专题 02 函数及其应用、指对幂函数

易错点一：对函数定义域、值域及解析式理解存在偏差（定义域、值域及解析式的求算）

解题模板

已知函数的具体解析式求定义域的方法

法 1：若 $f(x)$ 是由一些基本初等函数通过四则运算构成的，则它的定义域为各基本初等函数的定义域的交集.

法 2：复合函数的定义域：先由外层函数的定义域确定内层函数的值域，从而确定对应的内层函数自变量的取值范围，还需要确定内层函数的定义域，两者取交集即可.

函数解析式的常见求法

法 1：配凑法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题，往往把右边的 $g(x)$ 整理或配凑成只含 $h(x)$ 的式子，然后用 x 将 $h(x)$ 代换.

法 2：待定系数法：已知函数的类型(如一次函数、二次函数)可用待定系数法，比如二次函数 $f(x)$ 可设为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，其中 a,b,c 是待定系数，根据题设条件，列出方程组，解出 a,b,c 即可.

法 3：换元法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 时，往往可设 $h(x)=t$，从中解出 x，代入 $g(x)$ 进行换元.应用换元法时要注意新元的取值范围.

法 4：解方程组法：已知 $f(x)$ 满足某个等式，这个等式除 $f(x)$是未知量外，还有其他未知量，如 $f\left(\frac{1}{x}\right)$(或 $f(-x)$)等，可根据已知等式再构造其他等式组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$.

分段函数

第一步：求分段函数的函数值时，要先确定要求值的自变量属于哪一区间，然后代入该区间对应的解析式求值.

第二步：当出现 $f\left(f\left(a\right)\right)$ 的形式时，应从内到外依次求值.

第三步：当自变量的值所在区间不确定时，要分类讨论，分类标准应参照分段函数不同段的端点。

结论：复合函数：

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u,y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作 $y=f(g(x))$，其中 $y=f(u)$ 叫做复合函数 $y=f(g(x))$ 的外层函数， $u=g(x)$ 叫做 $y=f(g(x))$ 的内层函数.

抽象函数的定义域的求法：

(1)若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，则复合函数 $f(g(x))$ 的家义域由 $a\bullet g(x)\bullet b$ 求出.

(2)若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a,b]$，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 时的值域.

易错提醒：函数的概念

①一般地，给定非空数集 A， B，按照某个对应法则 f，使得 A 中任意元素 x，都有 B 中唯一确定的 y 与之对应，那么从集合 A 到集合 B 的这个对应，叫做从集合 A 到集合 B 的一个函数.记作： $x\to y=f(x)$， $x\in A$.集合 A 叫做函数的定义域，记为 D，集合 $\{y|y=f(x),x\in A\}$ 叫做值域，记为 C.

②函数的实质是从一个非空集合到另一个非空集合的映射.

③函数表示法：函数书写方式为 $y=f(x)$， $x\in D$

④函数三要素：定义域、值域、对应法则.

⑤同一函数：两个函数只有在定义域和对应法则都相等时，两个函数才相同.

基本的函数定义域限制

求解函数的定义域应注意：

①分式的分母不为零；

②偶次方根的被开方数大于或等于零：

③对数的真数大于零，底数大于零且不等于 1；

④零次幂或负指数次幂的底数不为零；

⑤三角函数中的正切 $y=\tan x$ 的定义域是 $\left\{x\middle|x\in R,且\ x\neq kx+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$；

⑥已知 $f(x)$ 的定义域求解 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域，或已知 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域，遵循两点：①定义域是指自变量的取值范围；②在同一对应法则∫下，括号内式子的范围相同；

⑦对于实际问题中函数的定义域，还需根据实际意义再限制，从而得到实际问题函数的定义域.

基本初等函数的值域

① $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的值域是 R.

② $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值域是：当 $a>0$ 时，值域为 $\{y|y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$；当 $a<0$ 时，值域为 $\{y|y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$.

③ $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的值域是 $\{y|y\neq 0\}$.

④ $y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 $(0，+\infty)$.

⑤ $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 R.

分段函数的应用

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，即分段函数问题，分段解决.

举一反三

例．函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$(-\infty,3]$　　B．$(1,+\infty)$

C．$(1,3]$　　D．$(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$

变式 1：设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\2(x-1),x\geq 1\end{cases}$，若 $f(m)=f(m+1)$，则 $f\left(\dfrac{2}{m}\right)=$（　）

A．14　　B．16　　C．2　　D．6

变式 2：已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{-|x|+2}\right\},B=\left\{y\middle|y=x^2-2x+2\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$[-2,2]$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$[1,2]$　　D．$[0,2]$

变式 3： 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, x\geq 1\\ f(x+1), x<1\end{cases}$，则下列正确的是（　）

A．$f(f(0))=\frac{1}{2}$　B．$f(f(1))=\frac{\sqrt{2}}{4}$　C．$f(f(\log_2 3))=\frac{\sqrt{2}}{2}$　D．$f(x)$ 的值域为 $(0,1]$

易错题通关

1．已知函数 $f(x)=\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$，则 $f[f(3)]=$（　）

A．$\ln 3$　B．3　C．e^{3}　D．$e^{3}\ln 3$

2．给出下列4个函数，其中对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立的是（　）

A．$f(\sin 3x)=\sin x$　B．$f(\sin 3x)=x^{3}+x^{2}+x$

C．$f(x^{2}+2)=|x+2|$　D．$f(x^{2}+4x)=|x+2|$

3．已知函数 $f(1-x)=\frac{1-x^{2}}{x^{2}}(x\neq 0)$，则 $f(x)=$（　）

A．$\frac{1}{(x-1)^{2}}-1(x\neq 0)$　B．$\frac{1}{(x-1)^{2}}-1(x\neq 1)$

C．$\frac{4}{(x-1)^{2}}-1(x\neq 0)$　D．$\frac{4}{(x-1)^{2}}-1(x\neq 1)$

4．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2x)=f(x+1)$，则 $f(x)$ 可能是（　）．

A．$f(x)=x$　B．$f(x)=\log_2 x$

C．$f(x)=2^{x}$　D．$f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q}\\ 0, x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$

5．设集合 $A=\{x\,|\,4x^{2}-13x<0\}$，$B=\{y\,|\,y=\sqrt{x-2}+3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(0,2]$　B．$(0,3]$　C．$\left[2,\frac{13}{4}\right)$　D．$\left[3,\frac{13}{4}\right)$

6．集合 $P=\{x\,\|x|<2\}$，$Q=\{y\,|\,y=\sqrt{x^{2}}+1\}$，则 $P\cap Q=$（　）

A．$\{1,2\}$　B．$\{x|1\leq x<2\}$

C．$\{x|1<x<2\}$　D．$\{x|1\leq x\leq 2\}$

易错点二：忽视单调性与单调区间的主次（函数的单调性与最值）

解题模板

1.函数的单调性是对函数定义内的某个区间而言的。

2.函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性是函数在该区间上的整体性质。

3.函数的单调定义中的 x_1 、 x_2 有三个特征：（1）任意性（2）有大小（3）属于同一个单调区间。

4.求函数的单调区间必须先求定义域。

5.判断函数单调性常用以下几种方法：

方法 1： 定义法：一般步骤为设元 $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 判断符号→得出结论.

方法 2： 图象法：如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，则可由图象的上升或下降确定单调性.

方法 3： 导数法：先求导数，利用导数值的正负确定函数的单调区间.

方法 4： 性质法：（1）对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各初等函数的增减性及 $f(x) \pm g(x)$ 增减性质进行判断；

6.求函数最值（值域）的常用方法

方法 1： 单调性法：先确定函数的单调性，再由单调性求最值.

方法 2： 图象法：先作出函数的图象，再观察其最高点、最低点，求出最值.

方法 3： 基本不等式法：先对解析式变形，使之具备“一正二定三相等”的条件后用基本不等式求出最值.

方法 4： 导数法：先求导，然后求出在给定区间上的极值，最后结合端点值，求出最值.

结论：

1.单调性技巧

（1）证明函数单调性的步骤

①**取值：** 设 x_1 ， x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量，且 $x_1 < x_2$ ；

②**变形：** 作差变形（变形方法：因式分解、配方、有理化等）或作商变形；

③**定号：** 判断差的正负或商与1的大小关系；

④**得出结论.**

（2）函数单调性的判断方法

①定义法：根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断.

②图象法：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

③直接法：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

（3）记住几条常用的结论：

结论 1：若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

结论 2：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增（或减）函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增（或减）函数；

结论 3：若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；

结论 4：若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数.

易错提醒：1.函数的单调性

（1）单 调 函 数 的 定 义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，区间 $D\subseteq A$：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1， x_2 当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，符号一致那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1， x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，符号相反那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

①属于定义域 A 内某个区间上；

②任意两个自变量 x_1， x_2 且 $x_1<x_2$；

③都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$；

④图象特征：在单调区间上增函数的图象上坡路，减函数的图象下坡路.

（2）单调性与单调区间

①单调区间的定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性， D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

②函数的单调性是函数在某个区间上的性质.

（3）复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“同增异减”，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减（增）函数，复合函数是减函数.

