

预览 - 收藏 - 关注

考点课堂 素材精粹

第十版

依据考试大纲+总结命题规律

辅导备考策略+历年考题详析

梳理考试要点+总结核心知识

筛选最新考点+拓展解题思路

精编典型习题+积累备考经验

全真模拟测试+预测考试趋势

针对性复习题+各类精选资料

注：下载前请仔细阅读资料，以实际预览内容为准

让学习为我们创造终生价值

目 录 (文)

考点 1	集合	3
考点 2	常用逻辑用语	5
考点 3	函数及其性质	6
考点 4	基本初等函数(I)	8
考点 5	函数与方程、函数模型及其应用	11
考点 6	导数及其应用	12
考点 7	任意角的三角函数及诱导公式	14
考点 8	三角函数的图象与性质(含函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象)	16
考点 9	简单的三角恒等变换	18
考点 10	正弦定理和余弦定理	20
考点 11	平面向量的线性运算及基本定理	22
考点 12	平面向量的数量积	23
考点 13	数系的扩充与复数的引入	25
考点 14	数列的概念与简单表示法	27
考点 15	等差数列、等比数列	28
考点 16	数列求和	30
考点 17	不等关系与一元二次不等式	31
考点 18	二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题	33
考点 19	基本不等式	35
考点 20	推理与证明	36
考点 21	空间几何体	38

考点 22	空间点、直线、平面之间的位置关系	40
考点 23	直线、平面平行与垂直的判定及其性质	42
考点 24	空间直角坐标系	44
考点 25	直线与方程(含直线方程、交点坐标与距离公式)	45
考点 26	圆与方程(含直线与圆、圆与圆的位置关系)	47
考点 27	椭圆、双曲线、抛物线	49
考点 28	算法初步	54
考点 29	统计、统计案例	57
考点 30	概率(含古典概型、几何概型)	61

的元素一一列举出来,使之具体化,然后从中寻找解题方法.

(2) 直观化策略

抽象集合问题,利用直观图表,如数轴、Venn 图、函数的图象等,可化抽象为直观,快速找到解题途径,从而优化解题过程.

(3) 简单化策略

对于连续的数集或含有运算的数集,通常用简单化的策略,通过化简弄清集合是由什么元素组成,然后再着手解题.

(4) 性质化策略

在解集合问题时,用常用性质求解,往往事半功倍.

2. 补集思想在解题中的应用——正难则反

对于一些条件和结论之间关系不明朗,难以从正面入手的数学问题,在解题时,可以从问题的反面入手,探求已知和未知的关系,这就是“正难则反”的策略.

这种“正难则反”的策略运用的是补集思想,即已知全集 U ,求子集 A ,若直接求 A 较困难,可先求 $\complement_U A$,再由 $\complement_U (\complement_U A) = A$ 求 A .

●●► 易错提醒

忽视运算中的“极端”情况

集合 $A, B, A \cap B = \emptyset$ 时,你是否注意到“极端”情况: $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$;求集合的子集时是否忘记 $\emptyset$.

●●► 对比总结

$0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 的区别和联系

(1) 区别: 0 不是一个集合,而 $\{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 都表示集合,其中 $\{0\}$ 是包含一个元素 0 的集合, $\emptyset$ 为不含任何元素的集合, $\{\emptyset\}$ 表示含有一个元素 $\emptyset$ 的集合.

(2) 联系: $0 \in \{0\}, 0 \notin \emptyset, 0 \notin \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{0\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \emptyset \in \{\emptyset\}$.

考点 2 常用逻辑用语

●●► 记忆空间

1. 命题

(1)命题分类:真命题与假命题,简单命题与复合命题;(2)复合命题的形式: p 且 q , p 或 q , 非 p ;(3)复合命题的真假:对 p 且 q 而言,当 p 、 q 均为真时,其为真;当 p 、 q 中有一个为假时,其为假. 对 p 或 q 而言,当 p 、 q 均为假时,其为假;当 p 、 q 中有一个为真时,其为真;当 p 为真时,非 p 为假;当 p 为假时,非 p 为真;(4)四种命题:记“若 p 则 q ”为原命题,则否命题为“若非 p 则非 q ”,逆命题为“若 q 则 p ”,逆否命题为“若非 q 则非 p ”. 其中互为逆否的两个命题同真假,即等价. 因此,四种命题中为真的个数只能是偶数个.

