# 专题　圆

# 知识结构

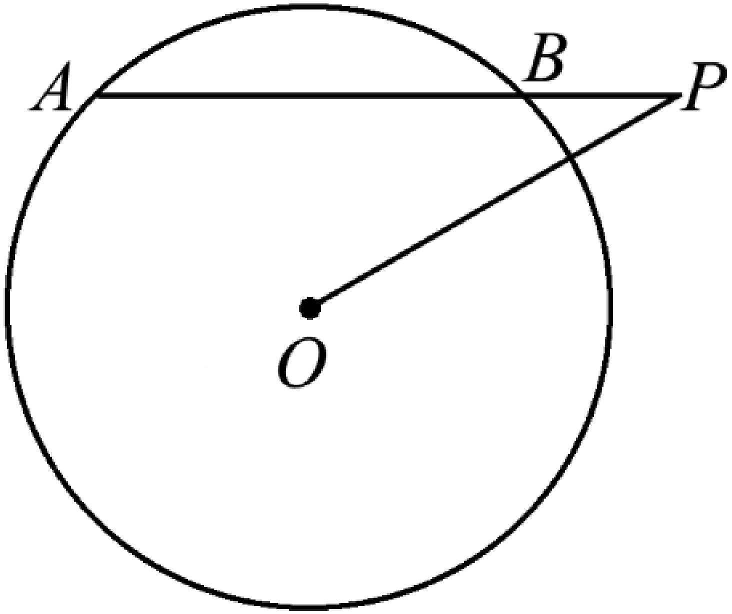
- 圆
  - 圆的基本性质
    - 概念
    - 圆心角、弧、弦之间的关系
    - 圆周角的概念及性质、定理及推论
  - 与圆有关的位置关系
    - 点和圆的位置关系
      - 点在圆上
      - 点在圆外
      - 点在圆内
    - 直线和圆的位置关系
      - 相离
      - 相切
      - 相交
  - 和圆有关的计算
    - 正多边形与圆
    - 弧长和扇形的面积
    - 求阴影部分的面积

**【专题分析】**圆在中考中的常见考点有圆的性质及定理，圆周角定理及其推论，圆心角、圆周角、弧、弦之间的“等推”关系；切线的判定，切线的性质，切线长定理，弧长及扇形面积的计算，求阴影部分的面积等．对圆的考查在中考中以客观题为主，考查题型多样，关于圆的基本性质一般以选择题或填空题的形式进行考查，切线的判定等综合性强的问题一般以解答题的形式进行考查；圆在中考中的比重约为10%～15%．

**【解题方法】**解决圆的有关问题常用的数学思想就是转化思想，方程思想和数形结合思想；常用的数学方法有分类讨论法，设参数法等.

# 典 例 精 选

例1 如图，⊙$O$ 的半径是 3，点 $P$ 是弦 $AB$ 延长线上的一点，连结 $OP$，若 $OP=4$，$\angle APO=30°$，则弦 $AB$ 的长为(　　)