2．函数的最值

前提：一般地，设函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足

条件：（1）对于任意的 $x\in I$ ，都有 $f\left(x\right)\le M$ ；（2）存在 $x_0\in I$ ，使得 $f\left(x_0\right)=M$ 结论 M 为最大值

（1）对于任意的 $x\in I$ ，都有 $f\left(x\right)\ge M$ ；（2）存在 $x_0\in I$ ，使得 $f\left(x_0\right)=M$ 结论 M 为最小值

举一反三

例．若函数 $f\left(x\right)=a^{x^2-ax+1}\left(a>0且a\ne1\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A．$\left(0,1\right)$　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C．$\left(1,2\right]$　　D．$\left[2,+\infty\right)$

变式 1．下列函数中，满足“对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得 $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$ ”成立的是（　）

A．$f(x)=-x^2-2x+1$　　B．$f(x)=x-\frac{1}{x}$　　C．$f(x)=x+1$　　D．$f(x)=\log_2(2x)+1$

变式 2．若定义在 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 同时满足：① $f\left(x\right)$ 为奇函数；②对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x_1\ne x_2$，都有 $\frac{x_2f\left(x_1\right)-x_1f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$，则称函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P．已知函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P，则不等式 $f\left(x-2\right)<\frac{f\left(x^2-4\right)}{x+2}$ 的解集为（　）

A．$\left(-\infty,-1\right)$　　B．$\left(-3,2\right)$

C．$\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-1,2\right)$　　D．$\left(-\infty,-3\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

变式 3．定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：对 $\forall x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x_1\ne x_2$ 都有 $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>1$，则不等式 $f\left(2\log_2x\right)-f\left(x\right)>\log_2x^2-x$ 的解集为（　）

A．$\left(1,2\right)$　　B．$\left(2,4\right)$　　C．$\left(4,8\right)$　　D．$\left(8,16\right)$

易错题通关

1．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}-2^{-x}-\sin x}{2}$，若对于一切的实数$x$，不等式$f\left(2kx^{2}\right)<f\left(\dfrac{3}{8}-kx\right)$恒成立，则$k$的取值范围为（　）

A．$\left[-2,0\right)$　　B．$\left(-2,0\right)$　　C．$\left[-3,0\right]$　　D．$\left(-3,0\right]$

2．已知函数$f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，且对任意的$0<m<n$，都有$\dfrac{f\left(m\right)-f\left(n\right)}{m-n}<0$，且$f\left(4\right)=0$，则不等式$\dfrac{f\left(-x-2\right)-f\left(x+2\right)}{x}>0$的解集为（　）

A．$\left(-6,0\right)$　　B．$\left(-\infty,-6\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

C．$\left(-\infty,-6\right)\cup\left(0,2\right)$　　D．$\left(-\infty,-6\right)\cup\left(-2,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

3．已知函数$f\left(x\right)=-x+\lg\dfrac{2-x}{2+x}$，且$f\left(m\right)+f\left(2m-1\right)>0$，则实数$m$的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

C．$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

4．已知函数$f(x)$的定义域为R，$f\left(x-1\right)$的图象关于点$(1,0)$对称，$f\left(3\right)=0$，且对任意的$x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right)$，$x_1\neq x_2$，满足$\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}<0$，则不等式$\left(x-1\right)f\left(x+1\right)\geq 0$的解集为（　）

A．$\left(-\infty,1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$　　B．$\left[-4,-1\right]\cup\left[0,1\right]$

C．$\left[-4,-1\right]\cup\left[1,2\right]$　　D．$\left[-4,-1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

5．已知函数$f(x)=x|x|$，关于x的不等式$f\left(x^{2}-1\right)+4f(ax+1)\geq 0$在**R**上恒成立，则$a$的取值范围为（　）

A．$[0,2]$　　B．$[0,1]$　　C．$[-2,2]$　　D．$[-1,1]$

6．$f\left(x\right)$为定义在**R**上的偶函数，对任意的$x_2>x_1\geq 0$，都有$\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}>2$，且$f\left(2\right)=4$，则不等式$f\left(x\right)>2|x|$的解集为（　）

A．$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　　B．$\left(2,+\infty\right)$

C．$\left(0,2\right)$　　D．$\left(-\infty,2\right)$

7．函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+1,x\ge a\\-x^3+3x^2+9x+5,x<a\end{cases}$，其中 $a\le -2$，则满足 $f\left(x\right)+f\left(x-1\right)<5$ 的 x 取值范围是（　）

A．$\left(-1,+\infty\right)$　　B．$\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$

C．$\left(-\sqrt{3},+\infty\right)$　　D．$\left(0,+\infty\right)$

8．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-\ln\left(x+1\right)-1,x\ge 0\\1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\ln\left(1-x\right),x<0\end{cases}$，若 $f\left(\mathrm{e}^x-2\right)+f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\le 0$，则实数 x 的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,0\right]$　　B．$\left[0,+\infty\right)$　　C．$\left[-\ln 2,0\right]$　　D．$\left(-\infty,-\ln 2\right]$

9．德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一，他从几何问题出发，引进微积分概念．在研究切线时认识到，求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值和横坐标的差值，以及当此差值变成无限小时它们的比值，这也正是导数的几何意义．设 $f'\left(x\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的导函数，若 $f¢(x)>0$，对 $\forall x_1$，$x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x_1\ne x_2$，总有 $\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，则下列选项正确的是（　）

A．$f\left(2\right)<f\left(\mathrm{e}\right)<f\left(\pi\right)$　B．$f'\left(\pi\right)<f'\left(\mathrm{e}\right)<f'\left(2\right)$

C．$f'\left(2\right)<f\left(3\right)-f\left(2\right)<f'\left(3\right)$　D．$f'\left(3\right)<f\left(3\right)-f\left(2\right)<f'\left(2\right)$

10．设函数 $f\left(x\right)=\frac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}$，则（　）

A．$f\left(x\right)$ 的一个周期为 π　　B．$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增

C．$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{4}$

11．已知函数 $f\left(x\right)=ax^3+\left(1-a\right)x$，则（　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数

B．当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=1$ 时，$a=-\frac{1}{2}$ 或 1

C．若函数 $f\left(x\right)$ 有且仅有一个零点，则实数 a 的取值范围为 $\left[0,1\right)$

D．若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上的值域为 $\left[-1,1\right]$，则实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},4\right]$

易错点三：奇偶性的前提及两个函数与一个函数的区别（函数的奇偶性、周期性、对称性）

解题模板

1.奇偶性技巧

(1)函数具有奇偶性的必要条件是其定义域关于原点对称.

(2)奇偶函数的图象特征.

函数 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称.

(3)若奇函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义，则有 $f(0)=0$；

偶函数 $y=f(x)$ 必满足 $f(x)=f(|x|)$.

(4)偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相反；奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相同.

(5)若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数的和的形式.记 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$.

(6)运算函数的奇偶性规律：运算函数是指两个（或多个）函数式通过加、减、乘、除四则运算所得的函数，如 $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\times g(x), f(x)\div g(x)$.

对于运算函数有如下结论：奇 ± 奇=奇；偶 ± 偶=偶；奇 ± 偶=非奇非偶；

奇 $\times(\div)$ 奇=偶；奇 $\times(\div)$ 偶=奇；偶 $\times(\div)$ 偶=偶.

(7)复合函数 $y=f[g(x)]$ 的奇偶性原则：**内偶则偶，两奇为奇.**

(8)常见奇偶性函数模型

奇函数：①函数 $f(x)=m(\frac{a^x+1}{a^x-1})$ $(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m(\frac{a^x-1}{a^x+1})$.

②函数 $f(x)=\pm(a^x-a^{-x})$.

③函数 $f(x)=\log_a\frac{x+m}{x-m}=\log_a(1+\frac{2m}{x-m})$ 或函数 $f(x)=\log_a\frac{x-m}{x+m}=\log_a(1-\frac{2m}{x+m})$

④函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 或函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$.

注意：关于①式，可以写成函数 $f(x)=m+\frac{2m}{a^x-1}(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m-\frac{2m}{a^x+1}(m\in R)$.

偶函数：①函数 $f(x)=\pm(a^x+a^{-x})$.

②函数 $f(x)=\log_a(a^{mx}+1)-\dfrac{mx}{2}$.

③函数 $f(|x|)$ 类型的一切函数.

④常数函数

2.周期性技巧

结论 1: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f\left(x+m\right)=-f\left(x\right)$ 恒成立，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $2m$ 是它的一个周期.

证明： $f\left(x+2m\right)=f\left(x+m+m\right)=-f\left(x+m\right)=f\left(x\right)\therefore T=2m$

也可理解为： 平移 m 个单位到谷底，再平移一个单位到巅峰，再平移一个单位又到谷底，则谷底与谷底的距离为 $2m$，$\therefore T=2m$

结论 2: 定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$，对任意的 $x\in R$，若有 $f\left(x+a\right)=f\left(x+b\right)$(其中 a,b 为常数，$a\neq b$)，则函数 $f\left(x\right)$ 是周期函数，$\left|a-b\right|$ 是函数的一个周期.

证明： $f\left(x-a+a\right)=f\left(x-a+b\right)\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x+b-a\right)\therefore T=\left|b-a\right|$

口诀：同号差（周期）异号加（对称轴）$\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.

结论 3: 定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$，对任意的 $x\in R$，若有 $f\left(x+a\right)=-f\left(x+b\right)$(其中 a,b 为常数，$a\neq b$)，则函数 $f\left(x\right)$ 是周期函数，$2\left|a-b\right|$ 是函数的一个周期.

证明： $f\left(x+a\right)=-f\left(x+b\right)$ 先向左平移 a 个单位得 $f\left(x-a+a\right)=-f\left(x-a+b\right)$

$\Rightarrow f\left(x\right)=-f\left(x+b-a\right)$ 令 $b-a=m'\Rightarrow f\left(x\right)=-f\left(x+m'\right)$ 如同结论 1

结论 4: 定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$，对任意的 $x\in R$，若有 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，(或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$)(其中 a 为常数，$a\neq 0$)，则函数 $f\left(x\right)$ 是周期函数，$2\left|a\right|$ 是函数的一个周期.

证明： $f\left(x+a\right)=\pm\dfrac{1}{f\left(x\right)}$，$f\left(x+2a\right)=f\left(x+a+a\right)=\pm\dfrac{1}{f\left(x+a\right)}=f\left(x\right)\therefore T=2\left|a\right|$

结论 5: 定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$，对任意的 $x\in R$，有 $f\left(a+x\right)=f\left(a-x\right)$ 且 $f\left(b+x\right)=f\left(b-x\right)$，

(其中 a,b 是常数，$a\neq b$)则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，$2|a-b|$ 是函数的一个周期.

另一种题干出现的信息：①若 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a,x=b$ 都对称，则等价于

$f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，则 $y=f(x)$ 为周期函数且 $T=2|a-b|$.