2. 充分条件与必要条件

定义:对命题“若 p 则 q ”而言,当它是真命题时, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件,当它的逆命题为真时, q 是 p 的充分条件, p 是 q 的必要条件,两种命题均为真时,称 p 是 q 的充要条件, q 是 p 的充要条件.

●●► 规律方法

1. 充分条件与必要条件的判断方法

(1)在判断充分条件及必要条件时,首先要分清哪个是条件,哪个是结论.(2)结论要分四种情况说明:充分不必要条件,必要不充分条件,充分且必要条件,既不充分又不必要条件.(3)从集合角度看,若满足条件 p 的所有对象组成集合 A ,满足条件 q 的所有对象组成集合 B ,则当 $A \subseteq B$ 时, p 是 q 的充分条件, $B \subseteq A$ 时, p 是 q 的必要条件, $A = B$ 时, p 是 q 的充要条件.

2. 一些常见结论的否定形式

原词语	否定词	原词语	否定词
等于	不等于	任意的	某个
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $(n-1)$ 个
小于	大于或等于	至多有 n 个	至少有 $(n+1)$ 个
对所有 x , 成立	存在某 x , 不成立	对任何 x , 不成立	存在某 x , 成立

考点 3 函数及其性质

●●► 记忆空间

1. 函数的表示法:解析式法、图象法、列表法.
2. 奇偶性

(1)图象的对称性质:一个函数是奇函数的充要条件是它的图象关于原点对称;一个函数是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称;

(2)设 $f(x),g(x)$ 的定义域分别是 D_1,D_2 ,那么在它们的公共定义域上:奇+奇=奇,奇 $\times$ 奇=偶,偶+偶=偶,偶 $\times$ 偶=偶,奇 $\times$ 偶=奇.

3. 单调性

(1)奇函数在其对称区间上的单调性相同;(2)偶函数在其对称区间上的单调性相反;(3)在公共定义域内:增函数 $f(x)$ +增函数 $g(x)$ 是增函数;减函数 $f(x)$ +减函数 $g(x)$ 是减函数;增函数 $f(x)$ -减函数 $g(x)$ 是增函数;减函数 $f(x)$ -增函数 $g(x)$ 是减函数.

4. 周期性

(1) 定义: 如果存在一个非零常数 T , 使得对于函数定义域内的任意 x , 都有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数;

(2) 性质: ① $f(x+T)=f(x)$ 常常写作 $f\left(x+\frac{T}{2}\right)=f\left(x-\frac{T}{2}\right)$, 若 $f(x)$ 的周期中, 存在一个最小的正数, 则称它为 $f(x)$ 的最小正周期; ② 若周期函数 $f(x)$ 的周期为 T , 则 $f(\omega x)$ ($\omega \neq 0$) 是周期函数, 且周期为 $\frac{T}{|\omega|}$.

●●► 规律方法

1. 利用定义判断函数奇偶性的步骤

① 首先确定函数的定义域, 并判断其定义域是否关于原点对称; ② 确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系; ③ 作出相应结论: 若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)-f(x)=0$, 则 $f(x)$ 是偶函数; 若 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)+f(x)=0$, 则 $f(x)$ 是奇函数.

2. 判断函数单调性的方法步骤

利用定义证明函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性的一般步骤: ① 任取 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$; ② 作差 $f(x_1)-f(x_2)$; ③ 变形(通常是因式分解和配方); ④ 定号(即判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负); ⑤ 下结论(即指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性).

