

湖北省襄阳四中 2022-2023 学年高三下学期期中练习数学试题试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 有一圆柱状有盖铁皮桶（铁皮厚度忽略不计），底面直径为 20 cm，高度为 100 cm，现往里面装直径为 10 cm 的球，在能盖住盖子的情况下，最多能装（ ）

（附： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236$ ）

- A. 22 个 B. 24 个 C. 26 个 D. 28 个

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, & x > 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

3. 某装饰公司制作一种扇形板状装饰品，其圆心角为 120° ，并在扇形弧上正面等距安装 7 个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个，导线接头忽略不计)，已知扇形的半径为 30 厘米，则连接导线最小大致需要的长度为（ ）

- A. 58 厘米 B. 63 厘米 C. 69 厘米 D. 76 厘米

4. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $f(x)$ 是定义在 R 上的减函数， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$)，则（ ）

- A. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ B. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
C. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ D. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

5. 点 M 在曲线 $G: y = 3 \ln x$ 上，过 M 作 x 轴垂线 l ，设 l 与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 交于点 N ， $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{3}$ ，且 P 点的纵坐标始终为 0，则称 M 点为曲线 G 上的“水平黄金点”，则曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 设 F 为抛物线 $x = 4y^2$ 的焦点， A, B, C 为抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ ，则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| =$ （ ）.

- A. 9 B. 6 C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{16}$

7. 已知整数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 10$, 记点 M 的坐标为 (x, y) , 则点 M 满足 $x + y \geq \sqrt{5}$ 的概率为 ()

- A. $\frac{9}{35}$ B. $\frac{6}{35}$ C. $\frac{5}{37}$ D. $\frac{7}{37}$

8. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点 (A 在 x 轴上方), 且满足 $|AF| = 3|BF|$, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. 3

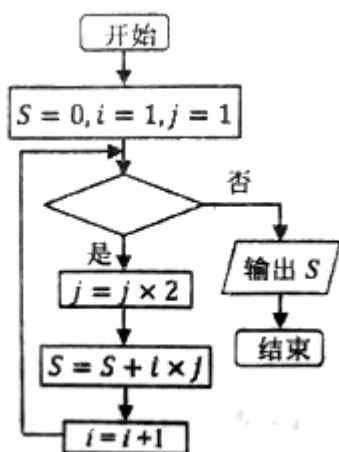
10. 设 $P = \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $Q = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, 则

- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$
C. $C_R P \subseteq Q$ D. $Q \subseteq C_R P$

11. 已知直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, F 为 C 的焦点, 若 $|FA| = 2|FB|$, 则 $|FA| =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 如图所示程序框图, 若判断框内为“ $i < 4$ ”, 则输出 $S =$ ()



- A. 2 B. 10 C. 34 D. 98

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 动点 P 到直线 $x = -1$ 的距离和他到点 $F(1, 0)$ 距离相等, 直线 AB 过 $(4, 0)$ 且交点 P 的轨迹于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆必过_____.

14. 若幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ ，则其单调递减区间为_____.

15. 函数 $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + x - 1$ 的值域为_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则， $a_n =$ _____.若存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_n \leq \frac{n+1}{n} \cdot \lambda$ 成立，

则实数 λ 的最小值为_____

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 随着现代社会的发展，我国对于环境保护越来越重视，企业的环保意识也越来越强.现某大型企业为此建立了 5 套环境监测系统，并制定如下方案：每年企业的环境监测费用预算定为 1200 万元，日常全天候开启 3 套环境监测系统，若至少有 2 套系统监测出排放超标，则立即检查污染源处理系统；若有且只有 1 套系统监测出排放超标，则立即同时启动另外 2 套系统进行 1 小时的监测，且后启动的这 2 套监测系统中只要有 1 套系统监测出排放超标，也立即检查污染源处理系统.设每个时间段（以 1 小时为计量单位）被每套系统监测出排放超标的概率均为 $p (0 < p < 1)$ ，且各个时间段每套系统监测出排放超标情况相互独立.

- (1) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时，求某个时间段需要检查污染源处理系统的概率；
- (2) 若每套环境监测系统运行成本为 300 元/小时（不启动则不产生运行费用），除运行费用外，所有的环境监测系统每年的维修和保养费用需要 100 万元.现以此方案实施，问该企业的环境监测费用是否会超过预算(全年按 9000 小时计算)？并说明理由.