②若 $y=f(x)$ 为偶函数且图象关于直线 $x=a$ 对称，则 $y=f(x)$ 为周期函数且 $T=2|a|$

证明： $f(a+x)=f(a-x)$ 向左平移 a 个单位，得 $f(x-a+a)=f(a-[x-a])$

$\Rightarrow f(x)=f(2a-x)$，同理 $\Rightarrow f(x)=f(2b-x)$，$\Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x)$

利用口诀：同号差（周期）异号加（对称轴）$\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.秒出周期

结论 6: 若定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 对任意实数 $x\in R$，恒有 $f(x)=f(a+x)+f(x-a)$ 成立($a\neq 0$)，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $6|a|$ 是它的一个周期.

证明： 由函数 $f(x)=f(a+x)+f(x-a)\Rightarrow f(x+a)=f(x+2a)+f(x)$

$\Rightarrow f(x)=f(x+2a)+f(x)+f(x-a)\Rightarrow f(x-a)=-f(x+2a)$，向右平移 a 个单位得

$f(x)=-f(x+3a)\Rightarrow f(x+3a+3a)=-f(x+3a)=f(x)\therefore T=6|a|$

口诀：内同号，外异号，内部只差需 2 倍，出现周期很 $easy$.

结论 7: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 成立，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $4m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\Rightarrow f(x+2m)=\dfrac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$

$f(x+2m)=-\dfrac{1}{f(x)}$ **如同结论 4，** $f(x+2m+2m)=-\dfrac{1}{f(x+2m)}=f(x)\therefore T=4m$

结论 8: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$ 成立，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)} \Rightarrow f(x+2m)=\dfrac{1-f(x+m)}{1+f(x+m)}=\dfrac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f\left(x\right)$

$\therefore T=2m$

结论 9: 若对于非零常数 m 和任意实数 x，等式 $f(x+m)=1-\dfrac{1}{f(x)}\left(f(x)\neq 0\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $3m$ 是它的一个周期.

证明： $f(x+m)=1-\dfrac{1}{f(x)}\left(f(x)\neq 0\right)$ 得

$$f(x+3m)=1-\frac{1}{f(x+2m)}=1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x+m)}}=\frac{-1}{f(x+m)-1}=\frac{-1}{1-\dfrac{1}{f\left(x\right)}-1}=f\left(x\right)$$

$\therefore T=3m$

结论 10: ①若定义在 R 上的函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于两点 $A\left(a,y_0\right),B\left(b,y_0\right)$ 都对称，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $2\left|b-a\right|$ 是它的一个周期.

②若奇函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $A\left(a,0\right)$ 对称，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $2\left|a\right|$ 是它的一个周期.

证明： 函数 $y=f\left(x\right)$ 满足 $f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2y_0$ 且 $f\left(b+x\right)+f\left(b-x\right)=2y_0$，

则 $f\left(x\right)=2y_0-f\left(2a-x\right)=2y_0-f\left(2b-x\right)\Rightarrow f\left(2a-x\right)=f\left(2b-x\right)$

利用口诀：同号差（周期）异号加（对称轴）$\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.秒出周期

结论 11: ①若定义在 R 上的函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $A\left(a,y_0\right)$ 和直线 $x=b$ 都对称，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $4\left|b-a\right|$ 是它的一个周期.

②若奇函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称，则 $f\left(x\right)$ 是周期函数，且 $4\left|a\right|$ 是它的一个周期.

证明： 函数 $y=f\left(x\right)$ 满足 $f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2y_0$ 且 $f\left(b+x\right)=f\left(b-x\right)$，

则 $f\left(x\right)=2y_0-f\left(2a-x\right)=f\left(2b-x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=2y_0-f\left(2b-2a+x\right)=2y_0-f\left(2a-x\right)$

$\therefore f(2b+x)=2y_0-f(2a+x)\Rightarrow f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)$

$\therefore f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)=2y_0+f(4b-4a+x)-2y_0\ \therefore T=4|b-a|$

3.对称性技巧

（1）若函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(a+x)=f(a-x)$．

（2）若函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称，则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$．

（3）函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于 y 轴对称，函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于原点对称．

结论：

1.(1)如果一个奇函数 $f(x)$ 在原点处有定义，即 $f(0)$ 有意义，那么一定有 $f(0)=0$．

(2)如果函数 $f(x)$ 是偶函数，那么 $f(x)=f(|x|)$．

2.函数周期性常用结论

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x：

(1)若 $f(x+a)=-f(x)$，则 $T=2a(a>0)$．

(2)若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2a(a>0)$．

(3)若 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2a(a>0)$．

3.对称性的三个常用结论

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)若对于 R 上的任意 x 都有 $f(2a-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=f(2a+x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(3)若函数 $y=f(x+b)$ 是奇函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(b,0)$ 中心对称.

易错提醒：奇偶性的前提及两个函数与一个函数的区别

1．函数的奇偶性

由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 x，$-x$ 也在定义域内(即定义域关于原点对称)．

2．函数的对称性

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数，则函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称．

(2)若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数，则函数 $y=f(x)$ 关于点 $(a，0)$ 对称．

(3)若 $f(x)=f(2a-x)$，则函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称．

(4)若 $f(x)+f(2a-x)=2b$，则函数 $f(x)$ 关于点 $(a，b)$ 对称．

举一反三

例 ．设函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f\left(x+1\right)$是奇函数，$f\left(2x+3\right)$是偶函数，则（　）

A．$f\left(0\right)=0$　B．$f\left(4\right)=0$　C．$f\left(5\right)=0$　D．$f\left(-2\right)=0$

变式1．已知函数$f\left(x\right)$是定义域为$\mathbf{R}$的偶函数，$f\left(2x+1\right)-1$是奇函数，则下列结论不正确的是（　）

A．$f\left(1\right)=1$　B．$f\left(0\right)=0$

C．$f\left(x\right)$是以4为周期的函数　D．$f\left(x\right)$的图象关于$x=6$对称

变式2．已知函数$y=f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}(x\neq 1)$，下列结论中：①当$x>1$时，$f(x)$的最小值为3；②函数$y=f(x+1)-1$是奇函数；③函数$y=f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称 ；④$y+1=0$是$y=f(x)$图象的一条切线，正确结论的个数是（　）

A．1　B．2　C．3　D．4

变式3．已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f\left(x\right)$满足$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，$f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$，当$x\in\left(0,1\right]$时，$f\left(x\right)=2\log_2 x-1$，则$f\left(2023\right)$的值为（　）

A．-2　B．-1　C．1　D．2

易错题通关

1．已知函数$f\left(x\right)$的定义域为R，$f\left(-x\right)=-f\left(x\right),f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$，当$x\in\left[1,2\right)$时，$f\left(x\right)=x\ln x-1$，则$f\left(2025\right)$的值为（　）

A．-2　B．-1　C．1　D．2

2．定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+1\right)$是偶函数，当$x\in\left(0,1\right]$时，$f\left(x\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}x$，则$f\left(2024\right)=$（　）

A．-2　B．-1　C．0　D．2

3．已知函数$f(x)$与$g(x)$的定义域均为R，$f(x+1)+g(x-2)=3$，$f(x-1)-g(-x)=1$，且

$g(-1)=2$， $g(x-1)$为偶函数，下列结论正确的是（　）

A．$f(x)$的周期为 4　　B．$g(3)=1$

C．$\sum_{k=1}^{2024} f(k)=4048$　　D．$\sum_{k=1}^{2024} g(k)=2024$

4．已知函数$f(x)$和其导函数$g(x)$的定义域都是R，若$f(x)-x$与$g(2x+1)$均为偶函数，则（　）

A．$f(0)=0$

B．$\frac{f(x)}{x}$关于点$(0,1)$对称

C．$g(2023)=1$

D．$(g(1)-1)\times(g(2)+1)+(g(2)-1)\times(g(3)+1)+\cdots+(g(2023)-1)\times(g(2024)+1)=0$

5．已知非常数函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为R，若$f(2-x)$为奇函数，$f(2x+4)$为偶函数，则（　）

A．$f(2)=1$　　B．$f(2024)=-f(2020)$

C．$f'(-1)=f'(7)$　　D．$f'(-2021)=f'(2025)$

6．已知函数$f(x)$的定义域为R，并且对$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(-x)=f(x+2)=-f(2-x)$，则下列说法正确的是（　）

A．$y=f(x)$的图象关于$x=1$对称

B．函数$f(x)$为偶函数

C．$\sum_{k=1}^{2024} f(k)=0$

D．若$x\in(0,1)$时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则$x\in(3,4)$时，$f(x)=-\log_2(5-x)$

7．已知函数$f(x)$的定义域为R，函数$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，且满足$f(x+3)=f(1-x)$，则下列结论正确的是（　）

A．函数$f(x+1)$是奇函数

B．函数$f(x)$的图象关于y轴对称

C．函数$f(x)$是最小正周期为 2 的周期函数

D．若函数$g(x)$满足$g(x)+f(x+3)=2$，则$\sum_{k=1}^{2024} g(k)=4048$

8．已知定义在 **R** 上的偶函数满足 $f(x+2)=f(x-2)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 是减函数，则下列四个命题中正确的是（　　）

A．$T=4$

B．直线 $x=-2$ 为函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

C．函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,9]$ 上存在 3 个零点

D．若 $f(x)=m$ 在区间 $[-4,0]$ 上的根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=-2$

易错点四：　遗漏幂函数的特征及二次函数弦长公式（幂函数与二次函数）

解题模板

1、根据图象高低判断幂指数大小的方法

幂函数的幂指数的大小，大都可通过幂函数的图象与直线 $x=a(a\neq 1)$ 的交点纵坐标的大小反映.一般地，在区间 $(0,1)$ 上，幂函数中指数越大，函数图象越靠近 x 轴(简记为“指大、图低”)，在区间 $(1,+\infty)$ 上，幂函数中指数越大，图象越远离 x 轴(不包括幂函数 $y=x^0$)，在区间 $(0,1)$ 上，幂函数中指数越大，函数图象越靠近 x 轴(简记为“指大图低")，在区间 $(1,+\infty)$ 上，幂函数中指数越大，函数图象越远离 x 轴.