3. 利用函数的单调性判断函数的最大(小)值的方法

① 利用二次函数的性质(配方法)求函数的最大(小)值; ② 利用图象求函数的最大(小)值; ③ 利用函数的单调性判断函数的最大(小)值: 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 在区间 $[b, c]$ 上单调递减, 则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最大值 $f(b)$; 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递减, 在区间 $[b, c]$ 上单调递增, 则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$.

易错提醒

1. 函数单调性判断忽略定义域

讨论函数单调性必须在其定义域内进行,因此要研究函数单调性必须先求函数的定义域,函数的单调区间是定义域的子集.

2. 函数奇偶性判断忽略定义域关于原点对称

判断函数的奇偶性,要注意定义域必须关于原点对称,有时还要对函数式化简整理,但必须注意使定义域不受影响.

3. 求函数最值时忽略“等号”的条件

无论用什么方法求最值,都要考虑“等号”是否成立,不等式法及判别式法尤其如此.

考点 4 基本初等函数(I)

记忆空间

1. 指数与指数函数

(1)指数函数的定义:函数 $y=a^x$ 叫做指数函数,其中 a 是一个大于零且不等于 1 的常数,定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象及性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图 象		

考点5 函数与方程、函数模型及其应用

●●► 记忆空间

1. 方程的根与函数的零点

(1)函数零点:对于函数 $y=f(x)(x\in D)$,把使 $f(x)=0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的零点.(2)函数零点的意义:函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数根,亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标,即:方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.(3)零点存在性定理:如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线,并且有 $f(a)f(b)<0$,那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点.即存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$,这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

2. 二分法

(1)定义:对于在区间 $[a,b]$ 上连续不断,且满足 $f(a)\cdot f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$,通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在区间一分为二,使区间的两个端点逐步逼近零点,进而得到零点近似值的方法叫做二分法.(2)给定精确度 ϵ ,用二分法求函数 $f(x)$ 的零点近似值的步聚如下:①确定区间 $[a,b]$,验证 $f(a)\cdot f(b)<0$,给定精确度 ϵ ;②求区间 (a,b) 的中点 x_1 ;③计算 $f(x_1)$:(i)若 $f(x_1)=0$,则 x_1 就是函数的零点;(ii)若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$,则令 $b=x_1$ (此时零点 $x_0\in(a,x_1)$);(iii)若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$,则令 $a=x_1$ (此时零点 $x_0\in(x_1,b)$);④判断是否达到精确度 ϵ ;即若 $|a-b|<\epsilon$,则得到零点近似值 a (或 b);否则重复步骤②~④.

●●► 规律方法

1. 函数零点个数(方程 $f(x)=0$ 的实根个数)的确定方法

(1)判断二次函数 $y=f(x)$ 的零点个数就是判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根个数.一般地由判别式 $\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$ 完成.(2)对于二次函数在某个闭区间上零点的个数以及不能用 Δ 判

断的二次函数的零点,则要结合二次函数的图象进行.(3)对于一般函数零点的个数的判断问题不仅要用在闭区间 $[a,b]$ 上是连续曲线,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$,还必须结合函数的图象和性质才能确定.函数有多少个零点——方程就有几个实根.