18. (12 分) 已知函数 $\varphi(x) = |x - 1| + |x + 2|$ ，记 $\varphi(x)$ 的最小值为 φ .

- (I) 解不等式 $\varphi(x) \leq 5$;
- (II) 若正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{5}$ ，求证： $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2} \geq 2\varphi$.

19. (12 分) 随着改革开放的不断深入，祖国不断富强，人民的生活水平逐步提高，为了进一步改善民生，2019 年 1 月 1 日起我国实施了个人所得税的新政策，其政策的主要内容包括：(1) 个税起征点为 5000 元；(2) 每月应纳税所得额(含税) = 收入 - 个税起征点 - 专项附加扣除；(3) 专项附加扣除包括①赡养老人费用②子女教育费用③继续教育费用④大病医疗费用……等。其中前两项的扣除标准为：①赡养老人费用：每月扣除 2000 元②子女教育费用：每个子女每月扣除 1000 元。新个税政策的税率表部分内容如下：

级数	一级	二级	三级	四级	...
----	----	----	----	----	-----

每月应纳税所得额（含税）	不超过 3000 元的部分	超过 3000 元至 12000 元的部分	超过 12000 元至 25000 元的部分	超过 25000 元至 35000 元的部分	...
税率（%）	3	10	20	25	...

（1）现有李某月收入 29600 元，膝下有一名子女，需要赡养老人，除此之外，无其它专项附加扣除．请问李某月应缴纳的个税金额为多少？

（2）为研究月薪为 20000 元的群体的纳税情况，现收集了某城市 500 名的公司白领的相关资料，通过整理资料可知，有一个孩子的有 400 人，没有孩子的有 100 人，有一个孩子的人中有 300 人需要赡养老人，没有孩子的人中有 50 人需要赡养老人，并且他们均不符合其它专项附加扣除（受统计的 500 人中，任何两人均不在一个家庭）．若他们的月收入均为 20000 元，依据样本估计总体的思想，试估计在新个税政策下这类人群缴纳个税金额 X 的分布列与期望．

20．（12 分）某工厂的机器上有一种易损元件 A ，这种元件在使用过程中发生损坏时，需要送维修处维修．工厂规定当日损坏的元件 A 在次日早上 8：30 之前送到维修处，并要求维修人员当日必须完成所有损坏元件 A 的维修工作．每个工人独立维修 A 元件需要时间相同．维修处记录了某月从 1 日到 20 日每天维修元件 A 的个数，具体数据如下表：

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	10 日
元件 A 个数	9	15	12	18	12	18	9	9	24	12
日期	11 日	12 日	13 日	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
元件 A 个数	12	24	15	15	15	12	15	15	15	24

从这 20 天中随机选取一天，随机变量 X 表示在维修处该天元件 A 的维修个数．

- （Ⅰ）求 X 的分布列与数学期望；
- （Ⅱ）若 $a, b \in N^*$ ，且 $b-a=6$ ，求 $P(a \leq X \leq b)$ 最大值；
- （Ⅲ）目前维修处有两名工人从事维修工作，为使每个维修工人每天维修元件 A 的个数的数学期望不超过 4 个，至少需要增加几名维修工人？（只需写出结论）

21. (12分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为实数). 以坐标原点 O 为

极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 8 \sin \theta$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M .

(1) 求线段 AB 长的最小值;

(2) 求点 M 的轨迹方程.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = |4x - 1| - |x + 2|$.

(1) 解不等式 $f(x) > 2$;

(2) 记函数 $y = f(x) + 5|x + 2|$ 的最小值为 k , 正实数 a, b 满足 $a + 6b = \frac{k}{9}$, 求证: $\sqrt{\frac{6b+a}{ab}} \geq 2\sqrt{6}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. C

【解析】

计算球心连线形成的正四面体相对棱的距离为 $5\sqrt{2}$ cm, 得到最上层球面上的点距离桶底最远为 $(10 + 5\sqrt{2}(n-1))$ cm,

得到不等式 $10 + 5\sqrt{2}(n-1) \leq 100$, 计算得到答案.