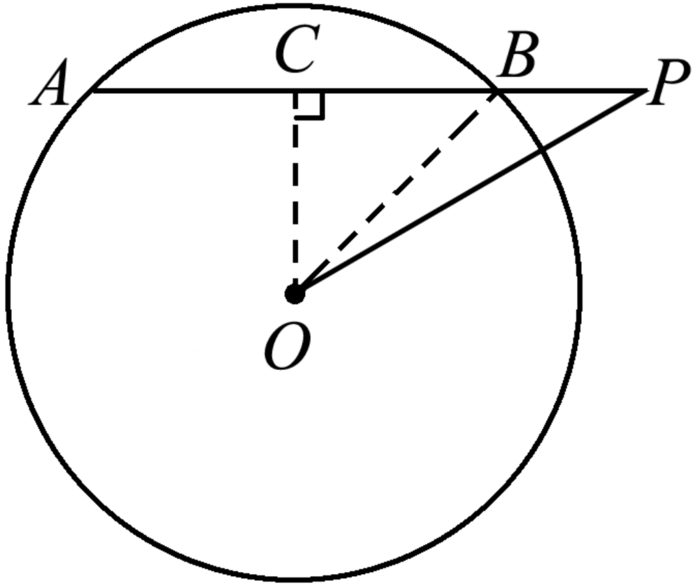



A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{13}$　　D. $\sqrt{13}$

**【思路点拨】**先过点$O$作$OC\perp AP$，连结$OB$，根据$OP=4$，$\angle APO=30°$，求出$OC$的值，在$\mathrm{Rt}\triangle BCO$中，根据勾股定理求出$BC$的值，进而得出$AB$的值.

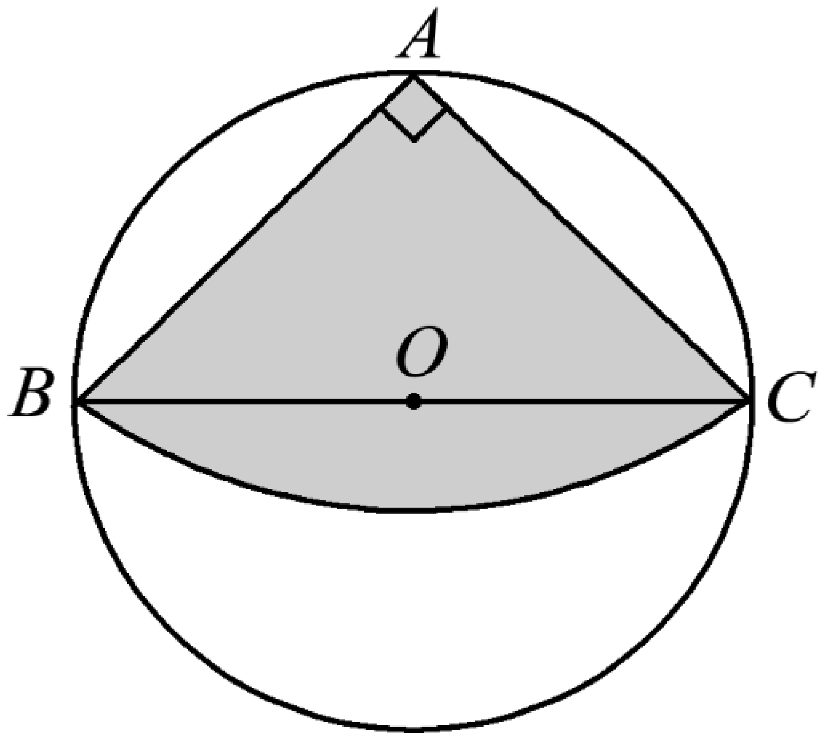
**【解析】**如图，过点 $O$ 作 $OC\perp AP$ 于点 $C$，连结 $OB$，$\because OP=4$，$\angle APO=30°$，$\therefore OC=4\times\sin 30°=2$.$\because OB=3$，$\therefore BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，$\therefore AB=2\sqrt{5}$.故选 A.



**规律方法：**

利用垂径定理进行证明或计算，通常是在半径、圆心距和弦的一半所组成的直角三角形中，利用勾股定理构建方程求出未知线段的长.

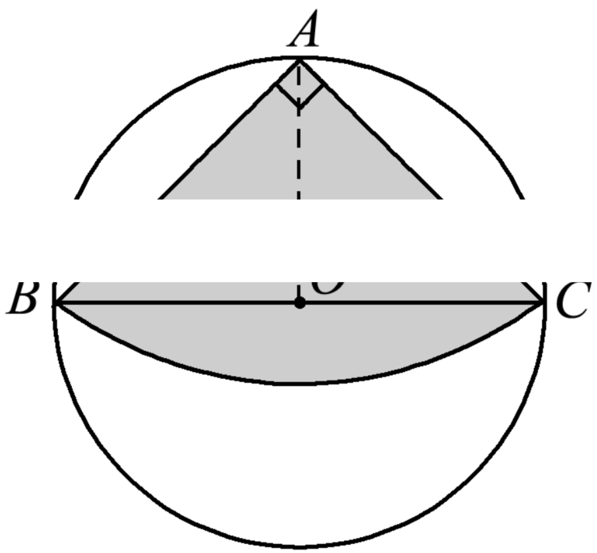
例2 (2015·盘锦)如图，从一块直径是 8 m 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90°的扇形，将剪下的扇形围成一个圆锥，圆锥的高是(　　)




