

2024-2025 学年度高一上学期期中考试数学试卷

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(x-4) > f(2x-3)$ ，则实数 x 的取值范围是（ ）
- A. $(-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(-1, 4)$ D. $(-\infty, 1)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的解析式，分析函数的单调性，进而可将 $f(x-4) > f(2x-3)$ 转化为： $\begin{cases} x-4 < 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$ 或 $x-4 < 2x-3 \leq 0$ ，解得答案.

【详解】 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,

$\therefore$ 函数在 $(-\infty, 0]$ 上为减函数，在 $(0, +\infty)$ 上函数值保持不变，

若 $f(x-4) > f(2x-3)$,

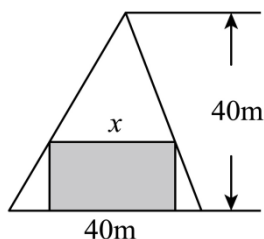
则 $\begin{cases} x-4 < 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$ 或 $x-4 < 2x-3 \leq 0$,

解得： $x \in (-1, 4)$,

故选：C.

【点睛】本题主要考查的知识点是分段函数的解析式、单调性，函数单调性的应用，难度中档.

2. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积最大的内接矩形花园（阴影部分），则其边长 x 应为（ ）



- A. 10 m B. 15 m C. 20 m D. 25 m

【答案】C

【解析】

【分析】设出矩形花园的宽为 y m, 根据相似得到方程, 求出 $y = 40 - x$, 从而表达出矩形花园的面积, 配方求出最大值, 并得到相应的 x .

【详解】设矩形花园的宽为 y m, 则 $\frac{x}{40} = \frac{40-y}{40}$, 即 $y = 40 - x$,

矩形花园的面积 $S = x(40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400$, 其中 $x \in (0, 40)$,

故当 $x = 20$ m 时, 面积最大.

故选: C

3. 若 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递增函数, 则下列四个命题中正确的有

- (1) 若 $f(x_0) > x_0$, 则 $f[f(x_0)] > x_0$;
- (2) 若 $f[f(x_0)] > x_0$, 则 $f(x_0) > x_0$;
- (3) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f[f(x)]$ 也是奇函数;
- (4) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x_1) + f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$.

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】A

【解析】

【分析】利用单调性判断①; 利用单调性与反证法判断②; 利用奇偶性的定义判断③; 利用奇偶性以及单调性判断④.

【详解】对于①, $\because f(x)$ 是定义在 R 上的单调递增函数, 若 $f(x_0) > x_0$,

则 $f[f(x_0)] > f(x_0) > x_0$, 故①正确;

对于②, 当 $f[f(x_0)] > x_0$ 时, 若 $f(x_0) \leq x_0$, 由 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递增函数得

$f[f(x_0)] \leq f(x_0) \leq x_0$ 与已知矛盾, 故②正确;

对于③, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$, $\therefore f[f(x)]$ 也是奇函数, 故③正确;

对于④, 当 $f(x)$ 是奇函数, 且是定义在 R 上的单调递增函数时,

若 $f(x_1) + f(x_2) = 0$,

则 $f(x_1) = -f(x_2) = f(-x_2) \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$,

若 $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(-x_2) = -f(x_2) \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) = 0$, 故④正确;

故选 A.

【点睛】本题通过对多个命题真假的判断, 综合考查函数的单调性、函数的奇偶性. 这种题型综合性较强, 也是高考的命题热点, 同学们往往因为某一处知识点掌握不好而导致“全盘皆输”, 因此做这类题目更要细心、多读题, 尽量挖掘出题目中的隐含条件, 另外, 要注意从简单的自己已经掌握的知识点入手, 然后集中精力突破较难的命题.

4. 已知实数 x, y 满足 $4x^2 + 4xy + y + 6 = 0$, 则 y 的取值范围是 ()

A. $\{y | -3 \leq y \leq 2\}$

B. $\{y | -2 \leq y \leq 3\}$

C. $\{y | y \leq -2\} \cup \{y | y \geq 3\}$

D. $\{y | y \leq -3\} \cup \{y | y \geq 2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用一元二次方程有解, 可得判别式大于等于零可求解.

【详解】由题意知, 关于 x 的一元二次方程有解, 则 $\Delta = 16y^2 - 16(y + 6) \geq 0$,
即 $y^2 - y - 6 \geq 0$, 解得 $y \leq -2$ 或 $y \geq 3$.

