

湖南省校级联考 2024 年高考数学必刷试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e^2 \\ e^2 + 2 - x, & x > e^2 \end{cases}$ ，存在实数 $x_1 < x_2 < x_3$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ，则 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的最大值为（ ）

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ D. $\frac{1}{e^2}$

2. 金庸先生的武侠小说《射雕英雄传》第 12 回中有这样一段情节，“……洪七公道：肉只五种，但猪羊混咬是一般滋味，獐牛同嚼又是一般滋味，一共有几般变化，我可算不出了”。现有五种不同的肉，任何两种（含两种）以上的肉混合后的滋味都不一样，则混合后可以组成的所有不同的滋味种数为（ ）

- A. 20 B. 24 C. 25 D. 26

3. 已知 m, n 表示两条不同的直线， α, β 表示两个不同的平面，且 $m \perp \alpha, n \subset \beta$ ，则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $m \parallel n$ ”的（ ）条件。

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

4. 已知 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ ，那么 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 是 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 将函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上每一点的横坐标变为原来的 2 倍，再将图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数

$y = g(x)$ 的图象，则函数 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为（ ）

- A. $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ C. $(\pi, 0)$ D. $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$

6. 若 $x \in (0, 1)$ ， $a = \ln x$ ， $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x}$ ， $c = e^{\ln x}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $b > c > a$ B. $c > b > a$ C. $a > b > c$ D. $b > a > c$

7. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = k) = C_2^k (1 - p_i)^{2-k} p_i^k, i = 1, 2, k = 0, 1, 2$. 若 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$, 则 ()

- A. $E(\xi_1) < E(\xi_2), D(\xi_1) < D(\xi_2)$

B. $E(\xi_1) < E(\xi_2), D(\xi_1) > D(\xi_2)$
- C. $E(\xi_1) > E(\xi_2), D(\xi_1) < D(\xi_2)$

D. $E(\xi_1) > E(\xi_2), D(\xi_1) > D(\xi_2)$

8. 已知 x 与 y 之间的一组数据:

x	1	2	3	4
y	m	3.2	4.8	7.5

若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 2.1x - 0.25$, 则 m 的值为 ()

- A. 1.5

B. 2.5
- C. 3.5

D. 4.5

9. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 4, |\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $|\vec{c} - \vec{b}|$ 的最大值为 ()

- A. $5\sqrt{2} + \sqrt{3}$

B. $5\sqrt{2} - \sqrt{3}$
- C. $2\sqrt{13} + \sqrt{3}$

D. $2\sqrt{13} - \sqrt{3}$

10. 设 i 是虚数单位, $a \in R, \frac{5+ai}{a+i} = 3-2i$, 则 $a =$ ()

- A. -2

B. -1
- C. 1

D. 2

11. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0,1)$, 若抛物线 C 上的点 A 关于直线 $l: y = 2x + 2$ 对称的点 B 恰好在射线 $y = 11(x \leq 3)$ 上, 则直线 AF 被 C 截得的弦长为 ()

- A. $\frac{91}{9}$

B. $\frac{100}{9}$
- C. $\frac{118}{9}$

D. $\frac{127}{9}$

12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与椭圆交于 P, Q 两点. 若 $\triangle PF_2Q$

的内切圆与线段 PF_2 在其中点处相切, 与 PQ 相切于点 F_1 , 则椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 4-2i$, 其中 i 是虚数单位, 若 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $\bar{z} =$ _____.

14. 已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_6, a_{12} 依次成等比数列, 则 $\frac{a_{12}}{a_2}$ 的值是_____.

15. 《易经》是中国传统文化中的精髓，如图是易经八卦（含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦），每一卦由三根线组成（"▬"表示一根阳线，"☯"表示一根阴线）

"表示一根阴线)，从八卦中任取两卦，这两卦的六根线中恰有两根阳线，四根阴线的概率为_____.

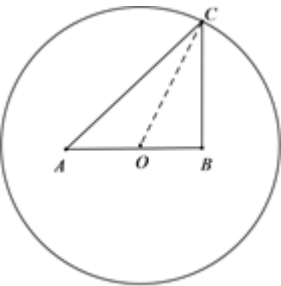


16. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，点 P 为抛物线 C 上一动点，过点 P 作圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = 4$ 的切线，切点分别为 A, B ，则线段 AB 长度的取值范围为_____.