2、对于函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若是二次函数，就隐含 $a\neq 0$，当题目未说明是二次函数时，就要分 $a=0$ 和 $a\neq 0$ 两种情况讨论.在二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中，a 的正负决定抛物线开口的方向(a 的大小决定开口大小) c 确定抛物线在 y 轴上的截距，b 与 a 确定顶点的横坐标(或对称轴的位置).

3、根据二次函数单调性求参数范围，常转化为二次函数图象的对称轴与单调区间的位置关系，若二次函数在某区间上单调，则该区间在对称轴的一侧，若二次函数在某区间上不单调，则对称轴在该区间内（非端点），

4、二次函数在闭区间上的最值

二次函数在闭区间上必有最大值和最小值.它只能在区间的端点或二次函数的顶点处取得，

可分别求值再比较大小，最后确定最值.

结论：

1.幂函数 $y=x^a(a\in R)$ 在第一象限内图象的画法如下：

①当 $a<0$ 时，其图象可类似 $y=x^{-1}$ 画出；

②当 $0<a<1$时，其图象可类似 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 画出；

③当 $a>1$ 时，其图象可类似 $y=x^2$ 画出.

2．实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实根符号与系数之间的关系

（1）方程有两个不等正根 $x_1,x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$

（2）方程有两个不等负根 $x_1,x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$

（3）方程有一正根和一负根，设两根为 $x_1,x_2 \Leftrightarrow x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$

3.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的分布问题

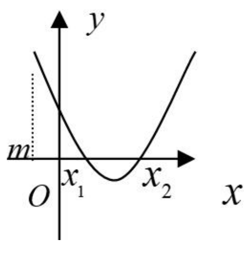
一般情况下需要从以下 4 个方面考虑：

（1）开口方向；（2）判别式；（3）对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 与区间端点的关系；（4）区间端点函数值的正负.

设 x_1,x_2 为实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两根，则一元二次

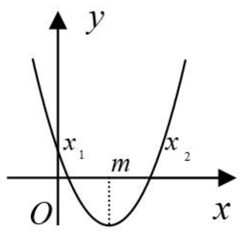
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根的分布与其限定条件如下所示.

① $m<x_1<x_2$，



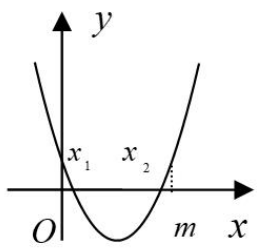
限定条件$\begin{cases}\Delta > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > m \\ f(m) > 0\end{cases}$

② $x_1 < m < x_2$



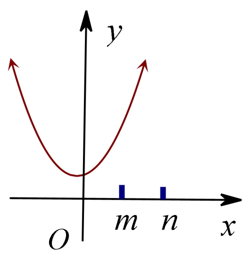
限定条件 $f(m) < 0$

③ $x_1 < x_2 < m$

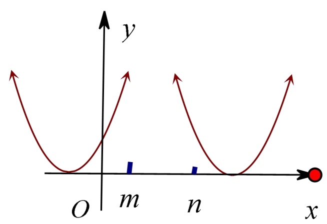


限定条件$\begin{cases}\Delta > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < m \\ f(m) > 0\end{cases}$

在区间 (m, n) 内没有实根



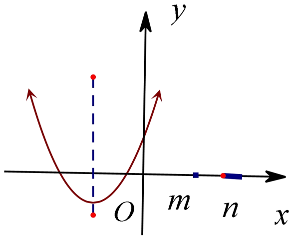
限定条件 $\Delta < 0$



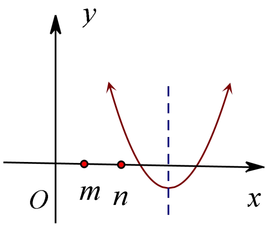
$$\Delta=0$$

限定条件 $x_1=x_2\le m$

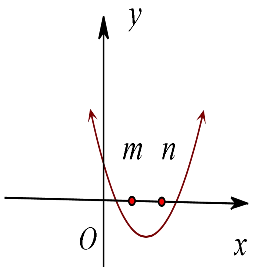
或$x_1=x_2\ge m$



限定条件$\begin{cases}\Delta>0\\-\dfrac{b}{2a}<m\\f(m)\ge 0\end{cases}$

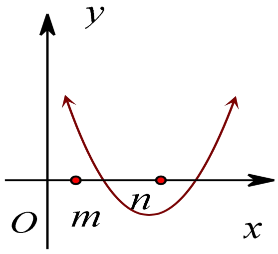


限定条件$\begin{cases}\Delta>0\\-\dfrac{b}{2a}>n\\f(n)\ge 0\end{cases}$

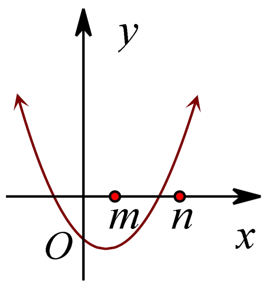


限定条件$\begin{cases}f(m)\le 0\\f(n)\le 0\end{cases}$

在区间(m,n)内有且只有一个实根

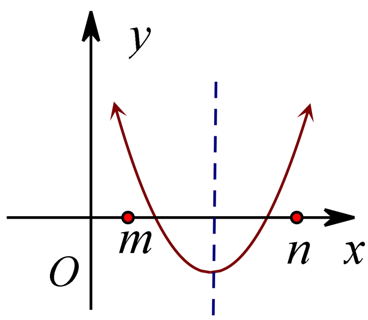


限定条件$\begin{cases} f(m) > 0 \\ f(n) < 0 \end{cases}$



限定条件$\begin{cases} f(m) < 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$

在区间(m,n)内有两个不等实根



限定条件$\begin{cases} \Delta > 0 \\ m < -\dfrac{b}{2a} < n \\ f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$

4.有关二次函数的问题，关键是利用图像.

（1）要熟练掌握二次函数在某区间上的最值或值域的求法，特别是含参数的两类问题——**动轴定区间和定轴动区间**，解法是抓住**“三点一轴”，**三点指的是区间两个端点和区间中点，一轴指对称轴.即注意对对称轴与区间的不同位置关系加以分类讨论，往往分成：①轴处在区间的左侧；②轴处在区间的右侧；③轴穿过区间内部（部分题目还需讨论轴与区间

中点的位置关系），从而对参数值的范围进行讨论.

（2）对于二次方程实根分布问题，要抓住四点，即开口方向、判别式、对称轴位置及区间端点函数值正负.

易错提醒：幂函数的特征：同时满足一下三个条件才是幂函数

①x^a的系数为 1；　　②x^a的底数是自变量；　　③指数为常数.

掌握二次函数解析式的三种形式（不能忘记最后一种）

（1）一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；

（2）顶点式：$f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq 0)$；其中，(m,n)为抛物线顶点坐标，$x=m$为对称轴方程.

（3）两点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中，$x_1,x_2$是抛物线与$x$轴交点的横坐标.

与x轴相交的弦长

当$\Delta=b^2-4ac>0$时，二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像与x轴有两个交点$M_1(x_1,0)$和$M_2(x_2,0)$，$|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

举一反三

例 1 若函数$f(x)=a^{x^2-ax+1}(a>0且a\neq 1)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，则$a$的取值范围是（　）

A．$(0,1)$　　B．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

C．$(1,2]$　　D．$[2,+\infty)$

变式 1． 若函数$f(x)=x^2-2(a-4)x+2$在$(-\infty,3]$上单调递减，则实数a的取值范围是（　）

A．$a\geq -7$　　B．$a\geq 7$　　C．$a\geq 3$　　D．$a\leq -7$

变式 2． 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+\dfrac{a}{4},(x<1)\\ a^x,(x\geq 1)\end{cases}$，若$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$[2,4]$　　B．$(2,4)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

变式 3． 已知$f(x),g(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的函数，且$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，满足

$f\left(x\right)+g\left(x\right)=ax^2+x+2$，若对任意的$1<x_1<x_2<2$，都有$\dfrac{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>-3$成立，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[0,+\infty\right)$　　B．$\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

C．$\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$

易错题通关

1．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2-4x,x\geq 0\\ x^2-4x,x<0\end{cases}$，若$f\left(2-a^2\right)>f\left(a\right)$，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　　B．$\left(-1,2\right)$

C．$\left(-2,1\right)$　　D．$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

2．若幂函数$f(x)=\left(2m^2-3m-1\right)x^m$在$(0,+\infty)$上单调递减，则$m=$（　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．-2

3．已知函数$f\left(x\right)=x^3+\left(a-2\right)x^2+2x+b$在$\left[-2c-1,c+3\right]$上为奇函数，则不等式$f(2x+1)+f\left(a+b+c\right)>0$的解集满足（　）

A．$\left(-2,4\right]$　　B．$\left(-3,5\right]$　　C．$\left(-\dfrac{5}{2},2\right]$　　D．$\left(-2,2\right]$

4．已知$f(x)$为奇函数，当$0\leq x\leq 2$时，$f(x)=2x-x^2$，当$x>2$时，$f(x)=\left|x-3\right|-1$，则（　）

A．$-f\left(-\sqrt{26}\right)>f\left(2^{0.3}\right)>f\left(3^{0.3}\right)$　　B．$f\left(2^{0.3}\right)>f\left(3^{0.3}\right)>-f\left(-\sqrt{26}\right)$

C．$-f\left(-\sqrt{26}\right)>f\left(3^{0.3}\right)>f\left(2^{0.3}\right)$　　D．$f\left(3^{0.3}\right)>f\left(2^{0.3}\right)>-f\left(-\sqrt{26}\right)$

5．已知$ax^2+bx+c>0$的解集是$\left(-2,3\right)$，则下列说法正确的是（　）

A．不等式$cx^2+bx+a<0$的解集是$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

B．$\dfrac{12}{3b+4}+b$的最小值是$\dfrac{8}{3}$

C．若$m^2-m>\dfrac{b+4}{\sqrt{b+3}}$有解，则$m$的取值范围是$m<-1$或$m>2$

D. 当 $c=2$ 时，$f(x)=3ax^2+6bx$，$x\in[n_1,n_2]$ 的值域是 $[-3,1]$，则 n_2-n_1 的取值范围是 $[2,4]$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|3^x-1|,x<1\\-4x^2+16x-13,x\ge1\end{cases}$，函数 $g(x)=f(x)-a$，则下列结论正确的是（　）

