# 数值分析习题选编及参考解答

## PART I 习题

### 习题一

1. 设 $S=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 $t$ 的测量有 $\pm 0.1$ 秒的误差，证明当 $t$ 增加时 $S$ 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

2. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

3. 在 $-4\le x\le 4$ 上给出 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值求 $e^x$ 的近似值，要使截断误差不超过 $10^{-6}$，

问使用函数表的步长 $h$ 应取多少？

4. 求 $f(x)=x^2$ 在［a,b］上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

5. 已知单调连续函数 $y=f(x)$ 的如下数据

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | －0.11 | 0.00 | 1.50 | 1.80 |
| $f(x_i)$ | －1.23 | －0.10 | 1.17 | 1.58 |

用插值法计算 $x$ 约为多少时 $f(x)=1.$（小数点后至少保留 4 位）

6. 设函数 $f(x)$ 在区间[0,3]上具有四阶连续导数,试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，

使其满足 $P_3(0)=0$，$P_3(1)=1$，$P_3'(1)=3$，$P_3(2)=1$

并写出误差估计式。

7、利用 Remez 算法，计算函数 $f(x)=\sin\pi x$，在区间[0，1]上的二次最佳一致逼近多项式 $p_2(x)$（要求

精度为 0.0005）.

8、给定 $f(x)=x^4+x^3-1$，试利用最小零偏差定理，即切比雪夫多项式的最小零偏差性质，在 $[0,1]$ 上

求 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式。

$$(T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1)$$

9、设$\varphi_1 = span\{1, x\}, \varphi_2 = span\{x^{100}, x^{101}\}$，分别在$\varphi_1$、$\varphi_2$上求一元素，使其为$x^2 \in C[0,1]$的最佳平方逼近，并比较其结果。

10、用最小二乘法求一个形如$y = a + bx^2$的经验公式，使它与下列数据拟合，并计算均方误差。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 19 | 25 | 31 | 38 | 44 |
| $y_i$ | 19.0 | 32.3 | 49.0 | 73.3 | 87.8 |

11、用格拉姆－施密特方法构造正交多项式求$f(x) = \sin \pi x$在［0，1］上的二次最佳平方逼近多项式。

12、求$f(x) = e^x$在［－1，1］上的三次最佳平方逼近多项式。（参考讲义与参考书，利用 Legendre 正交多项式）

13、编出用正交多项式(格拉姆－施密特)作最小二乘拟合的程序或框图。

14、确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数进度。

1）$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h);$

2）$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h);$

3）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \dfrac{f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)}{3};$

4） $\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h[f(0)+f(h)]}{2} + ah^2[f^{'}(0)-f^{'}(h)].$

15．用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{dy}{y}$ ，并比较结果。

1）龙贝格方法；

2）三点高斯公式；

3）将积分区间分为四等分，用复化两点高斯公式。

16. 建立高斯型求积公式 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ 。

# 习题二

1. 用矩阵的直接三角分解法（LU 分解）解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$ 。

2. 矩阵第一行乘以一数，成为

$$A=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

证明：当 $\lambda=\pm\frac{2}{3}$ 时，$cond(A)_\infty$ 有最小值。

3. 设有方程组 $AX=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$, 已知它有解 $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$。

如果右端有小扰动 $\|\delta b\|_\infty=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，试估计由此引起的解的相对误差。

4.（编程题）设计一通用的列主元消去法程序并可计算条件数（用于判断方程病态程度）。

5.对线性代数方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=1\\ x_1-x_3+5x_4=6\\ x_2+4x_3-x_4=8\\ -x_1+3x_2-x_3=3\end{cases}$ 设法导出使雅可比（Jacobi）迭代法和高斯一 赛德尔（G-S）迭代法均收敛的迭代格式，要求分别写出迭代格式，并说明收敛的理由。

