重庆市南开中学校2023-2024学年高三下学期第七次质量检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知随机变量X服从正态分布$N\left(2,\sigma^2\right)$，$P(X>1)=0.7$，则$P(2<X<3)=$（　）

A．0.7　　B．0.6　　C．0.4　　D．0.2

2．已知平面直角坐标系内两点$A\left(1,2\right)$，$B\left(-2,3\right)$，则过点A且以$\overrightarrow{AB}$为法向量的直线l的方程为（　）

A．$3x-y-1=0$　　B．$3x-y-2=0$　　C．$3x+y-5=0$　　D．$3y-x-5=0$

3．若函数$f\left(\cos x\right)=\cos x+\cos 2x$，则$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

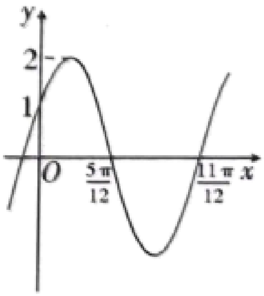
4．输血是外伤人员救治的重要手段，血液质量对提高救治成功率极为关键.血液质量的主要评判指标是血液中ATP含量.已知血液中ATP浓度S（单位：$\mu\mathrm{mol/gHb}$）随温度λ（单位：°C）、时间t（单位：天）、及起始浓度S_0变化的近似函数关系式为：$S=S_0t^{1.08\lambda}\mathrm{e}^{-1.30\lambda}$（e为自然底数，$\mathrm{e}\approx 2.71828$）.由此可知，当血液在20°C恒温条件下，保存5天后的ATP浓度，大约相当于血液在4°C恒温条件下保存（　）天后的ATP浓度.（参考数据：$\ln 5\approx 1.6$）

A．16　　B．20　　C．25　　D．30

5．已知$\left(x-1\right)(x+2)^n$展开式中x^2项的系数为-48，则$n=$（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

6．正弦波是频率成分非常单一的信号，其波形是数学上的正弦曲线，任何复杂信号，如光谱信号，声音信号等，都可由多个不同的正弦波复合而成，现已知某复合信号$I\left(x\right)$由三个振幅、频率相同的正弦波$f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$，$h\left(x\right)$叠加而成，即$I\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)+h\left(x\right)$，设$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，$g\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\alpha\right)$，$h\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\beta\right)$，$\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2},\alpha,\beta\in\left(0,\pi\right)\right)$，若图中所示为$f\left(x\right)$的部分图象，则下列描述正确的是（　）



A．$(A+\omega)\cdot\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

B．$I(x)$的最小正周期是2π

C．若$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，则$I(x)=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

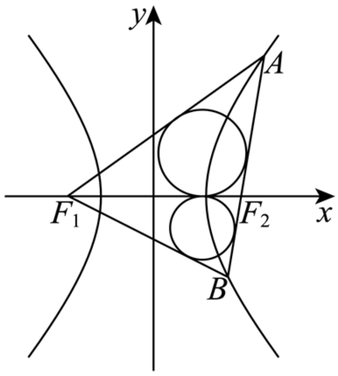
D．若$I(x)=0$，则$\cos(\varphi-\alpha)\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\varphi)=-\dfrac{1}{8}$

7．在一个抽奖游戏中共有$n\left(n\geq 3,n\in\mathbf{N}^*\right)$扇关闭的门，其中$k\left(k\leq n-2,k\in\mathbf{N}^*\right)$扇门后面有奖品，其余门后没有奖品，主持人知道奖品在哪些门后.参赛者先选择一扇门，但不立即打开.主持人打开剩下的门当中一扇无奖品的门，然后让参赛者决定是否换另一扇仍然关闭的门.参赛者选择不换门和换门的获奖概率分别为（　）

A．$\dfrac{k}{n}$；$\dfrac{k}{n-1}$　　B．$\dfrac{k}{n-1}$；$\dfrac{k}{n-2}$

C．$\dfrac{k}{n}$；$\dfrac{k(n-1)}{n(n-2)}$　　D．$\dfrac{k-1}{n-2}$；$\dfrac{k}{n-2}$

8．如图，双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若存在过$F_2$的直线$l$交双曲线$E$右支于A，$B$两点，且$\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$的内切圆半径$r_1$，$r_2$满足$3r_1=4r_2$，则双曲线$E$的离心率取值范围为（　）