A．若 $g(x)$ 有 3 个不同的零点，则 a 的取值范围是 $[1,2)$

B．若 $g(x)$ 有 4 个不同的零点，则 a 的取值范围是 $(0,1)$

C．若 $g(x)$ 有 4 个不同的零点 $x_1,x_2,x_3,x_4\left(x_1<x_2<x_3<x_4\right)$，则 $x_3+x_4=4$

D. 若 $g(x)$ 有 4 个不同的零点 $x_1,x_2,x_3,x_4\left(x_1<x_2<x_3<x_4\right)$，则 x_3x_4 的取值范围是 $\left(\frac{13}{4},\frac{7}{2}\right)$

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+a,x\le a,\\x^2+x-a,x>a\end{cases}$(即 $f(x)=x^2+|x-a|$，$x\in\mathbf{R}$)则（　）

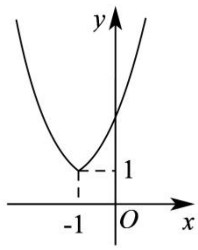
A．当 $a=0$ 时，$f(x)$ 是偶函数　　B．$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数

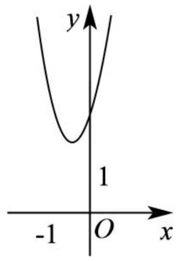
C．设 $f(x)$ 最小值为 N，则 $N\le\frac{1}{4}$　　D．方程 $f(x)=1$ 可能有 2 个解

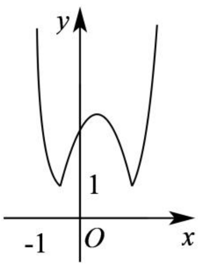
8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+9,x\le1\\x+\frac{4}{x}+a,x>1\end{cases}$，若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$，则实数 a 的值可以是（　）

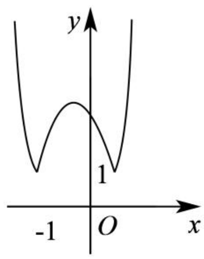
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．设 $a>0$，函数 $y=e^{|ax^2+x+1|}$ 的图象可能是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

10．关于 x 的方程 $\left(x^2-2x\right)^2-2\left(2x-x^2\right)+k=0$，下列命题正确的有（　）

A．存在实数 k，使得方程无实根

B．存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根

C．存在实数k，使得方程恰有 3 个不同的实根

D．存在实数k，使得方程恰有 4 个不同的实根

易错点五： 根式奇偶讨论（指对数函数考点）

解题模板

指数

1.指数幂的运算首先将根式、分数指数幂统一为分数指数幂，以便利用法则计算，但应注意：(1)必须同底数幂相乘，指数才能相加；(2)运算的先后顺序.

2.当底数是负数时，先确定符号，再把底数化为正数.

3.运算结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数.

4.有关指数函数图象问题的解题思路

(1)已知函数解析式判断其图象，一般是取特殊点，判断选项中的图象是否过这些点，若不满足则排除.

(2)对于有关指数型函数的图象问题，一般是从最基本的指数函数的图象入手，通过平移、伸缩、对称变换而得到．特别地，当底数a与 1 的大小关系不确定时应注意分类讨论.

(3)有关指数方程、不等式问题的求解，往往是利用相应的指数型函数图象，数形结合求解.

(4)根据指数函数图象判断底数大小的问题，可以通过直线$x=1$与图象的交点进行判断.

5.利用指数函数的性质比较幂值的大小，先看能否化成同底数，能化成同底数的先化成同底数幂，再利用函数单调性比较大小，不能化成同底数的，一般引入“1”等中间量比较大小；

6.利用指数函数的性质解简单的指数方程或不等式，先利用幂的运算性质化为同底数幂，再利用函数单调性转化为一般不等式求解；

7.解答指数函数性质的综合应用，首先判断指数型函数的性质，再利用其性质求解。

对数：

1.在对数运算中，先利用幂的运算把底数或真数进行变形，化成分数指数幂的形式，使幂的底数最简，然后正用对数运算法则化简合并.

2.先将对数式化为同底数对数的和、差、倍数运算，然后逆用对数的运算法则，转化为同底对数真数的积、商、幂再运算.|

3.$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N(a>0$，且$a\neq1)$是解决有关指数、对数问题的有效方法，在运算中应注意互化.

4.识别对数函数图象时，要注意底数 a 以 1 为分界：当 $a>1$时，是增函数；当 $0<a<1$时，是减函数.注意对数函数图象恒过定点 $(1,0)$，且以 y 轴为渐近线.

5.一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图象问题，利用数形结合法求解.

6.比较对数值的大小

(1)若对数值同底数，利用对数函数的单调性比较

(2)若对数值同真数，利用图象法或转化为同底数进行比较

(3)若底数、真数均不同，引入中间量进行比较

解决对数函数的综合应用有以下三个步骤:

第一步：求出函数的定义域；

第二步：判断对数函数的底数与 1 的大小关系，当底数是含字母的代数式(包含单独一个字母)时，若涉及其单调性，就必须对底数进行分类讨论；

第三步：判断内层函数和外层函数的单调性，运用复合函数“同增异减”原则判断函数的单调性

结论：

1.画指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象，应抓住三个关键点: $(1,a),(0,1),\left(-1,\frac{1}{a}\right)$

2.在第一象限内，指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象越高，底数越大.

3.有关指数型函数的性质

(1)求复合函数的定义域与值域

形如 $y=a^{f(x)}$ 的函数的定义域就是 $f(x)$ 的定义域.

求形如 $y=a^{f(x)}$ 的函数的值域，应先求出 $f(x)$ 的值域，再由单调性求出 $y=a^{f(x)}$ 的值域.若 a 的范围不确定，则需对 a 进行讨论.

求形如 $y=f\left(a^x\right)$ 的函数的值域，要先求出 $u=a^x$ 的值域，再结合 $y=f(u)$ 的性质确定出 $y=f\left(a^x\right)$ 的值域.

(2)判断复合函数 $y=f\left(a^x\right)$ 的单调性

令 $u=f(x),x\in[m,n]$，如果复合的两个函数 $y=a^u$ 与 $u=f(x)$ 的单调性相同，那么复合后的函数 $y=a^{f(x)}$ 在 $[m,n]$ 上是增函数；如果两者的单调性相异(即一增一减)，那么复合函数

$y=a^{f(x)}$ 在 $[m,n]$ 上是减函数.

换底公式的两个重要结论

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$; (2) $\log_a mb^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$.其中 $a>0$，且 $a\neq 1,b>0$，且 $b\neq 1,m,n\in R$.

对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象过定点 $(1,0)$，且过点 $(a,1),\left(\dfrac{1}{a},-1\right)$，函数图象只在第一、四象限.

易错提醒： 根式的性质：当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数.当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数.

举一反三

例 ．设函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为R，其图象关于直线 $x=-2$ 对称，且 $f\left(x+2\right)=f\left(x-2\right)$.

当 $x\in\left[0,2\right]$ 时，$f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-x$，则下列结论正确的是（　）

A．$f\left(x\right)$ 为偶函数　　B．$f\left(2023\right)=4$

C．$f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称　　D．$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-2,0\right]$ 上单调递减

变式 1、设偶函数 $f\left(x\right)=\log_a\left|x-b\right|$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增，则下列结论中正确的是（　）

A．$f\left(a+2\right)>f\left(b+2\right)$　　B．$f\left(a+2\right)<f\left(b+2\right)$

C．$f\left(a+1\right)>f\left(b-2\right)$　　D．$f\left(a+1\right)<f\left(b-2\right)$

变式 2、已知函数 $f\left(x\right)=\lg\left(x^2-x+\dfrac{41}{4}\right)$，则（　）

A．$f\left(x\right)$ 的最小值为 1　　B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$f\left(1\right)+f\left(x\right)=2$

C．$f\left(\log_9 2\right)>f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　　D．$f\left(9^{0.1}-\dfrac{1}{2}\right)>f\left(3^{0.18}-\dfrac{1}{2}\right)$

变式 3、已知 $a+3^a=b+5^b=3$，则下列不等关系正确的是（　）

A．$0<a<b<1$　　B．$0<b<a<1$

C．$b+3^a<a+5^b$　　D．$b\ln a>a\ln b$

易错题通关

1．下列说法正确的是（　）

A．函数 $y=a^{x+2}-2x\left(a>0,a\neq1\right)$ 的图像恒过定点 $A\left(-2,5\right)$

B．“$-1<x\leq5$”的必要不充分条件是“$-1\leq x<6$”

C．函数 $f\left(x-1\right)=-f\left(x+1\right)$ 的最小正周期为 2

D．函数 $y=\sqrt{2^x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2^x+2}}$ 的最小值为 2

2．某数学课外兴趣小组对函数 $f\left(x\right)=\lg\dfrac{x^2+1}{|x|}\left(x\neq0,x\in\mathrm{R}\right)$ 的性质进行了探究，得到下列四个命题，其中正确的命题有（　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于 y 轴对称

B．当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)$ 是增函数，当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)$ 是减函数

C．函数 $f\left(x\right)$ 的最小值是 lg2

D．函数 $f\left(x\right)$ 与 $x=2$ 有四个交点

3．给出下列说法，错误的有（　）

A．若函数 $f\left(x\right)=\dfrac{k-3^x}{1+k\cdot3^x}$ 在定义域上为奇函数，则 $k=1$

B．已知 $f\left(x\right)=\lg\left(x^2+2x+a\right)$ 的值域为 R，则 a 的取值范围是 $a>1$

C．已知函数 $f\left(2x+1\right)$ 的定义域为 $\left[-1,1\right]$，则函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-1,3\right]$

D．已知函数 $f\left(x\right)=1+\log_3x,x\in\left[1,9\right]$，则函数 $y=f^2\left(x\right)+f\left(x^2\right)$ 的值域为 $\left[2,14\right]$

