

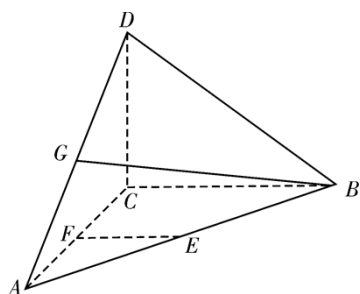
2023 届安徽省宣城重点中学招生全国统一考试最新模拟卷数学试题（一）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中， $DC \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AC = BC = CD = 2$ ， E ， F ， G 分别是棱 AB ， AC ， AD 的中点，则异面直线 BG 与 EF 所成角的余弦值为



- A. 0 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

2. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 1-7i$ ，则 z 在复平面内的对应点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

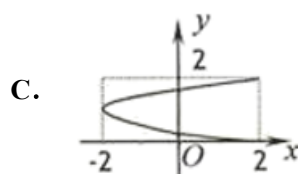
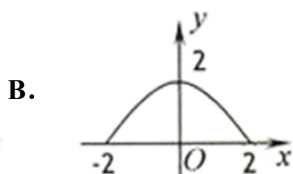
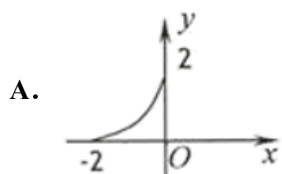
3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = x \cdot 2^{|x|}$ ， $a = f(\log_3 \sqrt{5})$ ， $b = -f(\log_3 \frac{1}{2})$ ， $c = f(\ln 3)$ ，则 a ， b ， c 的大小关系为（ ）

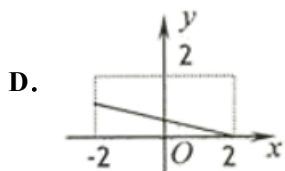
- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{a} - x (a > 0)$ ，若函数 $y = f(x)$ 的图象恒在 x 轴的上方，则实数 a 的取值范围为（ ）

- A. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $(0, e)$ C. $(e, +\infty)$ D. $(\frac{1}{e}, 1)$

5. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ，值域为 $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$ ，则函数 $y = f(x)$ 的图像可能是（ ）





6. 下列命题中，真命题的个数为 ()

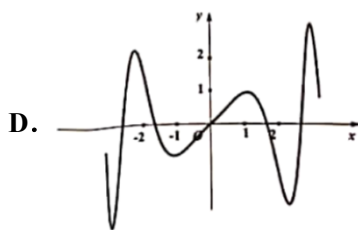
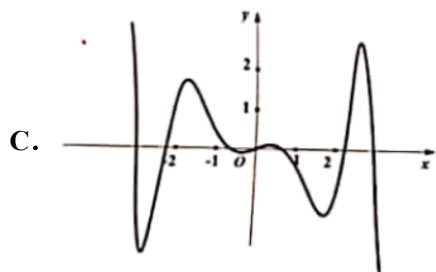
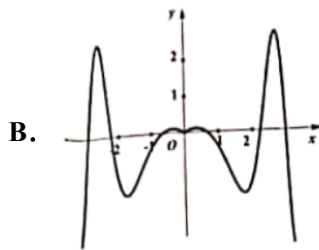
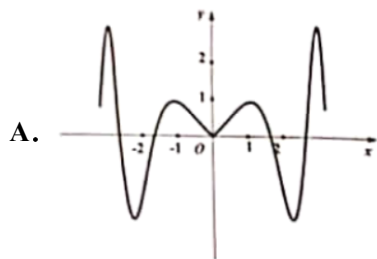
①命题“若 $\frac{1}{a+2} < \frac{1}{b+2}$ ，则 $a > b$ ”的否命题；

②命题“若 $2^{x+y} > 1$ ，则 $x > 0$ 或 $y > 0$ ”；

③命题“若 $m = 2$ ，则直线 $x - my = 0$ 与直线 $2x - 4y + 1 = 0$ 平行”的逆命题.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 函数 $f(x) = x \cos 2^{|x|}$ 的图象可能为 ()



8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ e^x, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - k(x + \frac{1}{2})$ 在 R 上零点最多，则实数 k 的取值范围是 ()

