第2章

2.3.2、空间向量运算的坐标表示

A 级　必备知识基础练

1. 已知向量$\mathbf{m}=(1,2,\lambda)$,$\mathbf{n}=(2,2,1)$,$\mathbf{p}=(2,1,1)$,满足条件$(\mathbf{p}-\mathbf{m})\perp\mathbf{n}$,则$\lambda$的值为 (A)

A.1　　B.-1　　C.2　　D.-2

解析　因为$\mathbf{p}-\mathbf{m}=(1,-1,1-\lambda)$,所以$(\mathbf{p}-\mathbf{m})\cdot\mathbf{n}=1\times2+(-1)\times2+(1-\lambda)\times1=0$,解得$\lambda=1$.故选A.

2.若向量$\mathbf{a}=(2,0,-1)$,向量$\mathbf{b}=(0,1,-2)$,则$2\mathbf{a}-\mathbf{b}=$(C)

A.$(-4,1,0)$　　B.$(-4,1,-4)$

C.$(4,-1,0)$　　D.$(4,-1,-4)$

解析　因为向量$\mathbf{a}=(2,0,-1)$,向量$\mathbf{b}=(0,1,-2)$,

所以$2\mathbf{a}-\mathbf{b}=2(2,0,-1)-(0,1,-2)=(4,-1,0)$.故选C.

3.若向量 $\mathbf{a}=(1,\lambda,2)$,$\mathbf{b}=(2,-1,2)$,且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角的余弦值为$\frac{8}{9}$,则 $\lambda=$(C)

A.2　　　　B.-2

C.-2 或$\frac{2}{55}$　　　　D.2 或-$\frac{2}{55}$

解析　因为$\mathbf{a}=(1,\lambda,2)$,$\mathbf{b}=(2,-1,2)$,

所以 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=6-\lambda$,$|\mathbf{a}|=\sqrt{5+\lambda^2}$,$|\mathbf{b}|=\sqrt{4+1+4}=3$,

由题知,$3\sqrt{5+\lambda^2}\times\frac{8}{9}=6-\lambda$,即 $55\lambda^2+108\lambda-4=0$,解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=\frac{2}{55}$.故选 C.

4.(多选题)在四面体P-ABC中,$P(0,0,3)$,$A(2,2,5)$,$B(1,3,2)$,$C(3,1,2)$,则以下选项正确的有(AB)

A.$\vec{AB}=(-1,1,-3)$　　B.$|\vec{AB}|=|\vec{AC}|$

C.$\vec{PA}\perp\vec{AC}$　　D.$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=11$

解析 因为$\vec{AB}$=(-1,1,-3),所以选项 A 正确;

因为$\vec{AB}$=(-1,1,-3),$\vec{AC}$=(1,-1,-3),

所以有$|\vec{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$,$|\vec{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$,因此选项 B 正确;

因为$\vec{PA}$=(2,2,2),$\vec{AC}$=(1,-1,-3),所以有$\vec{PA}\cdot\vec{AC}$=2-2-6=-6≠0,因此选项 C 不正确;

因为$\vec{AB}$=(-1,1,-3),$\vec{AC}$=(1,-1,-3),所以$\vec{AB}\cdot\vec{AC}$=-1-1+9=7,因此选项 D 不正确.

故选 AB.

5.(多选题)已知向量$\mathbf{a}=(x,1,2)$,$\mathbf{b}=(1,y,-2)$,$\mathbf{c}=(3,1,z)$,向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$平行,向量$\mathbf{c}$与$\mathbf{b}$垂直,则(ABD)

A.$x=y=-1$

B.$z=1$

C.$\mathbf{a}+\mathbf{c}$的模为5

D.向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为180°

解析 因为向量 $\mathbf{a}=(x,1,2)$,$\mathbf{b}=(1,y,-2)$,$\mathbf{c}=(3,1,z)$,向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行,向量 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直,所以 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$,$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$,即 $\begin{cases}3+y-2z=0,\\x=\lambda,\\1=y\lambda,\\2=-2\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}z=1,\\x=-1,\\y=-1,\\\lambda=-1,\end{cases}$ 故 A,B 选项正确;

$\mathbf{a}+\mathbf{c}=(2,2,3)$,$|\mathbf{a}+\mathbf{c}|=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$,故 C 选项错误;

因为$\mathbf{a}=-\mathbf{b}$,所以向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$互为相反向量,夹角为$180°$,故D选项正确.故选ABD.

6.若向量**a**=(1,1,x),**b**=(1,2,1),**c**=(1,1,1)满足条件(**c**-**a**)·2**b**=-2,则x=________.　2

解析　**c**-**a**=(0,0,1-x),2**b**=(2,4,2),由(**c**-**a**)·2**b**=-2得2(1-x)=-2,解得x=2.

7. 已知空间向量$\mathbf{a}=(2,4,-2)$,$\mathbf{b}=(-1,0,2)$,$\mathbf{c}=(x,2,-1)$.

(1)若$\mathbf{a}\parallel\mathbf{c}$,求$|\mathbf{c}|$;

(2)若$\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$,求$\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle$的值.

解 (1)空间向量$\mathbf{a}=(2,4,-2)$,$\mathbf{b}=(-1,0,2)$,$\mathbf{c}=(x,2,-1)$,因为$\mathbf{a}\parallel\mathbf{c}$,所以存在实数$k$,使得$\mathbf{c}=k\mathbf{a}$,

所以$\begin{cases} x=2k, \\ 2=4k, \\ -1=-2k, \end{cases}$

解得$x=1$,则$|\mathbf{c}|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

(2)因为$\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$,则$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=-x+0-2=0$,解得$x=-2$,

所以 $\mathbf{c}=(-2,2,-1)$,故 $\cos<\mathbf{a},\mathbf{c}>=\frac{a\cdot c}{|a||c|}=\frac{-2\times2+2\times4+(-1)\times(-2)}{\sqrt{4+16+4}\times\sqrt{4+4+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

8.已知向量$\mathbf{a}=(-1,2,1)$,$\mathbf{b}=(1,1,-1)$,则下列说法不正确的是(C)

A.$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$

B.$|\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$

C.$\cos<\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}>=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D.$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

解析　因为向量$\mathbf{a}=(-1,2,1)$,$\mathbf{b}=(1,1,-1)$,所以$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-1\times1+2\times1+1\times(-1)=0$,故$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$,所以选项A正确;

$|\mathbf{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$,$|\mathbf{b}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$,所以$|\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$,故选项 B 正确;

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(0,3,0)$,所以 $\cos<\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}>=\frac{(a+b)\cdot a}{|a+b||a|}=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$,故选项 C 错误;

$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(-2,1,2)$,所以$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=3$,$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=3$,故$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$,所以选项D正确.故选C.