A．$(1,3)$　　B．$(1,7)$　　C．$\left(2,4\sqrt{3}\right)$　　D．$\left(1,4\sqrt{3}\right)$

二、多选题

9．下列命题中正确的是（　）

A．若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$，则 $\vec{a}\parallel\vec{b}$

B．若非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$

C．若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为平面向量，则 $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$

D．若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为非零向量，且满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$

10．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{ax+b}$，$f\left(1\right)=1$，$f\left(3\right)=-3$，令 $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_{n+1}=f\left(x_n\right)$.则（　　）

A．$a=-1$，$b=2$

B．数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为等差数列

C．$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i<1$

D．$\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)\left(x_3+1\right)\cdots\left(x_n+1\right)<\mathrm{e}$

11．已知三次函数 $f\left(x\right)=ax^3+x^2+cx+\dfrac{1}{27}$ 有三个不同的零点 $x_1,x_2,x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$，函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1$.则（　　）

A．$3ac<1$

B．若 x_1,x_2,x_3 成等差数列，则 $a\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$

C．若 $g\left(x\right)$ 恰有两个不同的零点 $m,n(m<n)$，则 $2m+n=-\dfrac{1}{3a}$

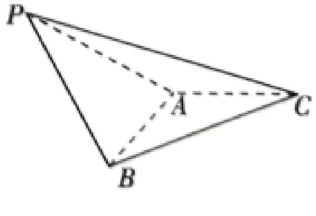
D．若 $g\left(x\right)$ 有三个不同的零点 $t_1,t_2,t_3\left(t_1<t_2<t_3\right)$，则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=t_1^2+t_2^2+t_3^2$

三、填空题

12．已知复数 $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，则 $\omega^{2024}=$______.

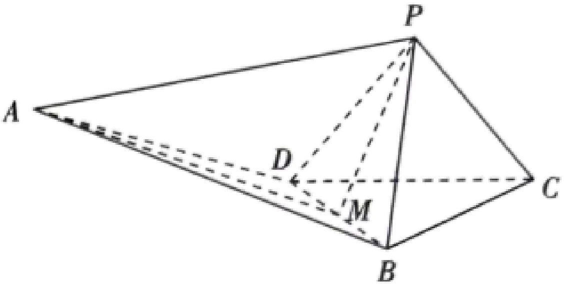
13．已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对应的边分别是 a，b，c，$\left(\cos A+\cos B\right)\left(\cos A-\cos B\right)=\sin C\left(\sin C-\dfrac{10}{13}\sin A\right)$，$b=3\sqrt{2}$，$a+c=6$，则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

14．如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=\sqrt{5}$，$CA\perp AB$，$AB=AC=2$，二面角 $P-AB-C$ 的大小为 $120°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为______.



四、解答题

15．如图，几何体$PABCD$中，$\triangle PBD$和$\triangle CBD$均为等边三角形，平面$ABD\perp$平面PBD，$AB=AD=\sqrt{5}$，$BD=2$，$PC=\sqrt{3}$，M为BD中点.



(1)证明：P、A、M、C四点共面；

(2)求直线AB与平面PBC所成角的正弦值.

16．已知函数$f\left(x\right)=x^2-2x+a\ln x$，$\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)若$a=1$，求函数$f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线；

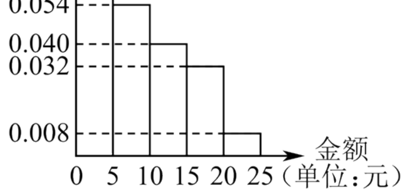
(2)若对任意的$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，$x_1\neq x_2$，有$\left(x_1-x_2\right)\cdot\left[x_2f\left(x_1\right)-x_1f\left(x_2\right)\right]>0$恒成立，求实数$a$的取值范围.

17．在平面直角坐标系xOy中，已知$M\left(2,0\right)$，动点P到y轴的距离为d，且$\left|PM\right|-d=2$.

(1)求动点P的轨迹方程C；

(2)过点$N(3,2)$作直线交曲线C于y轴右侧两点A、B，且$AN=BN$.求经过A、B且与直线$l:x=-2$相切的圆的标准方程.

18．某微信群群主为了了解微信随机红包的金额拆分机制，统计了本群最近一周内随机红包（假设每个红包的总金额均相等）的金额数据（单位：元），绘制了如下频率分布直方图.



(1)根据频率分布直方图估计红包金额的平均值与众数；

(2)群主预告今天晚上7点将有3个随机红包，每个红包的总金额均相等且每个人都能抢到红包.小明是该群的一位成员，以频率作为概率，求小明至少两次抢到10元以上金额的红包的概率.