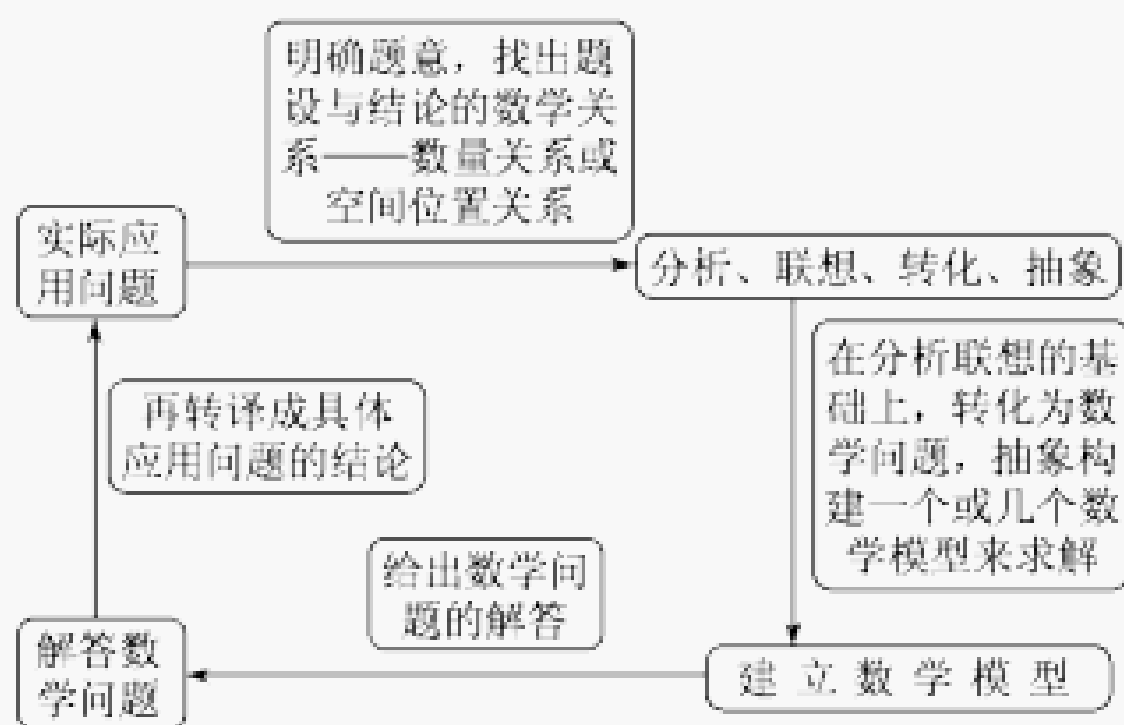
2. 利用二分法求方程近似解的口诀

定区间,找中点,中值计算两边看.

同号去,异号算,零点落在异号间.

周而复始怎么办?精确度上来判断.

3. 解答应用题的基本思想与程序



考点 6 导数及其应用

●●► 记忆空间

1. 基本初等函数的导数公式

$$C' = 0 (C \text{ 为常数}); (x^n)' = nx^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*);$$

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \ln a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

易错提醒

1. 对极值和最值的概念理解不准致误

(1)函数的极值是在局部范围内讨论的问题,是一个局部概念,而函数的最值是对整个定义域而言的,是在整个定义域范围内讨论的问题.(2)函数在其定义区间的最大值、最小值最多有一个,而函数的极值可能不止一个,也可能没有.(3)闭区间上连续的函数一定有最值,开区间内的函数不一定有最值,若有唯一的极值,则此极值一定是函数的最值.

2. 求曲线的切线方程忽略点 P 是否在曲线上而致误

(1) 利用导数求曲线过点 P 的切线方程时首先应考虑这个点是否在曲线上. (2) 不要直接利用公式 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, 还要考虑到曲线 $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线平行于 y 轴 (此时导数不存在).

对比总结

导数与函数的单调性的关系

(1) $f'(x) > 0$ 是 $f(x)$ 为增函数的充分不必要条件. 如函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 但 $f'(x) \geq 0$. (2) $f'(x) \geq 0$ 是 $f(x)$ 为增函数的必要不充分条件. (3) 当函数在某个区间内恒有 $f'(x) = 0$, 则 $f(x)$ 为常数, 函数不具有单调性.

考点 7 任意角的三角函数及诱导公式

记忆空间

1. 几种终边在特殊位置时对应角的集合

角的终边所在位置	角的集合
x 轴正半轴	$\{\alpha \mid \alpha = k \times 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
y 轴正半轴	$\{\alpha \mid \alpha = k \times 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

	$2\pi - \alpha$	$2k\pi + \alpha (k \in \mathbf{Z})$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1; \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

1. 象限角的三角函数值的符号

口诀:“一全正,二正弦,三正切,四余弦(其中一、二、三、四指的是象限)

2. 三角恒等式的证明方法

(1)从开始证得它等于另一边,一般由繁到简;

(2)左右同一法,即证明左右两边都等于同一个式子:

(3) 比较法: 即证明“左边 - 右边 = 0”或“ $\frac{\text{左边}}{\text{右边}} = 1$ ”.