A. $4\sqrt{2}$ m　　B. 5 m　　C. $\sqrt{30}$ m　　D. $2\sqrt{15}$ m

【思路点拨】首先连结$AO$，求出$AB$，然后求出扇形的弧长$\overset{\frown}{BC}$，进而求出扇形围成的圆锥的底面半径，最后应用勾股定理求出圆锥的高即可.

【解析】如图，连结$AO$，



∵$AB=AC$，点 $O$ 是 $BC$ 的中点，∴$AO\perp BC$.

又∵$\angle BAC=90°$，∴$\angle ABO=\angle ACO=45°$，

∴$AB=\sqrt{2}OB=\sqrt{2}\times(8\div2)=4\sqrt{2}(\mathrm{m})$.

∴$l_{\overset{\frown}{BC}}=\dfrac{90\pi\times4\sqrt{2}}{180}=2\sqrt{2}\pi(\mathrm{m})$.

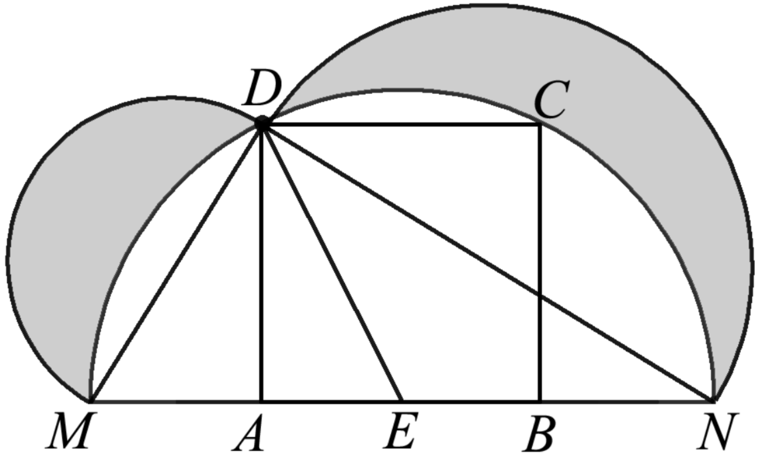
∴将剪下的扇形围成的圆锥形的半径是 $2\sqrt{2}\pi\div2\pi=\sqrt{2}(\mathrm{m})$.

∴圆锥的高是$\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{30}(\mathrm{m})$．故选 C.

**规律方法：**

解决圆锥的相关问题，可以利用圆的周长等于扇形的弧长建立方程，利用方程解决问题.

例3 (2015·梧州)如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $AB$ 的中点，以 $E$ 为圆心、$ED$ 为半径作半圆，交 $A$，$B$ 所在的直线于 $M$，$N$ 两点，分别以 $MD$，$ND$ 为直径作半圆，则阴影部分的面积为(　　)




