m}^2$

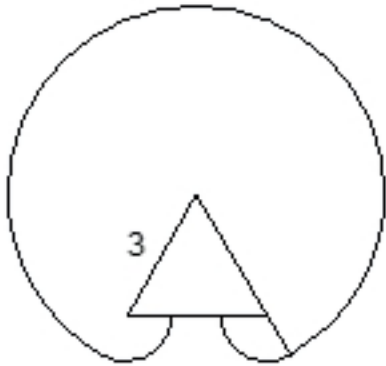
【分析】 如图所示，狗活动的范围是一个半径  $4\text{m}$ ，圆心角  $300^\circ$  的扇形与两个半径  $1\text{m}$ ，圆心角  $120^\circ$  的扇形之和。所以答案是  $43.96\text{m}^2$ 。

41. 一只狗被拴在底座为边长  $3\text{m}$  的等边三角形建筑物的墙角上（如图），绳长是  $4\text{m}$ ，求狗所能到的地方的总面积。（ $\pi$  取  $3.14$ ）



【答案】  $43.96\text{m}^2$ 。

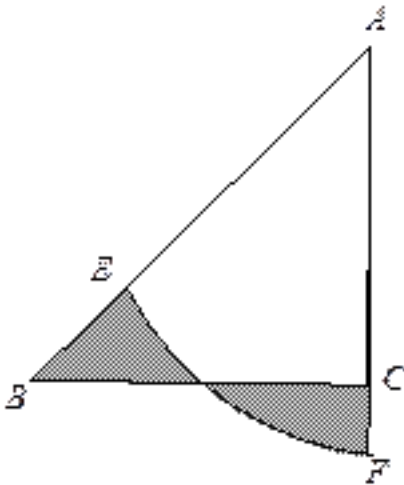
【分析】



如图所示，狗活动的范围是一个半径 4m，圆心角  $300^\circ$  的扇形与两个半径 1m，圆心角  $120^\circ$  的扇形之和。所以答案是

$$\frac{300}{360} \times \pi \times 4^2 + 2 \times \frac{120}{360} \times \pi \times 1^2 = 43.96(\text{m}^2).$$

42. 如图，等腰直角三角形  $ABC$  的腰为 10；以  $A$  为圆心， $EF$  为圆弧，组成扇形  $AEF$ ；两个阴影部分的面积相等。求扇形所在的圆面积。



【答案】 400

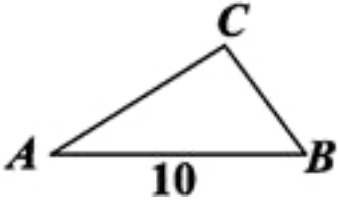
【分析】 题目已经明确告诉我们  $ABC$  是等腰直角三角形， $AEF$  是扇形，所以看似没有关系的两个阴影部分通过空白部分联系起来。等腰直角三角形的角  $A$  为  $45^\circ$ ，则扇形所在圆的面积为扇形面积的 8 倍。而扇形面积与等腰直角三角形面积相等，即

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$$

则圆的面积为

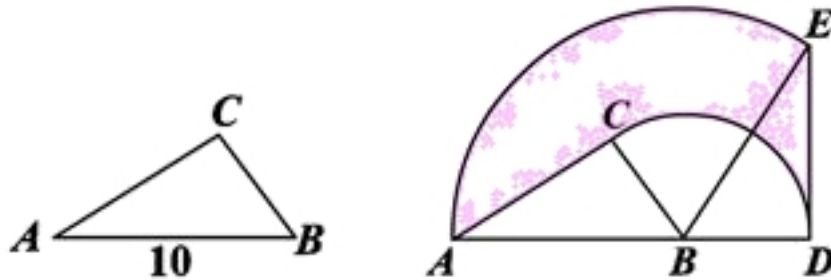
$$50 \times 8 = 400$$

43. 如图，直角  $\triangle ABC$  的斜边  $AB$  长为 10 厘米， $\angle ABC = 60^\circ$ 。此时  $BC$  长 5 厘米。以  $B$  为中心，将  $\triangle ABC$  顺时针旋转  $120^\circ$ ，点  $A$ 、 $C$  分别到达点  $E$ 、 $D$  的位置。求  $AC$  扫过图形的面积。（ $\pi$  取 3）