4．给出下列说法，错误的有（　）

A．若函数 $f\left(x\right)=\dfrac{k-3^x}{1+k\cdot3^x}$ 在定义域上为奇函数，则 $k=1$

B．已知 $f\left(x\right)=\lg\left(x^2+2x+a\right)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是 $a>1$

C．已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+1\right)=f\left(x-1\right)$，且 $f(-1)=5$，则 $f\left(3\right)=5$

D．已知函数 $f\left(x\right)=1+\log_3x,x\in\left[1,9\right]$，则函数 $y=f^2\left(x\right)+f\left(x^2\right)$ 的值域为 $\left[2,14\right]$

5．已知定义域为 R 的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(-x-1\right)=-f\left(x+1\right)$，$f\left(x\right)$ 的部分解析式为

$f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-x+1,0<x\leq1\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(2x-\dfrac{7}{4}\right),x>1\end{cases}$，则下列说法正确的是（　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上单调递减

B．若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,n\right)$ 内满足 $f\left(x\right)<1$ 恒成立，则 $n\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C．存在实数 k，使得 $y=f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=kx$ 有 7 个交点

D．已知方程 $f\left(x\right)=m\left(m>0\right)$ 的解为 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4>-\frac{1}{4}$

6．下列选项正确的是（　）

A．$2x\left(1-x\right)\le\frac{1}{4}$

B．若正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则 $\log_2 a+\log_2 b\le -2$

C．$\sin^2\alpha+\frac{2}{\sin^2\alpha}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

D．已知正实数 a、b，若 $a+\frac{4}{b}=1$，则 $\frac{1}{a}+b$ 的最小值为 9

7．已知函数 $f\left(x\right)=\left|\lg\left(x+1\right)\right|$，实数 a，$b\left(a<b\right)$ 满足 $f\left(a\right)=f\left(-\frac{b+1}{b+2}\right)$，$f\left(10a+6b+21\right)=4\lg 2$，则（　）

A．$a+1=b+2$　　　　B．$\left(a+1\right)\left(b+2\right)=1$

C．$a=-\frac{2}{5}$　　　　D．$b=-1$

8．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+x+m\right)\left(m\in\mathbf{R}\right)$，则（　）

A．当 $m>\frac{1}{4}$ 时，$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

B．$f\left(x\right)$ 一定存在最小值

C．$f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称

D．当 $m\ge 1$ 时，$f\left(x\right)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

专题 02 函数及其应用、指对幂函数

易错点一：对函数定义域、值域及解析式理解存在偏差（定义域、值域及解析式的求算）

解题模板

已知函数的具体解析式求定义域的方法

法 1： 若 $f(x)$ 是由一些基本初等函数通过四则运算构成的，则它的定义域为各基本初等函数的定义域的交集.

法 2： 复合函数的定义域：先由外层函数的定义域确定内层函数的值域，从而确定对应的内层函数自变量的取值范围，还需要确定内层函数的定义域，两者取交集即可.

函数解析式的常见求法

法 1： 配凑法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题，往往把右边的 $g(x)$ 整理或配凑成只含 $h(x)$ 的式子，然后用 x 将 $h(x)$ 代换.

法 2： 待定系数法：已知函数的类型(如一次函数、二次函数)可用待定系数法，比如二次函数 $f(x)$ 可设为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，其中 a,b,c 是待定系数，根据题设条件，列出方程组，解出 a,b,c 即可.

法 3： 换元法：已知 $f(h(x))=g(x)$，求 $f(x)$ 时，往往可设 $h(x)=t$，从中解出 x，代入 $g(x)$ 进行换元.应用换元法时要注意新元的取值范围.

法 4： 解方程组法：已知 $f\left(x\right)$ 满足某个等式，这个等式除 $f(x)$是未知量外，还有其他未知量，如 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$(或 $f(-x)$)等，可根据已知等式再构造其他等式组成方程组，通过解方程组求出 $f\left(x\right)$.

分段函数

第一步：求分段函数的函数值时，要先确定要求值的自变量属于哪一区间，然后代入该区间对应的解析式求值.

第二步：当出现$f\left(f\left(a\right)\right)$的形式时，应从内到外依次求值.

第三步：当自变量的值所在区间不确定时，要分类讨论，分类标准应参照分段函数不同段的端点。

结论：复合函数：

一般地，对于两个函数$y=f(u)$和$u=g(x)$，如果通过变量u,y可以表示成x的函数，那么称这个函数为函数$y=f(u)$和$u=g(x)$的复合函数，记作$y=f(g(x))$，其中$y=f(u)$叫做复合函数$y=f(g(x))$的外层函数，$u=g(x)$叫做$y=f(g(x))$的内层函数.

抽象函数的定义域的求法：

(1)若已知函数$f(x)$的定义域为$[a,b]$，则复合函数$f(g(x))$的家义域由$a\bullet g(x)\bullet b$求出.

(2)若已知函数$f(g(x))$的定义域为$[a,b]$，则$f(x)$的定义域为$g(x)$在$x\in[a,b]$时的值域.

易错提醒：函数的概念

①一般地，给定非空数集A，B，按照某个对应法则f，使得A中任意元素x，都有B中唯一确定的y与之对应，那么从集合A到B的这个对应，叫做从集合A到集合B的一个函数.记作：$x\to y=f(x)$，$x\in A$.集合A叫做函数的定义域，记为D，集合$\{y|y=f(x),x\in A\}$叫做值域，记为C.

②函数的实质是从一个非空集合到另一个非空集合的映射.

③函数表示法：函数书写方式为$y=f(x)$，$x\in D$

④函数三要素：定义域、值域、对应法则.

⑤同一函数：两个函数只有在定义域和对应法则都相等时，两个函数才相同.

基本的函数定义域限制

求解函数的定义域应注意：

①分式的分母不为零；

②偶次方根的被开方数大于或等于零：

③对数的真数大于零，底数大于零且不等于1；

④零次幂或负指数次幂的底数不为零；

⑤三角函数中的正切$y=\tan x$的定义域是$\left\{x\middle|x\in R,\text{且 }x\neq k x+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$；

⑥已知 $f(x)$ 的定义域求解 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域，或已知 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域，遵循两点：①定义域是指自变量的取值范围；②在同一对应法则 f 下，括号内式子的范围相同；

⑦对于实际问题中函数的定义域，还需根据实际意义再限制，从而得到实际问题函数的定义域.

基本初等函数的值域

① $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的值域是 R.

② $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值域是：当 $a>0$ 时，值域为 $\{y|y\geq\frac{4ac-b^2}{4a}\}$；当 $a<0$ 时，值域为 $\{y|y\geq\frac{4ac-b^2}{4a}\}$.

③ $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的值域是 $\{y|y\neq 0\}$.

④ $y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 $(0，+\infty)$.

⑤ $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 R.

分段函数的应用

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，即分段函数问题，分段解决.

举一反三

例 1．函数 $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$(-\infty,3]$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(1,3]$　　D．$(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$

【答案】C

【详解】由题意得 $\begin{cases}(3-x)(x-1)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $1<x\leq 3$，则定义域为 $(1,3]$，

故选：C.

变式 1：设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\ 2(x-1),x\geq 1\end{cases}$，若 $f(m)=f(m+1)$，则 $f\left(\frac{2}{m}\right)=$（　）

A．14　　B．16　　C．2　　D．6

【答案】A

【详解】因为$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，则$\begin{cases}m>0\\m+1>0\end{cases}$，解得$m>0$，

若$m\geq 1$，则$m+1\geq 2>1$，可得$2\left(m-1\right)=2m-2\neq 2m$，不合题意；

若$0<m<1$，则$m+1>1$，可得$\sqrt{m}=2m$，解得$m=\frac{1}{4}$；

综上所述：$m=\frac{1}{4}$.

所以$f\left(\frac{2}{m}\right)=f\left(8\right)=14$.故选：A.

变式 2：已知集合$A=\left\{x\left|y=\sqrt{-|x|+2}\right.\right\},B=\left\{y\left|y=x^2-2x+2\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\left[-2,2\right]$　　B．$\left[0,+\infty\right)$　　C．$\left[1,2\right]$　　D．$\left[0,2\right]$

【答案】C

【详解】由题意得$A=\left\{x\left|-|x|+2\geq 0\right.\right\}=\left\{x\left|-2\leq x\leq 2\right.\right\},B=\left\{y\left|y=(x-1)^2+1\right.\right\}=\left\{y\left|y\geq 1\right.\right\}$，

所以$A\cap B=\left[1,2\right]$.

故选:C.

变式 3：已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\geq 1\\f\left(x+1\right),x<1\end{cases}$，则下列正确的是（　）

A．$f\left(f\left(0\right)\right)=\frac{1}{2}$　B．$f\left(f\left(1\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$　C．$f\left(f\left(\log_2 3\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$　D．$f\left(x\right)$的值域为$\left(0,1\right]$

【答案】B

【详解】对选项 A，$f\left(0\right)=f\left(1\right)=\frac{1}{2},f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 A 错误；

对选项 B，$f\left(1\right)=\frac{1}{2},f\left(f\left(1\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 B 正确.

对选项 C，因为$\log_2 3>1$，所以$f\left(\log_2 3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}=2^{\log_2\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$，

$f\left(f\left(\log_2 3\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 错误；

对选项 D，当 $x\geq 1$时，$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$，

当 $0\leq x<1$时，$1\leq x+1<2, f\left(x\right)=f\left(x+1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$，

函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，又因为 $x<1$时，$f\left(x\right)=f\left(x+1\right)$，

所以当 $x<1$时，函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，

综上，函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$，故 D 错误.