【详解】

由题意, 若要装更多的球, 需要让球和铁皮桶侧面相切, 且相邻四个球两两相切,

这样, 相邻的四个球的球心连线构成棱长为 10 cm 的正面体,

易求正四面体相对棱的距离为 $5\sqrt{2}$ cm, 每装两个球称为“一层”, 这样装 n 层球,

则最上层球面上的点距离桶底最远为 $(10 + 5\sqrt{2}(n-1))$ cm,

若想要盖上盖子, 则需要满足 $10 + 5\sqrt{2}(n-1) \leq 100$, 解得 $n \leq 1 + 9\sqrt{2} \approx 13.726$,

所以最多可以装 13 层球, 即最多可以装 26 个球.

故选：C

【点睛】

本题考查了圆柱和球的综合问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

2. B

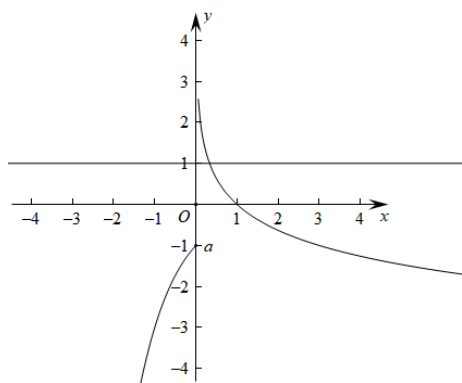
【解析】

利用换元法设 $t = f(x)$ ，则等价于 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根，分 $a < 0, a = 0, a > 0$ 三种情况进行讨论，结合函数的图象，求出 a 的取值范围.

【详解】

解：设 $t = f(x)$ ，则 $f(t) = 0$ 有且只有一个实数根.

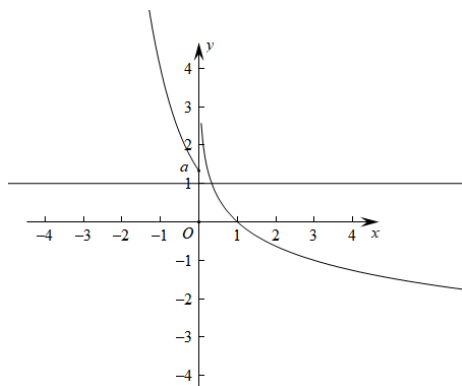
当 $a < 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$ ，由 $f(t) = 0$ 即 $\log_{\frac{1}{3}} t = 0$ ，解得 $t = 1$ ，



结合图象可知，此时当 $t = 1$ 时，得 $f(x) = 1$ ，则 $x = \frac{1}{3}$ 是唯一解，满足题意；

当 $a = 0$ 时，此时当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ ，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当 $a > 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \in [a, +\infty)$ ，此时 $f(x)$ 最小值为 a ，



结合图象可知，要使得关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根，此时 $a > 1$.

综上所述： $a < 0$ 或 $a > 1$.

故选:A.

【点睛】

本题考查了函数方程根的个数的应用.利用换元法，数形结合是解决本题的关键.

3. B

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小，可将导线的长视为扇形弧长，利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 6 等分，

所以每部分的弦长和弧长相差很小，可以用弧长近似代替弦长，

故导线长度约为 $\frac{2\pi}{3} \times 30 = 20\pi \approx 63$ (厘米).

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了扇形弧长的计算，属于容易题.

4. A

【解析】

根据符号函数的解析式，结合 $f(x)$ 的单调性分析即可得解.

【详解】

根据题意， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ，而 $f(x)$ 是 R 上的减函数，

当 $x > 0$ 时， $x < ax$ ，则有 $f(x) > f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) > 0$ ，此时 $\text{sgn}[g(x)] = 1$ ，

当 $x = 0$ 时， $x = ax$ ，则有 $f(x) = f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) = 0$ ，此时 $\text{sgn}[g(x)] = 0$ ，

当 $x < 0$ 时， $x > ax$ ，则有 $f(x) < f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) < 0$ ，此时 $\text{sgn}[g(x)] = -1$ ，

综合有： $\text{sgn}[g(x)] = \text{sgn}(x)$ ；

故选: A.

【点睛】

此题考查函数新定义问题，涉及函数单调性辨析，关键在于读懂定义，根据自变量的取值范围分类讨论.