6. 设方程组 $(a)\begin{cases} x_1+0.4x_2+0.4x_3=1; \\ 0.4x_1+x_2+0.8x_3=2; \\ 0.4x_1+0.8x_2+x_3=3. \end{cases}$ $(b)\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1; \\ x_1+x_2+x_3=1; \\ 2x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$ 试考察解此方程组的雅可比迭代法及高斯－赛德尔迭代法的收敛性。

7. 设线性方程组为 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ $a_{11}a_{22}\neq 0$

（1） 证明用雅可比迭代法和高斯－赛德尔迭代法解此方程组要么同时收敛，要么同时发散。

（2） 当同时收敛时，试比较其收敛速度。

8. 证明矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ 对于 $-\frac{1}{2}<a<1$ 是正定的，而雅可比迭代只对 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 是收敛的。

9. 已知 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ 有一个近似特征值 $\lambda_j^{'}=-6.42$，用反幂法求对应的特征向量，并改进特征值的精度。

10. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 给出用古典Jacobi方法求$A$特征值的第一次迭代计算。

11. 已知 $x=(1 \quad 0 \quad 1)^T, y=e_1$，构造一个 Householder 变换矩阵 H，使得 $Hx=\pm\|x\|_2 e_1$。

# 习题三

1. 为求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0 在 x_0 = 1.5$ 附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式。

1） $x = 1 + 1/x^2$，迭代公式 $x_{k+1} = 1 + 1/x_k^2$；

2） $x^3 = 1 + x^2$，迭代公式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{1 + x_k^2}$；

3） $x^2 = \dfrac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1} = 1/\sqrt{x_k - 1}$. 试分析每种迭代公式的收敛性。

2. 已知 $x = \varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内只有一根，而当 $a < x < b$ 时，$|\varphi'(x)| \ge k > 1$, 试问如何将 $x = \varphi(x)$ 化为适于迭代的形式？ 将 $x = tgx$ 化为适于迭代的形式，并求 $x = 4.5$（弧度）附近的根。

3. 能不能用迭代法求解下列方程，如果不能时，试将方程改写成能用迭代法求解的形式。

（1） $x = (\cos x + \sin x)/4;$ （2） $x = 4 - 2^x.$

4. 用梯形方法解初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0; \\ y(0) = 1, \end{cases}$ 证明其近似解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$，并证明当 $h \to 0$ 时，它收敛于原初值问题的准确解 $y = e^{-x}$.

5. 写出用四阶经典的龙格—库塔方法求解下列初值问题的计算公式：（无需计算）

1) $\begin{cases} y' = x + y, & 0 < x < 1; \\ y(0) = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' = 3y/(1+x), & 0 < x < 1; \\ y(0) = 1. \end{cases}$

6. 证明对任意参数$t$，下列龙格—库塔公式是二阶的：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_2 + K_3); \\ K_1 = f(x_n, y_n); \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1); \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1). \end{cases}$$

7. 导出具有下列形式的三阶方法：

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + h(b_0 y'_n + b_1 y'_{n-1} + b_2 y'_{n-2})$$

# PART II 参考解答

## 习题一

1. 设$S = \frac{1}{2}gt^2$，假定$g$是准确的，而对$t$的测量有$\pm 0.1$秒的误差，证明当$t$增加时$S$的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解：

$$e\ (S) = S^* - S = \frac{1}{2}gt^{*2} - \frac{1}{2}gt^2 = 0.1gt$$

$$e_r(S) = \frac{e\ (S)}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{0.1gt}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{0.2}{t}$$

$$\therefore \quad t\uparrow, \quad e\ (S)\uparrow, \quad e_r(S)\downarrow.$$

2. 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$，求证 $\max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|.$

解：由 $(a,0),(b,0)$两点线性插值$L_1(x) = l_1(x)\times 0 + l_2(x)\times 0 = 0.$

插值余项为 $R_1(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b) \quad \xi \in [a,b]$