考点 8 三角函数的图象与性质 (含函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象)

1. 正弦、余弦、正切函数的图象和性质

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			

(2) 函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 有以下结论: 当 $\varphi = k\pi$ 时, 为奇函数; 当 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, 为偶函数.

3. 三角函数对称轴、对称中心的求法

(1) 讨论函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象的对称轴、对称中心时, 往往令 $\omega x + \varphi = t$, 利用函数 $y = \sin t$ 的对称轴、对称中心来求解.

(2) 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的对称轴经过函数图象的最值点.

4. 三角函数值域(最值)的求法

求值域(最值)问题, 一般根据函数 $y = \sin x$ 与函数 $y = \cos x$ 的有界性, 将给出的函数变成以下几种形式

(1) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的一次式;

(2) $y = \frac{a\cos x + b}{c\cos x + d}$ 或 $y = \frac{a\sin x + b}{c\sin x + d}$;

(3) 关于 $\sin x$ (或 $\cos x$) 的二次函数式, 利用配方法求解.

考点 9 简单的三角恒等变换

●●► 记忆空间

1. 和角与差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) \left(\tan\varphi = \frac{b}{a} \right).$$

2. 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

变换 {

- (1) 角的变换 { 拆角
凑角
- (2) 函数名称的变换: “切割化弦”, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- (3) 常数代换: $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \tan 45^\circ$.
- (4) 幂的变换: (降幂) 如: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
- (5) 公式变形: 公式的正用、逆用、变形应用.
- (6) 结构变化: 对条件、结论进行调整或重新组合.

1. 已知三角函数值求角,选函数时,可按照下列原则

(1) 一般已知正切函数值, 选正切函数; (2) 已知正、余弦函数值, 函数的选取从以下三种情况考虑: 若角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2})$ 选正弦

或余弦函数;若角的范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 选正弦函数比余弦函数好;
若角的范围是 $(0, \pi)$ 选余弦函数比正弦函数好.

项数尽可能少;三角函数名称尽可能少;角尽可能小和少;次数尽可能低;分母尽可能不含三角式;尽可能不带根号;能求出值的求出值.

$$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta); 2\beta = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta); \alpha = (\alpha + \beta) - \beta; \alpha = \beta$$

4. 求已知条件下齐次分式型三角函数值的解答技巧

(1)一般地,分子分母中各项次数相同的分式为齐次分式.在求三角函数值时,常常出现“求已知条件下齐次分式型三角函数值”的问题,对于这种问题,如果能灵活运用“同除法”,往往能收到事半功倍之效.(2)重视一些特殊形式的变换技巧,尤其是对“1”的代换

$$\textcircled{1} \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}; \textcircled{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

易错提醒

1. 书写不全:涉及到角的推广问题和表示区间范围问题时没有标注 $k \in \mathbf{Z}$ 导致错误.
2. 已知三角函数求角时,易忽略角的范围而导致丢解或增解.
 - (1)含有平方关系的解答中忽视了符号而导致疏漏.
 - (2)没有注意到题目中角的隐含条件而出错.

考点 10 正弦定理和余弦定理

●●► 记忆空间

1. 正弦定理

定理内容	在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等
数学表达式	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
用途	(1)已知两角和任一边,求其他两边和一角; (2)已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角,从而进一步求其他.

定理 内容	三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与其夹角的余弦的积的 2 倍.
数学 表达式	形式 1: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$ 形式 2: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$
用途	(1) 已知三边, 求三个角; (2) 已知两边和它们的夹角, 求第三边和其他两个角.

2. 判断三角形形状常用方法

(1)利用已知条件寻找边之间的关系;

(2)寻找角之间的关系;

(3)可利用正弦定理或余弦定理进行边角互化,以达到化异为同的效果.