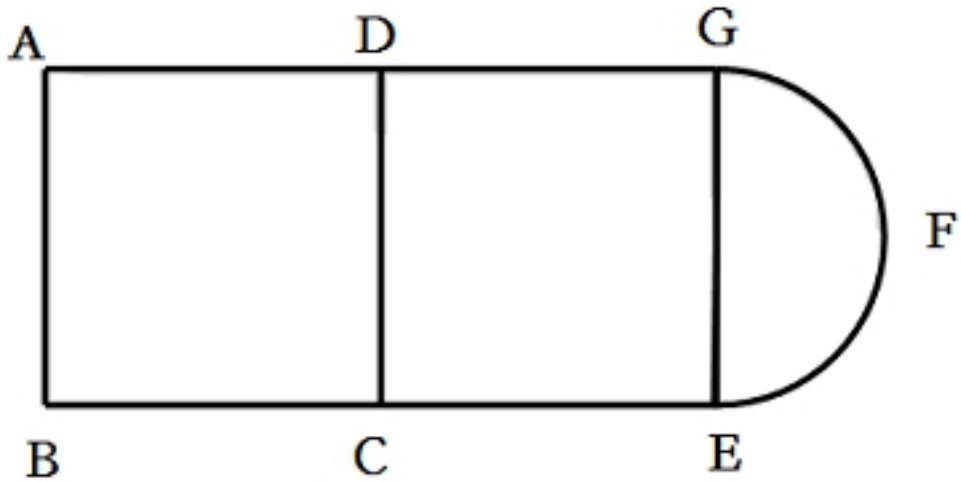
【答案】 75 平方厘米。

【分析】



$$\begin{aligned} \text{扇形的面积} &= \frac{1}{3}\pi(AB^2 - AC^2) \\ &= \frac{1}{3}\pi \times (100 - 25) \\ &= 75(\text{平方厘米}). \end{aligned}$$

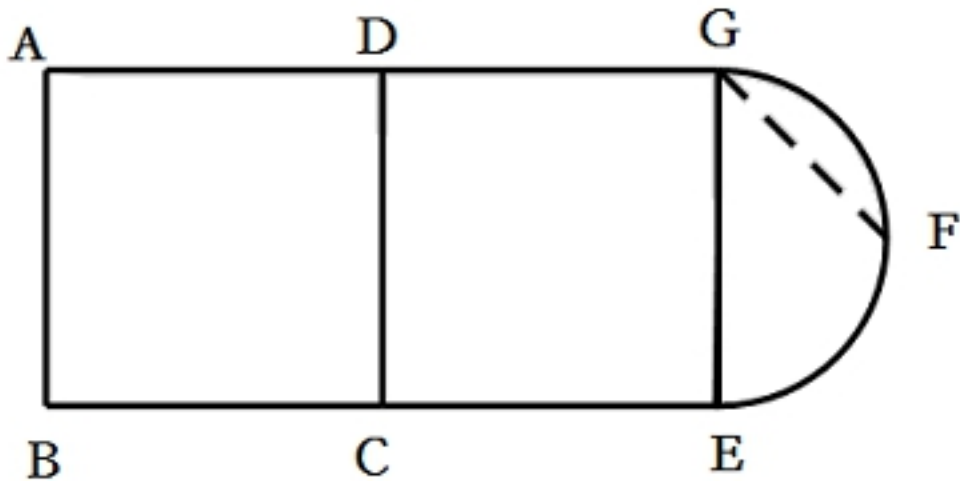
44. 下图中正方形  $ABCD$  及  $DCEG$  的面积均为 64 平方厘米， $EFG$  则为一半圆， $F$  是弧  $EFG$  的中点。请问阴影部分的面积为多少平方厘米？（取  $\pi = 3.14$ ）



【答案】 36.56

【分析】 如下图所示，正方形边长为 8 厘米，连接  $GF$ ，阴影部分面积 =  $S_{\triangle AGF} + 90^\circ$  弓形面积，所以阴影部分面积为

$$\frac{1}{2} \times 16 \times 4 + \frac{1}{4} \times 4^2 \times 3.14 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 36.56 (\text{平方厘米}).$$



45. 在下图中， $AC$  为圆  $O$  的直径，三角形  $ABC$  为等腰直角三角形，其中  $\angle C = 90^\circ$ 。以  $B$  为圆心， $BC$  为半径作弧  $CD$  交线段  $AB$  于  $D$  点。若  $AC = 10$  厘米，试求下图中阴影部分面积之和。（令  $\pi = 3$ ）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/298071032120007036>