故选：B

易错题通关

1．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$，则 $f\left[f\left(3\right)\right]=$（　）

A．$\ln 3$　　　　B．3　　　　C．e^{3}　　　　D．$e^{3}\ln 3$

【答案】B

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$，则 $f\left(3\right)=\ln\frac{e^{3}+1}{e^{3}-1}$,

令 $f\left(3\right)=t$，则 $f\left[f\left(3\right)\right]=f\left(t\right)=\ln\frac{e^{t}+1}{e^{t}-1}$，

又因为 $t=f\left(3\right)=\ln\frac{e^{3}+1}{e^{3}-1}$，

所以 $f\left[f\left(3\right)\right]=f\left(t\right)=\ln\frac{e^{\ln\frac{e^{3}+1}{e^{3}-1}}+1}{e^{\ln\frac{e^{3}+1}{e^{3}-1}}-1}=\ln\frac{\frac{e^{3}+1}{e^{3}-1}+1}{\frac{e^{3}+1}{e^{3}-1}-1}=\ln\frac{\frac{2e^{3}}{e^{3}-1}}{\frac{2}{e^{3}-1}}=lne^{3}=3$，

所以 $f\left[f\left(3\right)\right]=3$，

故选：B.

2．给出下列4个函数，其中对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立的是（　）

A．$f\left(\sin 3x\right)=\sin x$　　　　B．$f\left(\sin 3x\right)=x^{3}+x^{2}+x$

C．$f\left(x^{2}+2\right)=\left|x+2\right|$　　　　D．$f\left(x^{2}+4x\right)=\left|x+2\right|$

【答案】D

【详解】对于 A，当 $x=0$时，$f\left(0\right)=0$；当 $x=\frac{\pi}{3}$时，$f\left(0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，与函数定义矛盾，不符

合；

对于B，当$x=0$时，$f(0)=0$；当$x=\frac{\pi}{3}$时，$f(0)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^3+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\pi}{3}$，与函数定义矛盾，不符合；

对于C，当$x=-2$时，$f(6)=0$；当$x=2$时，$f(6)=4$，与函数定义矛盾，不符合；

对于D，令$x+2=t$，则$x=t-2$，所以$f\left[(t-2)^2+4(t-2)\right]=f\left(t^2-4\right)=|t|$，

令$t^2-4=m\in[-4,+\infty)$，所以$t=\pm\sqrt{m+4}$，

所以$f(m)=\left|\pm\sqrt{m+4}\right|=\sqrt{m+4}\,(m\geq-4)$，

所以$f(x)=\sqrt{x+4}\,(x\geq-4)$，符合.

故选：D.

3．已知函数$f(1-x)=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$，则$f(x)=$（　）

A．$\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq0)$

B．$\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq1)$

C．$\frac{4}{(x-1)^2}-1(x\neq0)$

D．$\frac{4}{(x-1)^2}-1(x\neq1)$

【答案】B

【详解】令$t=1-x$，则$x=1-t$，且$x\neq0$，则$t\neq1$，

可得$f(t)=\frac{1-(1-t)^2}{(1-t)^2}=\frac{1}{(t-1)^2}-1,(t\neq1)$，

所以$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq1)$.

故选：B.

4．已知函数$f(x)$满足$f(2x)=f(x+1)$，则$f(x)$可能是（　）.

A．$f(x)=x$

B．$f(x)=\log_2 x$

C．$f(x)=2^x$

D．$f(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q}\\0,x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$

【答案】D

【详解】对于 A，$f(x)=x$，则 $f(2x)=2x$，$f(x+1)=x+1$，不满足 $f(2x)=f(x+1)$；

对于 B，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(2x)=\log_2 2x=1+\log_2 x$，$f(x+1)=\log_2(x+1)$，

不满足 $f(2x)=f(x+1)$；

对于 C，$f(x)=2^x$，则 $f(2x)=2^{2x}=4^x$，$f(x+1)=2^{x+1}=2\times 2^x$，不满足 $f(2x)=f(x+1)$；

对于 D，$f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\0, x\notin Q\end{cases}$，当 $x\in Q$ 时，$2x\in Q, x+1\in Q$，故 $f(2x)=f(x+1)=1$；

当 $x\notin \mathbf{Q}$ 时，$2x\notin Q, x+1\notin Q$，故 $f(2x)=f(x+1)=0$，

即此时 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\0, x\notin Q\end{cases}$ 满足 $f(2x)=f(x+1)$，D 正确，

故选：D

5．设集合 $A=\{x\mid 4x^2-13x<0\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x-2}+3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(0,2]$　　B．$(0,3]$　　C．$\left[2,\frac{13}{4}\right)$　　D．$\left[3,\frac{13}{4}\right)$

【答案】D

【详解】由 $4x^2-13x<0$，即 $x(4x-13)<0$，解得 $0<x<\frac{13}{4}$，

所以 $A=\{x\mid 4x^2-13x<0\}=\left\{x\mid 0<x<\frac{13}{4}\right\}$，

由 $\sqrt{x-2}\geq 0$，所以 $\sqrt{x-2}+3\geq 3$，

所以 $B=\{y\mid y=\sqrt{x-2}+3\}=\{y\mid y\geq 3\}$，

所以 $A\cap B=\left[3,\frac{13}{4}\right)$.

故选：D.

6．集合 $P=\{x\mid |x|<2\}$，$Q=\{y\mid y=\sqrt{x^2}+1\}$，则 $P\cap Q=$（　）

A．$\{1,2\}$　　B．$\{x\mid 1\leq x<2\}$

C．$\{x\mid 1<x<2\}$　　D．$\{x\mid 1\leq x\leq 2\}$

【答案】B

【详解】由题意可得：$P=\{x\mid |x|<2\}=\{x\mid -2<x<2\}$，$Q=\{y\mid y=\sqrt{x^2}+1\}=\{y\mid y\geq 1\}$，

所以 $P \cap Q = \{x | 1 \le x < 2\}$.

故选：B.

易错点二：忽视单调性与单调区间的主次（函数的单调性与最值）

解题模板

1.函数的单调性是对函数定义内的某个区间而言的。

2.函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性是函数在该区间上的整体性质。

3.函数的单调定义中的 x_1、x_2 有三个特征：（1）任意性（2）有大小（3）属于同一个单调区间。

4.求函数的单调区间必须先求定义域。

5.判断函数单调性常用以下几种方法：

方法 1：定义法：一般步骤为设元 $\to$ 作差 $\to$ 变形 $\to$ 判断符号→得出结论.

方法 2：图象法：如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，则可由图象的上升或下降确定单调性.

方法 3：导数法：先求导数，利用导数值的正负确定函数的单调区间.

方法 4：性质法：（1）对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各初等函数的增减性及 $f(x) \pm g(x)$ 增减性质进行判断；

6.求函数最值（值域）的常用方法

方法 1：单调性法：先确定函数的单调性，再由单调性求最值.

方法 2：图象法：先作出函数的图象，再观察其最高点、最低点，求出最值.

方法 3：基本不等式法：先对解析式变形，使之具备“一正二定三相等”的条件后用基本不等式求出最值.

方法 4：导数法：先求导，然后求出在给定区间上的极值，最后结合端点值，求出最值.

结论：

1.单调性技巧

（1）证明函数单调性的步骤

①**取值**：设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量，且 $x_1 < x_2$；

②**变形**：作差变形（变形方法：因式分解、配方、有理化等）或作商变形；

③**定号**：判断差的正负或商与1的大小关系；

④**得出结论**.

（2）函数单调性的判断方法

①**定义法**：根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断.

②**图象法**：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

③**直接法**：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

（3）记住几条常用的结论：

结论1：若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

结论2：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增（或减）函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增（或减）函数；

结论3：若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；

结论4：若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数.

易错提醒：1.函数的单调性

（1）单调函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，区间 $D\subseteq A$：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1，x_2 当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，符号一致那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，符号相反那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

①属于定义域 A 内某个区间上；

②任意两个自变量 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$；

③都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$；

④图象特征：在单调区间上增函数的图象上坡路，减函数的图象下坡路.

（2）单调性与单调区间

①单调区间的定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性，D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

②函数的单调性是函数在某个区间上的性质.

（3）复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“同增异减”，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，

内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减（增）函数，复合函数是减函数.

2．函数的最值

前提：一般地，设函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足

条件：（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f\left(x\right)\leq M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f\left(x_0\right)=M$ 结论 M 为最大值

（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f\left(x\right)\geq M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f\left(x_0\right)=M$ 结论 M 为最小值

举一反三

例．若函数 $f\left(x\right)=a^{x^2-ax+1}\left(a>0且a\neq 1\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A．$\left(0,1\right)$　　　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C．$\left(1,2\right]$　　　　D．$\left[2,+\infty\right)$

【答案】C

【详解】设函数 $t=x^2-ax+1$，

则函数 $f\left(x\right)=a^{x^2-ax+1}\left(a>0且a\neq 1\right)$ 是由二次函数 $t=x^2-ax+1$ 与指数函数 $y=a^t\left(a>0且a\neq 1\right)$ 复合而成的.

当 $0<a<1$ 时，由于函数 $y=a^t\left(a>0且a\neq 1\right)$ 单调递减，

而二次函数 $t=x^2-ax+1$ 的图象开口向上，

在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上不可能单调递减，

则函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上不可能单调递增，故不满足题意；

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^t\left(a>0且a\neq 1\right)$ 单调递增，

要使函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

则二次函数 $t=x^2-ax+1$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

又其对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，故 $\frac{a}{2}\leq 1$，所以 $a\in\left(1,2\right]$.故选：C.

变式 1．下列函数中，满足“对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$”成立的是（ ）

A．$f(x)=-x^2-2x+1$　　B．$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$　C．$f(x)=x+1$　D．$f(x)=\log_2(2x)+1$

【答案】A

【详解】根据题意，“对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$”，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

对于选项 A，$f(x)=-x^2-2x+1$，为二次函数，其对称轴为 $x=-1$，在 $(0,+\infty)$ 上递减，符合题意；

对于选项 B，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，其导数 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，不符合题意；

对于选项 C，$f(x)=x+1$ 为一次函数，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，不符合题意；

对于选项 D，由复合函数单调性“同增异减”知，$f(x)=\log_2(2x)+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意.故选：A.