所以 y 的取值范围是 $\{y | y \leq -2\} \cup \{y | y \geq 3\}$.

故选: C.

5. 设 x, y 是两个实数, 命题“ x, y 中至少有一个数大于 1”的充分条件是 ()

A. $x + y = 2$

B. $x + y > 2$

C. $x^2 + y^2 > 2$

D. $xy > 1$

【答案】B

【解析】

【分析】用赋值法, 取不同的 x 与 y 代入, 可排除 A、C、D.

【详解】对于 A, 当 $x = 1, y = 1$ 时, 满足 $x + y = 2$, 但命题不成立;

对于 C, D, 当 $x = -2, y = -3$ 时, 满足 $x^2 + y^2 > 2$, $xy > 1$, 但命题不成立.

故选: B.

6. 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $a < -x^2 + 2x$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a \leq 1$

B. $a \leq 0$

C. $a < 0$

D. $a > 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据恒成立问题结合二次函数最值分析求解.

【详解】记 $f(x) = -x^2 + 2x, 0 \leq x \leq 2$, 则 $a < f(x)_{\min}, x \in [0, 2]$.

而 $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$,

当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = f(2) = 0$,

所以实数 a 的取值范围是 $a < 0$.

故选 C.

7. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, (x_1 \neq x_2)$, 设

$a = 3f\left(\frac{1}{3}\right), b = -\frac{5}{2}f\left(-\frac{2}{5}\right), c = f(1)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $a > b > c$

B. $c > a > b$

C. $c > b > a$

D. $b > c > a$

【答案】A

【解析】

【分析】确定数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $g(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶数, 变换得到

$a = g\left(-\frac{1}{3}\right), b = g\left(-\frac{2}{5}\right), c = g(-1)$, 根据单调性得到答案.

【详解】 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, (x_1 \neq x_2)$, 即 $\frac{\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1 - x_2} > 0, (x_1 \neq x_2)$,

故函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

故 $g(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶数,

$a = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right), b = -\frac{5}{2}f\left(-\frac{2}{5}\right) = g\left(-\frac{2}{5}\right), c = f(1) = g(1) = g(-1).$

$-\frac{1}{3} > -\frac{2}{5} > -1$, 故 $a > b > c$.

故选: A

8. 若定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足: ① $f(x)$ 为奇函数; ② 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 P . 已知函数 $f(x)$ 具有性质 P , 则

不等式 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-3, 2)$

C. $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$

D. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 由题意可以推出函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的奇偶性、单调性, 然后对 x 进行分类讨论解不等式即可.

【详解】因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,
 即对任意两个不相等的正实数 x_1, x_2 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 都有 $\frac{\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1 - x_2} < 0$,

所以有 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$,

所以函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数,

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 即有 $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 有 $f(-x) = -f(x)$,

所以有 $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$,

所以 $g(x)$ 为偶函数,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

当 $x-2 > 0$, 即 $x > 2$ 时, 有 $x^2-4 > 0$, 由 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$, 得 $\frac{f(x-2)}{x-2} < \frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$,

所以 $x-2 > x^2-4$ ，解得 $x < -2$ ，此时无解；

当 $x-2 < 0$ ，即 $x < 2$ 时，由 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ ，得 $\frac{f(x-2)}{x-2} > \frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$ ，

所以 $|x-2| < |x^2-4|$ ，解得 $x < -3$ 或 $-1 < x < 2$ 。

综上所述，不等式 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ 的解集为 $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$ 。

故选：C。

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是由已知条件去构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，并结合已知导出其函数性质，从而分类讨论解不等式即可。

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。）

9. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，对于任一给定的正数 p ，定义函数 $f_p(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq p \\ p, & f(x) > p \end{cases}$ ，则称函数 $f_p(x)$ 为 $f(x)$ 的“ p 界函数”。若给定函数 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ， $p = 2$ ，则下列结论正确的是（
）

A. $f_p(f(0)) = f(f_p(0))$

B. $f_p(f(1)) = f(f_p(1))$

C. $f(f(2)) = f_p(f_p(2))$

D. $f(f(3)) = f_p(f_p(3))$

【答案】ACD

【解析】

【分析】结合“ p 界函数”的定义可确定函数解析式，再结合分段函数性质可得函数值，进而判断各选项。

【详解】因为 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ， $p = 2$ ，

令 $x^2 - 2x - 1 \leq 2$ ，即 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ，解得 $-1 \leq x \leq 3$ ，