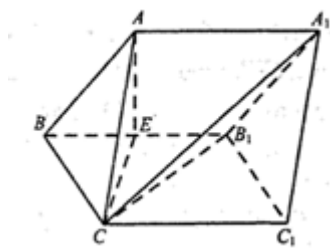
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某公园准备在一圆形水池里设置两个观景喷泉，观景喷泉的示意图如图所示， A, B 两点为喷泉，圆心 O 为 AB 的中点，其中 $OA = OB = a$ 米，半径 $OC = 10$ 米，市民可位于水池边缘任意一点 C 处观赏。

- (1) 若当 $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$ 时， $\sin \angle BCO = \frac{1}{3}$ ，求此时 a 的值；
- (2) 设 $y = CA^2 + CB^2$ ，且 $CA^2 + CB^2 \leq 232$.
 - (i) 试将 y 表示为 a 的函数，并求出 a 的取值范围；
 - (ii) 若同时要求市民在水池边缘任意一点 C 处观赏喷泉时，观赏角度 $\angle ACB$ 的最大值不小于 $\frac{\pi}{6}$ ，试求 A, B 两处喷泉间距离的最小值。



18. (12分) 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BCC_1B_1 是菱形, $AC=BC=2$, $\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$, 点 A 在平面 BCC_1B_1 上的投影为棱 BB_1 的中点 E .



- (1) 求证: 四边形 ACC_1A_1 为矩形;
- (2) 求二面角 $E-B_1C-A_1$ 的平面角的余弦值.

19. (12分) 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -2)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (1) 求椭圆 M 的方程;
- (2) 经过点 $E(0, 1)$ 且斜率存在的直线 l 交椭圆于 Q, N 两点, 点 B 与点 Q 关于坐标原点对称. 连接 AB, AN . 求证: 存在实数 λ , 使得 $k_{AN} = \lambda k_{AB}$ 成立.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = |x-1| + |x-a|$

- (I) 当 $a=2$ 时, 解不等式 $f(x) \geq 4$.
- (II) 若不等式 $f(x) \geq 2a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围

21. (12分) 设前 n 项积为 T_n 的数列 $\{a_n\}$, $a_n = \lambda - T_n$ (λ 为常数), 且 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列.

- (I) 求 λ 的值及数列 $\{T_n\}$ 的通项公式;
- (II) 设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_n = (2n+3)T_n$, 求 $S_{2n} - S_n - 2n$ 的最小值.

22. (10分) 已知数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 若对于任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $m \neq n$, 都有

$$\frac{2S_{m+n}}{m+n} = a_m + a_n + \frac{a_m - a_n}{m-n}.$$

- (1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列
- (2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_{n+1}a_{n+2} - a_n^2 (n \in \mathbb{N}^*)$, 且等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{1}{3}$, 存在正整数 p, q , 使得 $a_p + c_q$, 求 $|a_q|$ 的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

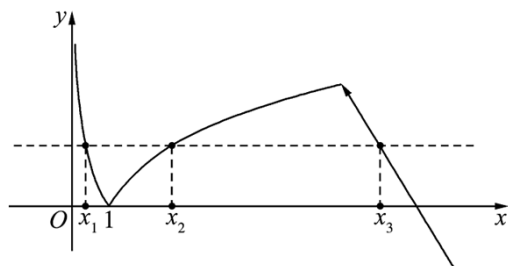
1、A

【解析】

画出分段函数图像，可得 $x_1x_2=1$ ，由于 $\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{\ln x_2}{x_2}$ ，构造函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ ，利用导数研究单调性，分

析最值，即得解.

【详解】



由于 $0 < x_1 < 1 < x_2 < e^2 < x_3 < e^2 + 2$,

$$-\ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 x_2 = 1,$$

$$\text{由于 } \frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (1, e^2),$$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow g(x) \text{ 在 } (1, e) \nearrow, (e, e^2) \searrow$$

$$\text{故 } g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了导数在函数性质探究中的应用，考查了学生数形结合，转化划归，综合分析，数学运算的能力，属于较难题.

2、D

【解析】

利用组合的意义可得混合后所有不同的滋味种数为 $C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$ ，再利用组合数的计算公式可得所求的种数.

【详解】

混合后可以组成的所有不同的滋味种数为 $C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 20 + 5 + 1 = 26$ (种),

故选: D.

【点睛】

本题考查组合的应用, 此类问题注意实际问题的合理转化, 本题属于容易题.

3、 B

【解析】

根据充分必要条件的概念进行判断.

【详解】

对于充分性: 若 $\alpha \perp \beta$, 则 m, n 可以平行, 相交, 异面, 故充分性不成立;

若 $m \parallel n$, 则 $n \perp \alpha, n \subset \beta$, 可得 $\alpha \perp \beta$, 必要性成立.

故选: B

【点睛】

本题主要考查空间中线线, 线面, 面面的位置关系, 以及充要条件的判断, 考查学生综合运用知识的能力. 解决充要条件判断问题, 关键是要弄清楚谁是条件, 谁是结论.