A．$9\sqrt{5}$　　B．$18\sqrt{5}$　　C．$36\sqrt{5}$　　D．$72\sqrt{5}$

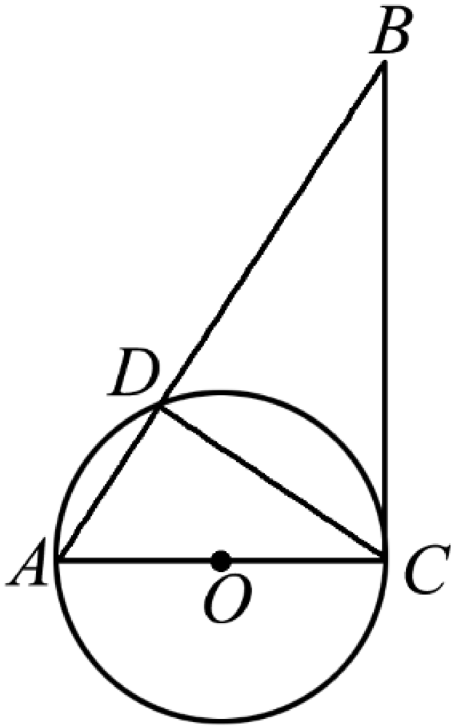
**【思路点拨】**根据图形可知阴影部分的面积＝两个小的半圆的面积＋$\triangle DMN$的面积－大半圆的面积，$MN$为半圆的直径，从而可知$\angle MDN=90°$，在$\mathrm{Rt}\triangle MDN$中，由勾股定理可知$MN^2=MD^2+DN^2$，从而可得到两个小半圆的面积＝大半圆的面积，故此阴影部分的面积＝$\triangle DMN$的面积，在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中，$ED=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，所以$MN=6\sqrt{5}$，然后利用三角形的面积公式求解即可.

**【解析】**根据图形可知阴影部分的面积＝两个小的半圆的面积＋$\triangle DMN$的面积－大半圆的面积. $\because MN$为大半圆的直径，$\therefore \angle MDN=90°$.在 $Rt\triangle MDN$ 中，$MN^2=MD^2+DN^2$，$\therefore$两个小半圆的面积和＝大半圆的面积．$\therefore$阴影部分的面积＝$\triangle DMN$ 的面积．在 $Rt\triangle AED$ 中，$ED=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$, $\therefore$阴影部分的面积＝$\triangle DMN$的面积$=\frac{1}{2}MN\cdot AD=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}\times 6=18\sqrt{5}$.故选 B.

**规律方法：**

求阴影部分的面积，一般是将所求阴影部分进行分割组合，转化为规则图形的和或差.

例4 如图，在 Rt△$ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 $AC$ 为直径作⊙$O$ 交 $AB$ 于点 $D$，连结 $CD$.




(1)求证：$\angle A=\angle BCD$.

(2)若 $M$ 为线段 $BC$ 上一点，试问当点 $M$ 在什么位置时，直线 $DM$ 与⊙$O$ 相切？并说明理由.

**【思路点拨】**(1)根据圆周角定理可得$\angle ADC=90°$，根据直角三角形的性质可得$\angle A+\angle ACD=90°$，再由$\angle DCB+\angle ACD=90°$，可得$\angle A=\angle BCD$；(2)当点$M$是$BC$的中点时，直线$DM$与$\odot O$相切．连结$DO$，证明$\angle ODM=90°$，进而证得直线$DM$与$\odot O$相切．

【自主解答】

(1)证明：$\because AC$ 为直径，

$\therefore \angle ADC=90^\circ$，$\therefore \angle A+\angle ACD=90^\circ$.

$\because \angle ACB=90^\circ$，$\therefore \angle BCD+\angle ACD=90^\circ$，

$\therefore \angle A=\angle BCD$.

(2)**解**：当点 $M$ 是 $BC$ 的中点时，直线 $DM$ 与⊙$O$ 相切．理由如下：如图，连结 $DO$，

∵$DO=CO$，∴$\angle 1=\angle 2$.