则 $f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & -1 \leq x \leq 3 \\ 2, & x < -1 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$ ，

A 选项： $f_p(f(0)) = f_2(-1) = 2$ ， $f(f_p(0)) = f(-1) = 2$ ，即 $f_p(f(0)) = f(f_p(0))$ ，A 选项正确；

B 选项： $f_p(f(1)) = f_2(-2) = 2$ ， $f(f_p(1)) = f(-2) = 7$ ，即 $f_p(f(1)) \neq f(f_p(1))$ ，B 选项错误；

C 选项: $f(f(2))=f(-1)=2$, $f_p(f_p(2))=f_2(f_2(2))=f_2(-1)=2$ 即 $f(f(2))=f_p(f_p(2))$, C

选项正确;

D 选项: $f(f(3))=f(2)=-1$, $f_p(f_p(3))=f_2(f_2(3))=f_2(2)=-1$, 即 $f(f(3))=f_p(f_p(3))$,

D 选项正确;

故选: ACD.

10. 以数学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯的名字命名的“高斯函数”为 $y=[x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[3.2]=3$, $[-1.5]=-2$, 则 ()

A. $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x]-[x-1]=1$

B. 不等式 $[x]^2-[x] \leq 2$ 的解集为 $\{x|-1 \leq x < 3\}$

C. 当 $|x| \geq 1$, $[x]+\frac{3}{[x]}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

D. 方程 $x^2=4[x]+3$ 的解集为 $\{\sqrt{15}\}$

【答案】AB

【解析】

【分析】设 x 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $[x]=a$, 则 $[x-1]=a-1$ 得到 A 正确, 解不等式得到 $-1 \leq [x] \leq 2$, 计算 B 正确, 均值不等式等号条件不成立, C 错误, 举反例得到 D 错误, 得到答案.

【详解】对选项 A: 设 x 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $[x]=a$,

$x-1$ 的整数部分为 $a-1$, $[x-1]=a-1$, 故 $[x]-[x-1]=1$, 正确;

对选项 B: $[x]^2-[x] \leq 2$, 则 $-1 \leq [x] \leq 2$, 故 $-1 \leq x < 3$, 正确;

对选项 C: $[x]+\frac{3}{[x]} \geq 2\sqrt{[x] \cdot \frac{3}{[x]}}=2\sqrt{3}$,

当且仅当 $[x]=\frac{3}{[x]}$, 即 $[x]=\sqrt{3}$ 时成立, $[x]=\sqrt{3}$ 不成立, 故等号不成立, 错误;

对选项 D: 取 $x=\sqrt{19}$, 则 $[x]=4$, 代入验证成立, 错误;

故选: AB

11. 若存在常数 k 和 b 使得函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别对其定义域上的任意实数 x 都满足: $F(x) \geq kx+b$ 和

$G(x) \leq kx + b$ 恒成立，则称此直线 $y = kx + b$ 为 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的“隔离直线”，已知函数

$f(x) = 2x^2 - 3x (x \in \mathbb{R})$, $g(x) = \frac{1}{x} (x < 0)$ ，若使直线 $y = -4x + b$ 为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间的隔离直线，则实数 b 的取值可以为 ()

A. 0

B. -1

C. -3

D. -5

【答案】BC

【解析】

【分析】根据题意得到 $2x^2 - 3x \geq -4x + b$ ，计算 $\Delta = 1 + 8b \leq 0$ 得到一个范围，再根据双勾函数的单调性

得到函数 $K(x) = \frac{1}{x} + 4x$ 的最大值，综合得到答案.

【详解】 $2x^2 - 3x \geq -4x + b$ ，即 $2x^2 + x - b \geq 0$ 恒成立，故 $\Delta = 1 + 8b \leq 0$ ，解得 $b \leq -\frac{1}{8}$ ；

$\frac{1}{x} \leq -4x + b$ ，即 $\frac{1}{x} + 4x \leq b$ ，

函数 $K(x) = \frac{1}{x} + 4x$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $[-\frac{1}{2}, 0)$ 上单调递减，

故 $K(x)_{\max} = K(-\frac{1}{2}) = -4$ ，故 $b \geq -4$.

综上所述： $b \in [-4, -\frac{1}{8}]$.

故选：BC.