4、 B

【解析】

由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 可得 $\cos 2\alpha = 0$, 解出即可判断出结论.

【详解】

解: 因为 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\therefore \cos \alpha \cos(-\alpha) + \sin \alpha \sin(-\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha = 0.$$

$$\therefore 2\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 是 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 的必要不充分条件.

故选: B.

【点睛】

本题考查了向量数量积运算性质、三角函数求值、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

5、D

【解析】

根据函数图象的变换规律可得到 $y = g(x)$ 解析式，然后将四个选项代入逐一判断即可.

【详解】

解： $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上每一点的横坐标变为原来的 2 倍, 得到 $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

再将图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = \sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ 的图象

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right), \quad g\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

故选: D

【点睛】

考查三角函数图象的变换规律以及其有关性质, 基础题.

6、A

【解析】

利用指数函数、对数函数的单调性直接求解.

【详解】

$$\because x \in (0, 1),$$

$$\therefore a = \ln x < 0,$$

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

$$0 < c = e^{\ln x} < e^0 = 1,$$

$$\therefore a, b, c \text{ 的大小关系为 } b > c > a.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查三个数的大小的判断, 考查指数函数、对数函数的单调性等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

7、B

【解析】

根据二项分布的性质可得: $E(\xi_i) = p_i, D(\xi_i) = p_i(1 - p_i)$, 再根据 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ 和二次函数的性质求解.

【详解】

因为随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = k) = C_2^k (1 - p_i)^{2-k} p_i^k$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$.

所以 ξ_i 服从二项分布,

由二项分布的性质可得: $E(\xi_i) = p_i$, $D(\xi_i) = p_i(1 - p_i)$,

因为 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$,

所以 $E(\xi_1) < E(\xi_2)$,

由二次函数的性质可得: $f(x) = x(1 - x)$, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减,

所以 $D(\xi_1) > D(\xi_2)$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查二项分布的性质及二次函数的性质的应用, 还考查了理解辨析的能力, 属于中档题.

8、D

【解析】

利用表格中的数据, 可求解得到 $\bar{x} = 2.5$, 代入回归方程, 可得 $\bar{y} = 5$, 再结合表格数据, 即得解.

【详解】

利用表格中数据, 可得 $\bar{x} = 2.5$,

又 $\bar{y} = 2.1\bar{x} - 0.25$, $\therefore \bar{y} = 5$,

$\therefore m + 3.2 + 4.8 + 7.5 = 20$.

解得 $m = 4.5$

故选: D

【点睛】

本题考查了线性回归方程过样本中心点的性质, 考查了学生概念理解, 数据处理, 数学运算的能力, 属于基础题.

9、C

【解析】

可根据题意把要求的向量重新组合成已知向量的表达, 利用向量数量积的性质, 化简为三角函数最值.

【详解】

由题意可得：

$$\vec{c} - \vec{b} = (\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b}),$$

$$Q |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4 \cdot |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 4 \times 16 - 4 \times 4 = 52$$

$$\therefore |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13},$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{c} - \vec{b}|^2 &= (\vec{c} - \vec{b})^2 = [(\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b})]^2 = |(\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - 2\vec{b})|^2 \\ &= |\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - 2\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \rangle \\ &= 3 + 52 + 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{13} \times \cos \langle \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \rangle \\ &= 55 + 4\sqrt{39} \times \cos \langle \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b} \rangle \\ &\geq 55 + 4\sqrt{39} \end{aligned}$$

$$Q 55 + 4\sqrt{39} = 52 + 2 \times 2\sqrt{13} \times \sqrt{3} + 3 = (2\sqrt{13} + \sqrt{3})^2,$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查根据已知向量的模求未知向量的模的方法技巧,把要求的向量重新组合成已知向量的表达是本题的关键点.本题属中档题.

10、C

【解析】

由 $\frac{5+ai}{a+i} = 3-2i$ ，可得 $5+ai = (a+i)(3-2i) = 3a+2+(3-2a)i$ ，通过等号左右实部和虚部分别相等即可求出 a 的值.

【详解】

$$\text{解：} Q \frac{5+ai}{a+i} = 3-2i, \therefore 5+ai = (a+i)(3-2i) = 3a+2+(3-2a)i$$

$$\therefore \begin{cases} 5 = 3a + 2 \\ 3 - 2a = a \end{cases}, \text{解得：} a = 1.$$

故选:C.

【点睛】

本题考查了复数的运算，考查了复数相等的涵义.对于复数的运算类问题，易错点是把 i^2 当成1进行运算.

11、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/308010016027006062>