$\therefore \forall\ x \in [a,b].$ 有

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right| = \left|R_1(x)\right| = \frac{1}{2}\left|f''(\xi)(x-a)(x-b)\right| &\le \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b} f''(x)[(x-a)(b-x)] \\ &\le \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b} f''(x)[\frac{(x-a)+(b-x)}{2}]^2 = \frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b} f''(x).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

3. 在 $-4 \le x \le 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值求 $e^x$ 的近似值，要使截断误 差不超过 $10^{-6}$，问使用函数表的步长 $h$ 应取多少？

解:

$f(x)=e^x,\quad f^{(k)}(x)=e^x\le e^4,\quad x\in[-4,4]$,考察点$x_0-h, x_0, x_0+h$及$x=x_0+th, |t|\le 1.$

$$
\begin{aligned}
&\text{则}|R_2(x)|=\frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!}|[(x-(x_0-h)](x-x_0)[x-(x_0+h)]|\\
&\le\frac{e^4}{3!}|(t+1)h\cdot th\cdot(t-1)h|=\frac{|t(t-1)(t+1)|}{3!}e^4h^3\\
&\le\frac{e^4}{6}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3.\qquad \xi\in(-4,4).
\end{aligned}
$$

($\because |t(t-1)(t+1)|$在点$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$处取到极大值$\frac{2}{3\sqrt{3}}$)

令 $\frac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3<10^{-6}$ 得 $h<0.006.$

4. 求$f(x)=x^2$在[a,b]上的分段线性插值函数$I_h(x)$,并估计误差。

解:

$$
\begin{aligned}
I_h(x)&=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}x_k^2+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}x_{k+1}^2=\frac{x_k^2-x_{k+1}^2}{x_k-x_{k+1}}x\\
&-\frac{x_{k+1}\cdot x_k^2-x_k\cdot x_{k+1}^2}{x_k-x_{k+1}}=(x_k+x_{k+1})x-x_kx_{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|R_h(x)|&=|f(x)-I_h(x)|=|x^2-[(x_k+x_{k+1})x-x_kx_{k+1}]|\\
&=|(x-x_k)(x-x_{k+1})|\le\frac{1}{4}\left[x_{k+1}-x_k\right]^2=\frac{1}{4}h^2
\end{aligned}
$$

5. 已知单调连续函数$y=f(x)$的如下数据

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | －0.11 | 0.00 | 1.50 | 1.80 |
| $f(x_i)$ | －1.23 | －0.10 | 1.17 | 1.58 |

用插值法计算 $x$ 约为多少时 $f(x)=1.$（小数点后至少保留 4 位）

解：作辅助函数 $g(x)=f(x)-1,$ 则问题转化为 $x$ 为多少时，$g(x)=0.$ 此时可作新的关于 $g(x_i)$ 的函数表。

由 $f(x)$ 单调连续知 $g(x)$ 也单调连续，因此可对 $g(x)$ 的数值进行反插。的牛顿型插值多项式为

$$\begin{aligned} x=g^{-1}(y)=&-0.11+0.097345(y+2.23)+0.451565(y+2.23)(y+1.10)\\ &-0.255894(y+2.23)(y+1.10)(y-0.17) \end{aligned}$$

故 $x=g^{-1}(0)=1.321497.$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间[0, 3]上具有四阶连续导数,试用埃尔米特插值法,求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，使其满足 $P_3(0)=0$，$P_3(1)=1$，$P_3'(1)=3$，$P_3(2)=1$。并写出误差估计式。

解：由所给条件可用埃尔米特插值法确定多项式 $P_3(x)$，

$p_3(x)=-\dfrac{5}{2}x^3+7x^2-\dfrac{7}{2}x$ 由题意可设

$R(x)=f(x)-p_3(x)=k(x)x(x-1)^2(x-2)$ 为确定待定函数 $k(x)$，作辅助函数：

$$g(t)=f(t)-p_3(t)-k(t)t(t-1)^2(t-2)$$

则 $g(t)$ 在[0, 3]上存在四阶导数且在[0, 3]上至少有 5 个零点

$t=x,0,1,2(t=1$ 为二重零点），反复应用罗尔定理，知至少有一个零点 $\xi\in(0,3)$

使 $g^4(\xi)=0$，从而得 $k(x)=\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$。　　故误差估计式为