5. C

【解析】

设 $M(t, 3 \ln t)$, 则 $N\left(t, \frac{1}{t}\right)$, 则 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{2t}{3}, \ln t + \frac{1}{3t}\right)$, 即可得 $\ln t + \frac{1}{3t} = 0$, 设 $g(t) = \ln t + \frac{1}{3t}$, 利用导函数判断 $g(t)$ 的零点的个数, 即为所求.

【详解】

设 $M(t, 3 \ln t)$, 则 $N\left(t, \frac{1}{t}\right)$, 所以 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{3} = \left(\frac{2t}{3}, \ln t + \frac{1}{3t}\right)$,

依题意可得 $\ln t + \frac{1}{3t} = 0$,

设 $g(t) = \ln t + \frac{1}{3t}$, 则 $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^2} = \frac{3t-1}{3t^2}$,

当 $0 < t < \frac{1}{3}$ 时, $g'(t) < 0$, 则 $g(t)$ 单调递减; 当 $t > \frac{1}{3}$ 时, $g'(t) > 0$, 则 $g(t)$ 单调递增,

所以 $g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \ln 3 < 0$, 且 $g\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 + \frac{e^2}{3} > 0$, $g(1) = \frac{1}{3} > 0$,

$\therefore g(t) = \ln t + \frac{1}{3t} = 0$ 有两个不同的解, 所以曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为 2.

故选: C

【点睛】

本题考查利用导函数处理零点问题, 考查向量的坐标运算, 考查零点存在性定理的应用.

6. C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ 可得 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{16}$, 利用定义将 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}|$ 用 x_1, x_2, x_3 表示即可.

【详解】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ 及 $F\left(\frac{1}{16}, 0\right)$,

得 $\left(x_1 - \frac{1}{16}, y_1\right) + \left(x_2 - \frac{1}{16}, y_2\right) + \left(x_3 - \frac{1}{16}, y_3\right) = (0, 0)$, 故 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{16}$,

所以 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = x_1 + \frac{1}{16} + x_2 + \frac{1}{16} + x_3 + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用抛物线定义求焦半径的问题, 考查学生等价转化的能力, 是一道容易题.

7. D

【解析】

列出所有圆内的整数点共有 37 个，满足条件的有 7 个，相除得到概率.

【详解】

因为 x, y 是整数，所以所有满足条件的点 $M(x, y)$ 是位于圆 $x^2 + y^2 = 10$ (含边界) 内的整数点，满足条件

$x^2 + y^2 \leq 10$ 的整数点有 $(0, 0), (0, \pm 1), (0, \pm 2), (0, \pm 3), (\pm 1, 0),$

$(\pm 2, 0), (\pm 3, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 2, \pm 1), (\pm 3, \pm 1), (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 2), (\pm 1, \pm 3)$ 共 37 个，

满足 $x + y \geq \sqrt{5}$ 的整数点有 7 个，则所求概率为 $\frac{7}{37}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了古典概率的计算，意在考查学生的应用能力.

8. B

【解析】

分析：首先利用同角三角函数关系式，结合题中所给的角的范围，求得 $\cos \alpha$ 的值，之后借助于倍角公式，将待求的式子转化为关于 $\cos \alpha$ 的式子，代入从而求得结果.

详解：根据题中的条件，可得 α 为锐角，

根据 $\tan \alpha = 2$ ，可求得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

而 $\cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 3}{5}$ ，故选 B.

点睛：该题考查的是有关同角三角函数关系式以及倍角公式的应用，在解题的过程中，需要对已知真切求余弦的方法要明确，可以应用同角三角函数关系式求解，也可以结合三角函数的定义式求解.

9. B

【解析】

设直线 l 的方程为 $x = my + 1$ 代入抛物线方程，利用韦达定理可得 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$ ，由 $|AF| = 3|BF|$ 可知

$\overline{AF} = 3\overline{FB}$ 所以可得 $y_1 = -3y_2$ 代入化简求得参数，即可求得结果.

【详解】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ($y_1 > 0, y_2 < 0$). 易知直线 l 的斜率存在且不为 0，设为 $\frac{1}{m}$ ，则直线 l 的方程为 $x = my + 1$.

与抛物线方程联立得 $y^2 = 4(my + 1)$ ，所以 $y_1 y_2 = -4$ ， $y_1 + y_2 = 4m$. 因为 $|AF| = 3|BF|$ ，所以 $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ ，得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/307156105056006164>