(3)在春节期间，群主为了活跃气氛，在群内发起抢红包游戏规定：每轮“手气最佳”者发下一轮红包，每个红包发出后，所有人都参与抢红包.第一个红包由群主发.根据以往抢红包经验，群主自己发红包时，抢到“手气最佳”的概率为$\frac{1}{4}$；其他成员发红包时，群主抢到“手气最佳”的概率为$\frac{1}{2}$.设前n轮中群主发红包的次数为X，第n轮由群主发红包的概率为P_n.求P_n及X的期望$E\left(X\right)$.

19．设集合S、T为正整数集$\mathbf{N}^*$的两个子集，S、T至少各有两个元素.对于给定的集合S，若存在满足如下条件的集合T：

①对于任意$a,b \in S$，若$a \ne b$，都有$ab \in T$；②对于任意$a,b \in T$，若$a < b$，则$\frac{b}{a} \in S$.

则称集合T为集合S的“K集”.

(1)若集合$S_1 = \left\{1,3,9\right\}$，求$S_1$的“$K$集”$T_1$；

(2)若三元集S_2存在“K集”T_2，且T_2中恰含有4个元素，求证：$1 \notin S_2$；

(3)若$S_3 = \left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\right\}$存在“$K$集”，且$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，求$n$的最大值.

参考答案：

1．D

【分析】

由正态分布的对称性直接求解.

【详解】

因为$P(X>1)=0.7$，则$P(X>3)=P(X<1)=0.3$，

$\therefore P(2<X<3)=\dfrac{1-P(X<1)-P(X>3)}{2}=0.2$.

故选：D.

2．A

【分析】

由题意可求得$k_{AB}=-\dfrac{1}{3}$，即可确定l的斜率，即可求得直线l的点斜式方程，化为一般式，即得答案.

【详解】

由题意知$A\left(1,2\right)$，$B\left(-2,3\right)$，则$\overrightarrow{AB}=(-3,1)$，

则$k_{AB}=-\dfrac{1}{3}$，所以直线l的斜率为$k_l=3$，

所以直线方程为$y-2=3\left(x-1\right)$，即$3x-y-1=0$，

故选：A

3．B

【分析】

由二倍角公式结合换元法求出函数解析式即可求解.

【详解】

因为$f\left(\cos x\right)=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1$

所以$f\left(x\right)=x+2x^2-1,\left(-1\le x\le 1\right)$，

则$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{4}-1=0$，$f\left(0\right)=-1$.

故选：B.

4．C

【分析】

利用指对数运算求解.

【详解】

设所求为t天，代入数据得：$S_0 5^{1.08\times 20}\mathrm{e}^{-1.30\times 20}=S_0 t^{1.08\times 4}\mathrm{e}^{-1.30\times 4}$，

解得$t^{4.32}=\dfrac{5^{21.6}}{\mathrm{e}^{20.8}}$，取对数为$\ln t=\dfrac{21.6\ln 5-20.8}{4.32}\approx 3.2=2\ln 5$，所以$t\approx 25$.

故选：C.

5．C

【分析】

求出$(x-1)(x+2)^n$展开式中x^2项的系数的表达式，结合题意，代入选项中的值验证，即可确定答案.

【详解】

由题意得$(x-1)(x+2)^n$展开式中x^2项的系数为$\mathrm{C}_n^1 2^{n-1}-\mathrm{C}_n^2 2^{n-2}$，

故有$\mathrm{C}_n^1 2^{n-1}-\mathrm{C}_n^2 2^{n-2}=-48$，代入选项，$n=6$满足题意，

故选：C

6．D

【分析】

利用“五点法”可判断A；利用三角函数周期的性质可判断B；利用特殊值法可判断C；利用三角恒等变换与同角关系式可判断D.