$R(x)=\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x(x-1)^2(x-2)\qquad \xi\in(0,3)$

7．编程实现题：略。

8、给定 $f(x)=x^4+x^3-1$，试利用最小零偏差定理，即切比雪夫多项式的最小零偏差性质，在 $[0,1]$ 上求 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式。

$$(T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1)$$

解：令 $t=2x-1\Rightarrow f(x)=f(\dfrac{t+1}{2})=(\dfrac{t+1}{2})^4+3(\dfrac{t+1}{2})^3-1.$

设 $P_3^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式，由于 $f(\dfrac{t+1}{2})$ 的首项系数为 $\dfrac{1}{2^4}$，故

$$16[f(\frac{t+1}{2})-P_3^*(\frac{t+1}{2})]=\frac{1}{2^{4-1}}T_4(t)$$
$$\Rightarrow P_3^*(\frac{t+1}{2})=(\frac{t+1}{2})^4+(\frac{t+1}{2})^3-1-\frac{1}{16\times 8}(8t^4-8t^2+1)$$
$$\Rightarrow P_3^*(x)=(x^4+3x^3-1)-\frac{1}{16\times 8}[8(2x-1)^4-8(2x-1)^2+1]$$
$$=3x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}. \qquad x\in[0,1]$$

9. 设 $\varphi_1=span\left\{1,x\right\},\varphi_2=span\left\{x^{100},x^{101}\right\}$，分别在 $\varphi_1$、$\varphi_2$ 上求一元素，使其为 $x^2\in C[0,1]$ 的最佳平方逼近，并比较其结果。

解：

(1) 设 $\varphi_1^*=a_0^*+a_1^*x$

因 $(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1^2dx=1,\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\quad (\varphi_1,\varphi_0)=\frac{1}{2},$

$(f,\varphi_0)=\int_0^1 x^2\cdot 1dx=\frac{1}{3},\quad (f,\varphi_1)=\int_0^1 x^2\cdot xdx=\frac{1}{4},$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0^*+\frac{1}{2}a_1^*=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}a_0^*+\frac{1}{3}a_1^*=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0^*=-\frac{1}{6}\\ a_1^*=1\end{cases}\Rightarrow\quad \varphi_1^*(x)=-\frac{1}{6}+x$$

$$\|\delta_1\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{1}a_k^*(f,\varphi_k)\approx 0.00556$$

(2)设$\varphi_2^*(x)=b_0^*x^{100}+b_1^*x^{101}$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1(x^{100})^2dx=\frac{1}{201}$， $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_0^1 x^{100}\cdot x^{101}dx=\frac{1}{202}$，

$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1(x^{101})^2dx=\frac{1}{203}$， $(f,\varphi_0)=\int_0^1 x^{102}dx=\frac{1}{103}$， $(f,\varphi_1)=\int_0^1 x^{103}dx=\frac{1}{104}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{201}b_0^*+\frac{1}{202}b_1^*=\frac{1}{103}\\ \frac{1}{202}b_0^*+\frac{1}{203}b_1^*=\frac{1}{104}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_0^*\approx 375.24253\\ b_1^*\approx -375.14825\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \varphi_2^*(x)=375.24253x^{100}-375.14825x^{101}.$$

$$\|\delta_2\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{1}b_k^*(f,\varphi_k)=\int_0^1 x^4dx-[375.24253\times\frac{1}{103}-375.14825\times\frac{1}{104}]\approx 0.16406$$

由结果知（1）比（2）好。

10. 用最小二乘法求一个形如$y=a+bx^2$的经验公式，使它与下列数据拟合，并计算均方误差。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 19 | 25 | 31 | 38 | 44 |
| $y_i$ | 19.0 | 32.3 | 49.0 | 73.3 | 87.8 |

解：