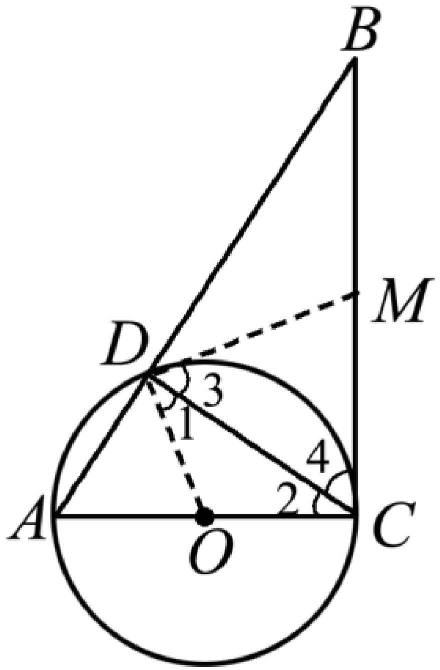
∵$\angle BDC=90°$，点 $M$ 是 $BC$ 的中点，

∴$DM=CM$，∴$\angle 4=\angle 3$.

∵$\angle 2+\angle 4=90°$，

∴$\angle 1+\angle 3=90°$，

∴直线 $DM$ 与⊙$O$ 相切.



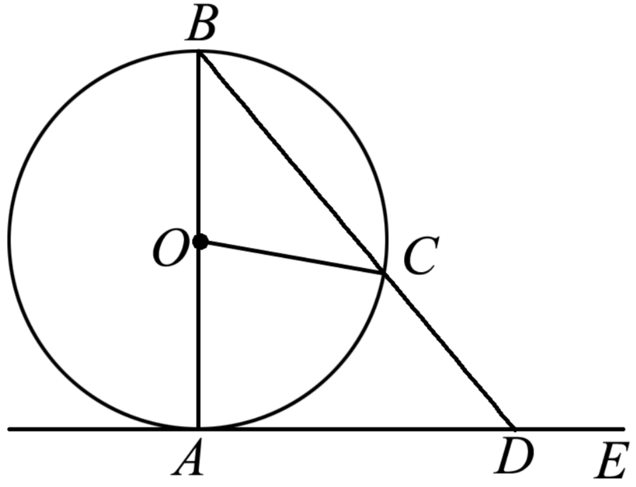
**规律方法：**

在判定一条直线是圆的切线时，如果这条直线和圆有公共点，常作出经过公共点的半径，证明这条直线与经过公共点的半径垂直，概括为“连半径，证垂直，得切线”.

# 能力评估检测

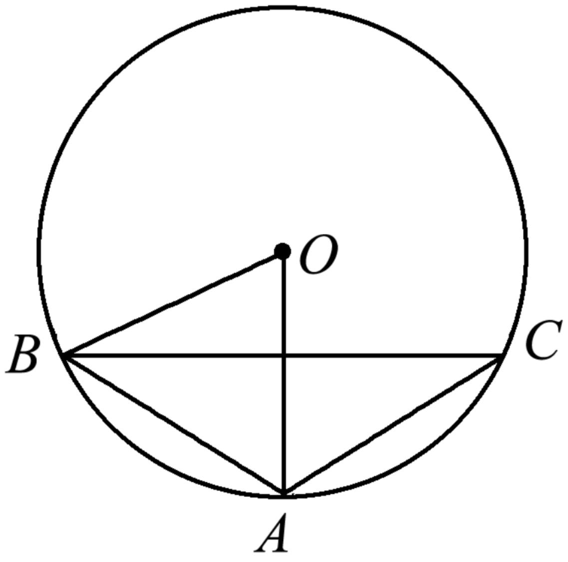
## 一、选择题

1．(2015·重庆)如图，$AB$ 是⊙$O$ 的直径，点 $C$ 在⊙$O$ 上，$AE$ 是⊙$O$ 的切线，$A$ 为切点，连结 $BC$ 并延长交 $AE$ 于点 $D$.若$\angle AOC$＝80°，则$\angle ADB$ 的度数为(　B　)




A．40°　　B．50°　　C．60°　　D．20°

2．如图，⊙$O$是△$ABC$的外接圆，$\angle AOB=60°$，$AB=AC=2$，则弦$BC$的长为( C )




A. $\sqrt{3}$　　B．3　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4