【详解】

对于A，由图可知，$A=2$，且$\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{2}T=\dfrac{\pi}{\omega}$，所以$\omega=2$，

又$f(0)=1$，所以$\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$(A+\omega)\cdot\varphi=(2+2)\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$，故A错误；

对于B，因为$\omega=2$，所以$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$的最小正周期均为π，

所以$I(x)=f(x)+g(x)+h(x)$的最小正周期为π，故B错误，

对于C，因为$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，所以$I(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

因为$I(0)=2\sin\dfrac{\pi}{6}+2\sin\dfrac{\pi}{3}+2\sin\dfrac{\pi}{4}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$，

而$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sin\left(2\times 0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$，故 C 错误，

对于 D，因为$I\left(x\right)=0$，所以$2\sin\left(2x+\varphi\right)+2\sin\left(2x+\alpha\right)+2\sin\left(2x+\beta\right)=0$，

展开得$\sin 2x\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\varphi\right)+\cos 2x\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\varphi\right)=0$，等式恒成立，

则$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\varphi=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\varphi=0\end{cases}$，则$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\varphi\\ \sin\alpha+\sin\beta=-\sin\varphi\end{cases}$，

平方求和得：$2+2\cos\left(\alpha-\beta\right)=1$，所以$\cos\left(\alpha-\beta\right)=-\frac{1}{2}$；

同理,$\cos\left(\varphi-\alpha\right)=-\frac{1}{2}$，$\cos\left(\beta-\varphi\right)=-\frac{1}{2}$，

所以$\cos\left(\varphi-\alpha\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)\cos\left(\beta-\varphi\right)=-\frac{1}{8}$，故 D 正确.

故选：D.

7．C

【分析】

利用条件概率及全概率公式即可求解.

【详解】

不换门：则与一开始随机选择一扇门的中奖概率一样，为$\frac{k}{n}$；

换门：若一开始选择的门有奖，则换门后的中奖概率为$\frac{k-1}{n-2}$；

若一开始选择的门无奖，则换门后的中奖概率为$\frac{k}{n-2}$.

所以换门的中奖概率为$\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-2}+\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n-2}=\frac{k\left(n-1\right)}{n\left(n-2\right)}$.

故选：C.

8．B

【分析】

首先根据内切圆切线长性质和双曲线定义得到两圆与F_1F_2有公共切点H，且是双曲线右顶点，从而可知$O_1O_2\perp x$轴；接着通过解三角形知识计算得到焦点弦AB的斜率是$k_{AB}=4\sqrt{3}$；最后通过渐近线与相交弦斜率关系$\frac{b}{a}<k_{AB}$，得到离心率范围.

【详解】

设$\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$的内切圆圆心分别为O_1，O_2，

如图，设$\triangle AF_1F_2$的内切圆与x轴的切点为H，由双曲线定义$AF_1-AF_2=2a$，根据圆的切线长性质得$HF_1-HF_2=2a$，进而得点H的横坐标为a，即点H是双曲线右顶点；

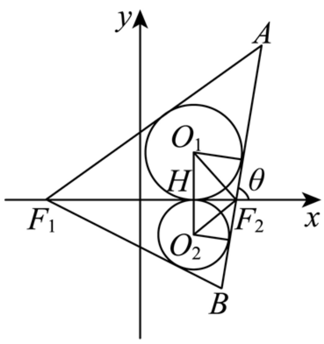
同理可得点H也是$\triangle BF_1F_2$的内切圆与x轴的切点，连接O_1O_2，O_1F_2，O_2F_2，从而可知$O_1O_2\perp x$轴，

设直线AB的倾斜角为θ，$\therefore\angle O_1F_2H=\dfrac{\pi-\theta}{2}$，$\angle O_2F_2H=\dfrac{\theta}{2}$，又$F_2H=c-a$，$\therefore$ $r_1=O_1H=(c-a)\tan\dfrac{\pi-\theta}{2}=(c-a)\cot\dfrac{\theta}{2}$，$r_2=O_2H=(c-a)\tan\dfrac{\theta}{2}$，

$\therefore 3(c-a)\cot\dfrac{\theta}{2}=4(c-a)\tan\dfrac{\theta}{2}$，解得$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore k_{AB}=\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=4\sqrt{3}$，$\therefore\dfrac{b}{a}<k_{AB}=4\sqrt{3}$，则离心率$e\in(1,7)$.

故选项为：B.



【点睛】

根据内切圆切线长性质和双曲线定义得到两圆与F_1F_2有公共切点H，且是双曲线右顶点是第一个突破口；通过解三角形知识计算得到焦点弦AB的斜率是第二个突破口；通过渐近线与相交弦斜率关系得到离心率范围是第三步.本题对相关知识的基本功要求较高，运算能力、数形结合能力要求高，具有典型模型特点.

9．AB

【分析】

根据数量积的定义结合平行向量定义判断A，根据数量积的运算律及垂直的向量表示判断B，利用向量数量积的运算性质判断CD.