考点 11 平面向量的线性运算及基本定理

●●► 记忆空间

1. 向量的有关概念

(1)向量:既有大小又有方向的量叫向量,一般用 $a, b, c, \dots$ 来表示,或用有向线段的起点与终点的大写字母表示,如 $\overrightarrow{AB}$. 向量的大小,即向量的模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

(2)零向量:长度为零的向量,记为 $\mathbf{0}$,其方向是任意的,零向量和任何向量平行.

(3)单位向量:模为 1 个单位长度的向量.

(4)相等向量:长度相等且方向相同的向量.相等向量经过平移后总可以重合,记为 $a = b$.

(5)共线向量(平行向量):如果向量的基线互相平行或重合,则称这些向量共线或平行.这就是说,共线向量的方向相同或相反,向量 a 平行于 b ,记作 $a \parallel b$.

2. 向量数乘运算满足下列运算律

设 λ, μ 为实数,则:

(1) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; (2) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$; (3) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

注:数乘向量与数和数的乘法是有区别的,前者是一个向量,后者是一个实数.

3. 平面向量基本定理

如果 $a = \lambda b$,则 $a \parallel b$;反之,如果 $a \parallel b (b \neq \mathbf{0})$,是一定存在一个

实数 λ , 使 $a = \lambda b$.

平面向量基本定理: 如果 e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任一向量 a , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. 我们把不共线向量 e_1, e_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

4. 平面向量的坐标运算

(1) 若 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则 $a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
 $a - b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

(2) 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

(3) 若 $a = (x, y)$ 和实数 λ , 则 $\lambda a = (\lambda x, \lambda y)$.

●●► 规律方法

1. 三点共线的判断方法

判断三点是否共线, 先求由三点组成的任两个向量, 然后再按两向量共线进行判定, 即已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, 若 $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$, 则 A, B, C 三点共线.

2. 向量的线性运算

平面内每一向量 a 都有唯一对应坐标 (x, y) , 反之 (x, y) 唯一对应着 $\overrightarrow{OA}$ (由向量相等, 可看成与 a 唯一对应). 因而向量的线性运算 (向量的加法、减法及实数与向量的积) 可转化为坐标运算, 借助坐标运算可讨论向量平行 (共线) 等, 可使问题变得简单, 目标明确.

考点 12 平面向量的数量积

●●► 记忆空间

1. 两个非零向量的夹角

已知非零向量 a 与 b , 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 则 $\angle AOB = \theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫 a 与 b 的夹角. ;

说明:(1)当 $\theta=0^\circ$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向;

(2)当 $\theta=180^\circ$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向;

(3)当 $\theta=90^\circ$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直,记 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$;

(4)注意两向量的夹角定义,两向量必须是同起点的,范围 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

2. 数量积的概念

已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$,它们的夹角为 θ ,则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$ 叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积(或内积).规定 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$;

向量的投影: $|\mathbf{b}| \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \in \mathbf{R}$,称为向量 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的投影.

3. 数量积的几何意义: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 等于 $\mathbf{a}$ 的长度与 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的投影的乘积.

4. 向量数量积的性质

(1)向量的模与平方的关系: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = |\mathbf{a}|^2$.

(2)乘法公式成立: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$; $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$;

(3)平面向量数量积的运算律:交换律成立: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;对实数的结合律成立: $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) (\lambda \in \mathbf{R})$;分配律成立: $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \pm \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \pm \mathbf{b})$.

(4)向量的夹角: $\cos \theta = \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

当且仅当两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同方向时, $\theta = 0^\circ$,当且仅当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反方向时 $\theta = 180^\circ$,同时 $\mathbf{0}$ 与其他任何非零向量之间不谈夹角这一问题.

(5)两个向量的数量积的坐标运算:已知两个向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$,则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

(6)两个非零向量垂直的充要条件: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

(7)平面内两点间的距离公式:设 $\mathbf{a} = (x, y)$,则 $|\mathbf{a}|^2 = x^2 + y^2$ 或 $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.如果表示向量 $\mathbf{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐

标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 那么 $|a| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (平面内两点间的距离公式).