(2023·浙江省余姚中学期中)

12. 已知 $x, y > 0, x + 2y + xy - 6 = 0$ ，则 ()

A. xy 的最大值为 $\sqrt{2}$

B. $x + 2y$ 的最小值为 4

C. $x + y$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 3$

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2$ 的最小值为 16

【答案】BCD

【解析】

【分析】A 选项，对不等式变形为 $x+2y=6-xy$ ，利用基本不等式得到 $6-xy \geq 2\sqrt{2xy}$ ，求出 xy 的最

大值；B 选项，将不等式变形为 $xy=6-(x+2y)$ ，利用基本不等式得到 $6-(x+2y) \leq \frac{(x+2y)^2}{8}$ ，求出

$x+2y$ 的最小值；C 选项，对不等式变形为 $y(1+x)=6-(x+y)$ ，利用 $y(1+x) \leq \frac{(y+x+1)^2}{4}$ 求解

$x+y$ 的最小值；D 选项，不等式变形为 $(x+2)(y+1)=8$ ，利用基本不等式求出和的最小值.

【详解】由 $x+2y+xy-6=0$ 得： $x+2y=6-xy$ ，

因为 $x, y > 0$ ，所以 $x+2y=6-xy > 0$ ，所以 $0 < xy < 6$ ，

由基本不等式可得： $x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$

当且仅当 $x=2y$ 时，等号成立，此时 $6-xy \geq 2\sqrt{2xy}$ ，

解得： $xy \geq 18$ 或 $xy \leq 2$ ，

因为 $xy < 6$ ，所以 $xy \geq 18$ 舍去，故 xy 的最大值为 2，A 错误；

由 $x+2y+xy-6=0$ 得： $xy=6-(x+2y)$ ，

因为 $x, y > 0$ ，所以 $6-(x+2y) > 0$ ，所以 $0 < x+2y < 6$ ，

由基本不等式可得： $2xy \leq \frac{(x+2y)^2}{4}$ ，当且仅当 $x=2y$ 时等号成立，

即 $6-(x+2y) \leq \frac{(x+2y)^2}{8}$ ，解得： $x+2y \geq 4$ 或 $x+2y \leq -12$ ，

因为 $0 < x+2y < 6$ ，所以 $x+2y \leq -12$ 舍去，

故 $x+2y$ 的最小值为 4，B 正确；

由 $x+2y+xy-6=0$ 变形为 $x+y+y(1+x)=6$ ，则 $y(1+x)=6-(x+y)$ ，

由基本不等式得： $y(1+x) \leq \frac{(y+x+1)^2}{4}$ ，当且仅当 $y=1+x$ 时等号成立，

此时 $6-(x+y) \leq \frac{(y+x+1)^2}{4}$ ，令 $x+y=t (t > 0)$ ，则由 $6-t \leq \frac{(t+1)^2}{4}$ ，

解得： $t \geq 4\sqrt{2}-3$ 或 $t \leq -4\sqrt{2}-3$ (舍去)

所以 $x+y$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-3$, C 正确;

由 $x+2y+xy-6=0$ 可得: $(x+2)(y+1)=8$,

从而 $(x+2)^2+(y+1)^2 \geq 2(x+2)(y+1)=2 \times 8=16$

当且仅当 $x+2=y+1$ 时, 即 $x=2\sqrt{2}-2$, $y=2\sqrt{2}-1$ 等号成立,

故 $(x+2)^2+(y+1)^2$ 最小值为 16.

故选: BCD,

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知实数 $a > 0$, $b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 利用 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 可得 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1} = 3b + 2a - 5$, 根据

$3b + 2a = (3b + 2a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 5 + \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b}$ 和基本不等式求出 $3b + 2a$ 的最小值, 从而可得解.

【详解】 根据题意得到 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 变形为 $ab = a + b \Rightarrow (a-1)(b-1) = 1$,

则 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1} = \frac{3b+2a-5}{(a-1)(b-1)} = 3b + 2a - 5$,

因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 故得到 $3b + 2a = (3b + 2a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 5 + \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{6}$,

当且仅当 $\frac{3b}{a} = \frac{2a}{b}$ 时等号成立.

故 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1} \geq 2\sqrt{6}$.

故答案为: $2\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了利用基本不等式求最值, 属于基础题

14. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-2)x^2 - 2ax + a+1 = 0$ 没有实数解, 则不等式 $ax+3 > 0$ 的解集

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/305030004022011343>