变式 2．若定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足：① $f(x)$ 为奇函数；②对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．已知函数 $f(x)$ 具有性质 P，则不等式 $f(x-2)<\dfrac{f(x^2-4)}{x+2}$ 的解集为（ ）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-3,2)$

C．$(-\infty,-3)\cup(-1,2)$　　D．$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

【答案】C

【详解】因为对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，

即对任意两个不相等的正实数 x_1,x_2 不妨设 $0<x_1<x_2$，都有

$$\frac{\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0,$$

所以有$\dfrac{f(x_1)}{x_1}>\dfrac{f(x_2)}{x_2}$，

所以函数$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$是$(0,+\infty)$上的减函数，

又因为$f(x)$为奇函数，即有$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，有$f(-x)=-f(x)$，

所以有$g(-x)=\dfrac{f(-x)}{-x}=\dfrac{-f(x)}{-x}=\dfrac{f(x)}{x}=g(x)$，

所以$g(x)$为偶函数，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.

当$x-2>0$，即$x>2$时，有$x^2-4>0$,由$f(x-2)<\dfrac{f(x^2-4)}{x+2}$，得$\dfrac{f(x-2)}{x-2}<\dfrac{f(x^2-4)}{x^2-4}$，

所以$x-2>x^2-4$，解得$x<-2$，此时无解；

当$x-2<0$，即$x<2$时，由$f(x-2)<\dfrac{f(x^2-4)}{x+2}$，得$\dfrac{f(x-2)}{x-2}>\dfrac{f(x^2-4)}{x^2-4}$，

所以$|x-2|<|x^2-4|$，解得$x<-3$或$-1<x<2$.

综上所述，不等式$f(x-2)<\dfrac{f(x^2-4)}{x+2}$的解集为$(-\infty,-3)\cup(-1,2)$.

故选：C.

变式3．定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：对$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$都有

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1$，则不等式$f(2\log_2 x)-f(x)>\log_2 x^2-x$的解集为（　）

A．$(1,2)$　　B．$(2,4)$　　C．$(4,8)$　　D．$(8,16)$

【答案】B

【详解】根据题意：当$x_1>x_2$时，

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2\Rightarrow f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$，

当$x_1<x_2$时,

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2\Rightarrow f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$

可得函数 $h(x)=f(x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

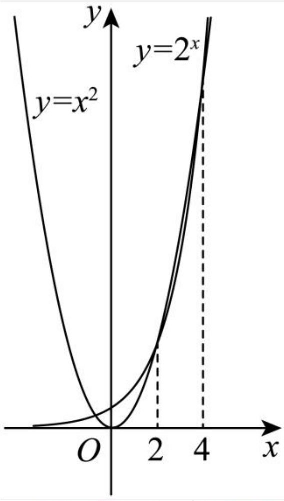
则 $f(2\log_2 x)-f(x)>\log_2 x^2-x \Rightarrow f(\log_2 x^2)-\log_2 x^2>f(x)-x$

$\Rightarrow \log_2 x^2>x \Rightarrow \log_2 x^2>\log_2 2^x \Rightarrow x^2>2^x$，

在同一坐标系中画出 $y=x^2$ 与 $y=2^x$ 图象.

得 $2<x<4$，则不等式的解集为 $(2,4)$，

故选：B.



易错题通关

1．已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}-\sin x}{2}$，若对于一切的实数 x，不等式 $f(2kx^2)<f\left(\dfrac{3}{8}-kx\right)$ 恒成立，则 k 的取值范围为（　　）

A．$[-2,0)$　　　B．$(-2,0)$　　　C．$[-3,0]$　　　D．$(-3,0]$

【答案】D

【详解】易知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}-\sin x}{2}$ 的定义域为 R，

则 $f'(x)=\dfrac{2^x\cdot\ln 2+2^{-x}\cdot\ln 2-\cos x}{2}$，

因为 $2^x>0$，$\ln 2>0$，

所以 $2^x\cdot\ln 2+2^{-x}\cdot\ln 2\geq 2\sqrt{2^x\cdot\ln 2\cdot 2^{-x}\cdot\ln 2}=2\ln 2=\ln 4>1$，

又因为 $-1\leq\cos x\leq 1$，所以 $2^x\cdot\ln 2+2^{-x}\cdot\ln 2-\cos x>0$，即 $f'(x)>0$ 恒成立，

故函数 $f\left(x\right)$ 是 R 上的单调递增函数，

因为 $f\left(2kx^2\right)<f\left(\frac{3}{8}-kx\right)$，所以 $2kx^2<\frac{3}{8}-kx$，即 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$，

$\left(\mathrm{i}\right)$ 当 $k=0$ 时，左边 $=-\frac{3}{8}<0$ 成立，故 $k=0$ 符合题意；

$\left(\mathrm{ii}\right)$ 当 $k\neq 0$ 时，有 $\begin{cases}2k<0\\ \Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)<0\end{cases}$，解得：$-3<k<0$，

综上所述：k 的取值范围为：$\left(-3,0\right]$.

故选：D.

2．已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，且对任意的 $0<m<n$，都有 $\frac{f\left(m\right)-f\left(n\right)}{m-n}<0$，且 $f\left(4\right)=0$，则不等式 $\frac{f\left(-x-2\right)-f\left(x+2\right)}{x}>0$ 的解集为（　）

A．$\left(-6,0\right)$　　B．$\left(-\infty,-6\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

C．$\left(-\infty,-6\right)\cup\left(0,2\right)$　　D．$\left(-\infty,-6\right)\cup\left(-2,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【答案】D

【详解】因为对任意的 $0<m<n$，都有 $\frac{f\left(m\right)-f\left(n\right)}{m-n}<0$，此时 $m-n<0$，则 $f\left(m\right)>f\left(n\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递减，

因为函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 单调递减，$f\left(-4\right)=-f\left(4\right)=0$，

所以当 $x<-4$ 和 $0<x<4$ 时，$f\left(x\right)>0$；当 $-4<x<0$ 和 $x>4$ 时，$f\left(x\right)<0$.

由 $\frac{f\left(-x-2\right)-f\left(x+2\right)}{x}=\frac{-2f\left(x+2\right)}{x}>0$，即 $xf\left(x+2\right)<0$，

所以 $\begin{cases}x<0\\ x+2<-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ 0<x+2<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\ x+2>4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\ -4<x+2<0\end{cases}$，

所以 $x<-6$ 或 $-2<x<0$ 或 $x>2$ 或 x 无解，

所以原不等式解集为 $\left(-\infty,-6\right)\cup\left(-2,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

故选：D

3．已知函数 $f\left(x\right)=-x+\lg\frac{2-x}{2+x}$，且 $f\left(m\right)+f\left(2m-1\right)>0$，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

C．$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$　　D．$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

【答案】D

【详解】函数 $f\left(x\right)=-x+\lg\frac{2-x}{2+x}$，则 $\frac{2-x}{2+x}>0$，即 $\left(x-2\right)\left(x+2\right)<0$，解得 $-2<x<2$，

所以 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-2,2\right)$，且 $f\left(-x\right)=x+\lg\frac{2+x}{2-x}=-\left(-x+\lg\frac{2-x}{2+x}\right)=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

又函数 $y=\frac{2-x}{2+x}=\frac{-\left(x+2\right)+4}{2+x}=-1+\frac{4}{x+2}$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上单调递减，

所以 $y=\lg\frac{2-x}{2+x}$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上单调递减，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上单调递减，

所以不等式 $f\left(m\right)+f\left(2m-1\right)>0$，即 $f\left(m\right)>f\left(1-2m\right)$，

等价于 $\begin{cases}-2<m<2\\-2<2m-1<2\\m<1-2m\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{3}$，即实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

故选：D

4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f\left(x-1\right)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$f\left(3\right)=0$，且对任意的 $x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right)$，$x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}<0$，则不等式 $\left(x-1\right)f\left(x+1\right)\geq 0$ 的解集为（　　）

A．$\left(-\infty,1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$　　B．$\left[-4,-1\right]\cup\left[0,1\right]$

C．$\left[-4,-1\right]\cup\left[1,2\right]$　　D．$\left[-4,-1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

【答案】C

【详解】$\because f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，$\therefore f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，

$\because$ 对任意的 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$，$x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也单调递减，

又 $f\left(3\right)=0$ 所以 $f\left(-3\right)=0$，且 $f\left(0\right)=0$，

所以当 $x\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(0,3\right)$ 时，$f\left(x\right)>0$；当 $x\in\left(-3,0\right)\cup\left(3,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)<0$，

所以由$(x-1)f(x+1)\geq 0$可得$\begin{cases} x-1<0, \\ -3\leq x+1\leq 0 \end{cases}$或$\begin{cases} x-1>0, \\ 0\leq x+1\leq 3 \end{cases}$或$x-1=0$，

解得$-4\leqslant x\leqslant -1$或$1\leq x\leq 2$，即不等式$(x-1)f(x+1)\geq 0$的解集为$[-4,-1]\cup[1,2]$.

故选：C.

5．已知函数$f(x)=x|x|$，关于x的不等式$f\left(x^2-1\right)+4f(ax+1)\geq 0$在$\mathbf{R}$上恒成立，则$a$的取值范围为（　　）

A．$[0,2]$　　B．$[0,1]$　　C．$[-2,2]$　　D．$[-1,1]$

【答案】D

【详解】由$f\left(x^2-1\right)+4f(ax+1)\geq 0$，得$f\left(x^2-1\right)\geq -4f(ax+1)$.

因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数，

因此$f\left(x^2-1\right)\geq 4f(-ax-1)$.

又$f(2x)=2x|2x|=4x|x|=4f(x)$，

所以$f\left(x^2-1\right)\geq f(-2ax-2)$.

当$x>0$时，$f(x)=x|x|=x^2$单调递增，而$f(x)$为奇函数，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

所以$x^2-1\geq -2ax-2$在$\mathbf{R}$上恒成立，即$x^2+2ax+1\geq 0$在$\mathbf{R}$上恒成立，

所以$\Delta=4a^2-4\leq 0$，解得$-1\leq a\leq 1$，

故a的取值范围为$[-1,1]$.

故选：D.

6．$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，对任意的$x_2>x_1\geq 0$，都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，且$f(2)=4$，则不等式$f(x)>2|x|$的解集为（　　）

A．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,2)$ D．$(-\infty,2)$

【答案】A

【详解】对任意的$x_2>x_1\geq 0$，都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，则