●●► 规律方法

1. 求平面向量数量积的步骤

(1) 求 a 与 b 的夹角 $\theta, \theta \in [0, \pi]$;

(2) 分别求 $|a|$ 与 $|b|$;

(3) 求数量积, 即 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$, 要特别注意书写时 a 与 b 之间用实心圆心“ $\cdot$ ”连结, 而不能用“ $\times$ ”连结, 也不能省去.

2. 求解夹角问题的解题方法

解决向量的夹角问题时要借助于公式 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$, 要掌握向量坐标形式的运算, 向量的模的求法等. 对于 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ 这个公式的变形应用应该做到熟练, 另外向量垂直(平行)的充要条件必须掌握.

考点 13 数系的扩充与复数的引入

●●► 记忆空间

一、数系的扩充和复数的概念

1. 复数的代数形式: 形如 $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的数叫做复数, 并且把 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的这一表现形式叫做复数的代数形式, 其中的 a 叫做复数的实部, b 叫做复数的虚部.

2. 复数相等的充要条件

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ 且 } b = d (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

二、复数的几何意义

1. 复数可以用平面直角坐标系的点来唯一表示, 于是: 复数集 $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 与坐标系中的点集 $\{(a, b) | a, b \in \mathbf{R}\}$, 可以建立一一对应关系.

2. 复数 $z = a + bi$ 对应复平面内的点 $Z(a, b)$.

3. 由于平面向量与坐标平面的点一一对应,于是有:复数 $z = a + bi$ 一一对应平面向量 $\overrightarrow{OZ}$.

4. 复数的模就是这个复数对应的向量的模,复数 $z = a + bi$ 的模为 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

三、复数代数形式的四则运算

1. 复数的加法、减法

(1) 运算法则 $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$, 其运算法则类似于多项式的合并同类项.

(2) 复数加法的运算律:对于任意的 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, 有:

交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. 复数代数形式的乘法运算

(1) 运算法则: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

(2) 运算律:交换律: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. 结合律: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. 分配律: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

(3) 虚数 i 的乘方及其规律: $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \dots, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n} = 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 即具有周期性且最小正周期为 4.

(4) 共轭复数: $a + bi$ 与 $a - bi$ 互为共轭复数, 即当两个复数的实部相等, 虚部互为相反数时, 这两个复数叫做互为共轭复数.

3. 复数代数形式的除法运算

运算法则: $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$ ($c + di \neq 0$).

●●► 规律方法

1. 解复数问题常用的方法

(1) 设复数的代数形式为 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 以代入法解题是一种基本而常用的方法;

(2) 复数的相等 ($a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$)) 是实现复数运算转化为实数运算的重要方法.

3. 两个几何意义

① $|z - z_0|$ 的几何意义为 z 所对应的点到 z_0 所对应的点的距离; ② $|z - z_0| = r (r > 0)$ 中 z 所对应的点为以复数 z_0 所对应的点为圆心, 半径为 r 的圆上的点.

考点 14 数列的概念与简单表示法

●●► 记忆空间

2. 数列的分类

(2)按项之间的大小关系:递增数列、递减数列、常数列与摆动数列.

3. 通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与项数之间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.

	函数	数列(特殊的函数)
定义域	$\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的子集	$\mathbf{N}^*$ 或它的子集
解析式	$y=f(x)$	$a_n=f(n)$
图象	点的集合	一些离散的点的集合

4. 递推公式

(1)定义:已知数列 $\{a_n\}$ 的前一项(或前几项),且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} ($n>1$)(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示,这个公式就叫做这个数列的递推公式.(2)用递推公式求通项公式的方法:观察法、累加法、叠乘法.

●●► 规律方法

要想迅速地写出数列的通项公式,应熟练地掌握一些基本数列的通项公式

(1)数列 $1,2,3,4,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=n$;(2)数列 $1,3,5,7,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=2n-1$;(3)数列 $2,4,6,8,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=2n$;(4)数列 $1,2,4,8,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=2^{n-1}$;(5)数列 $1,4,9,16,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=n^2$;(6)数列 $-1,1,-1,1,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=(-1)^n$.

考点 15 等差数列、等比数列

●●► 记忆空间

1. 等差数列通项公式: $a_n=a_1+(n-1)d$.

2. 等差数列的前 n 项和公式

$$\text{公式(1): } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

$$\text{公式(2): } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

3. 等差数列奇数项和与偶数项和

$$(1) \text{当项数为偶数 } 2n \text{ 时, } S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}};$$

$$(2) \text{当项数为奇数 } 2n-1 \text{ 时, } S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}.$$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的性质

(1) $a_n=a_m+(n-m)d$;(2)若 $m+n=p+q$,则有 $a_m+a_n=a_p+a_q$.

6. 等比数列的前 n 项和

等比数列的前 n 项和	公比	适用公式
	$q=1$	$S_n = na_1$
	$q \neq 1$	$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$

① $a_n = a_m q^{n-m}$; ② 若 $m+n=p+q$, 则有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$; ③ 当 $q \neq -1$ 时, $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍然是等比数列.

规律方法

2. 等比数列的判定方法

3. 求等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 最大(小)值的方法

(1) 利用数列的单调性 ① $d > 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为递增数列, 若 $a_1 > 0$ 则

$S_1 = a_1$ 最小;若 $a_1 < 0$ 则满足 $\begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 的 S_n 最小, ② $d < 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为递减数列, 若 $a_1 < 0$ 则 $S_1 = a_1$ 最大;若 $a_1 > 0$ 则满足 $\begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 的 S_n 最大, (2) 将 S_n 看作关于 n 的二次函数(注意 $n \in \mathbf{N}^*$), 利用二次函数的图象或配方法, 通过配方得 $S_n = A \left(n + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2}{4A}$, 利用二次函数的性质求最值, 但特别注意 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 n 为最接近 $-\frac{B}{2A}$ 的正整数时, S_n 取最值.

●●► 易错提醒

1. 对公式 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 的使用忽略验证导致失误

给出 S_n 与 n 的关系式或 S_n 与 a_n 的关系式, 经常用到 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 注意到 $n=1$ 时, $a_1 = S_1$ 了吗? 注意到 $n \geq 2$ 的情形了吗?

即 $a_n = \begin{cases} S_1 (n=1), \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*), \end{cases}$ 注意 $n=1$ 的情况, 特别验证.

2. 等比数列勿忘 $q=1$; 要注意分类讨论: 当 $q=1$ 时, $S_n = na_1$;

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

考点 16 数列求和

●●► 记忆空间

数列的求和方法

1. 裂项相消法

将一个数列分成若干个可以直接求和的数列, 然后进行拆项重组, 或将通项分成两项或多项的差, 通过相加相互抵消, 最后只剩下有限项的和.

如: ① $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$;

$$\textcircled{2} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

2. 错位相减法

对于数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 其中 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别是等差数列和等比数列,这种形式的求和采用错位相减法.

3. 倒序相加(乘)法

如果一个数列 $\{a_n\}$,与首末两项等距离的两项之和(积)等于首末两项之和(积),可采用正着写和倒着写的两个式子相加(乘),就得到一个常数数列的和(积)进而求出前 n 项和.

4. 分组转化法

把数列每一项分成几项或把数列的项重新组合,使其转化成等差或等比数列求解.

●●► 易错提醒

裂项相消法忽略系数的错误

在运用裂项相消法计算时,易忽视系数,如 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ 而不是 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$.

考点 17 不等关系与一元二次不等式

●●► 记忆空间

1. 两实数的大小

(1) $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$; (2) $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$; (3) $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式的基本性质

(1) $a<b \Leftrightarrow b>a$ (对称性); (2) $a>b, b>c \Leftrightarrow a>c$ (传递性); (3) $a>b \Rightarrow a+c>b+c$ (可加性); (4) $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$ (叠加性); (5) $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc, a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$ (伸缩性); (6) $a>b \geqslant 0$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/307050140034010030>