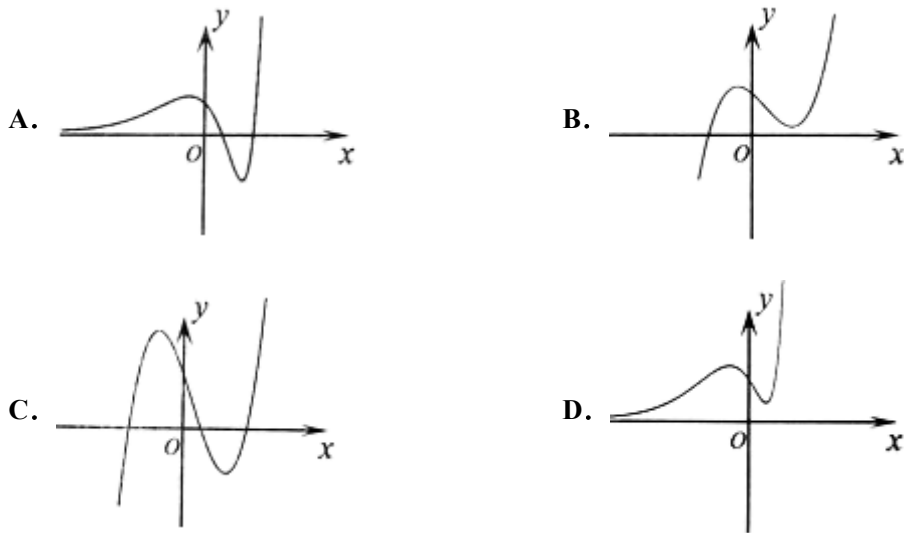
A. $(0, \frac{2}{3e})$ B. $(-\frac{2}{3e}, 0)$ C. $(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{2\sqrt{e}})$

9. 将函数 $f(x) = 2 \sin(3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到函数的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，则

函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 上的值域是 ()

A. $[-1, 2]$ B. $[-\sqrt{3}, 2]$ C. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ D. $[-\sqrt{2}, 2]$

10. 函数 $f(x) = (x^2 - 4x + 1) \cdot e^x$ 的大致图象是 ()

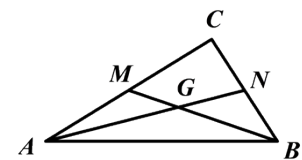


11. 若函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M, N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $g(x) = ax - 2$ 的图象上, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{e}{2})$ B. $(-\infty, e)$ C. $(0, \frac{e}{2})$ D. $(0, e)$

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 分别为 CA, CB 的中点, 若 $AB = \sqrt{5}, CB = 1$, 且满足

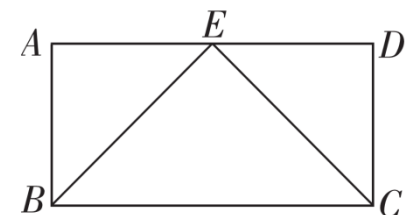
$3\vec{AG} \cdot \vec{MB} = \vec{CA}^2 + \vec{CB}^2$, 则 $\vec{AG} \cdot \vec{AC}$ 等于 ()



- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

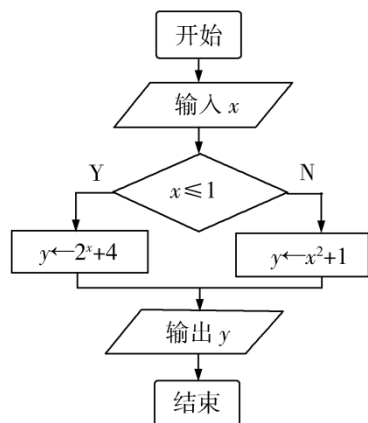
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 2AB = 4$, E 是 AD 的中点, 将 $\triangle ABE, \triangle CDE$ 分别沿 BE, CE 折起, 使得平面 $ABE \perp$ 平面 BCE , 平面 $CDE \perp$ 平面 BCE , 则所得几何体 $ABCDE$ 的外接球的体积为_____.



14. 已知半径为 R 的圆周上有一定点 A , 在圆周上等可能地任意取一点与点 A 连接, 则所得弦长介于 R 与 $\sqrt{3}R$ 之间的概率为_____.

15. (5分) 如图是一个算法的流程图, 若输出 y 的值是 5, 则输入 x 的值为_____.



16. 若 $x^5 = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \dots + a_5(x-2)^5$, 则 $a_1 =$ _____, $a_1 + a_2 + \dots + a_5 =$ _____

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若满足 $f(B) = 2, a = 8, c = 5$, 求 $\cos A$.

18. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbb{R})$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

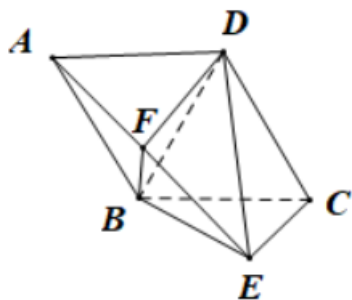
(II) 当 $a > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上最小值.

19. (12分) 在本题中, 我们把具体如下性质的函数 $f(x)$ 叫做区间 D 上的闭函数: ① $f(x)$ 的定义域和值域都是 D ; ② $f(x)$ 在 D 上是增函数或者减函数.

(1) 若 $f(x) = \tan(\omega x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是闭函数, 求常数 ω 的值;

(2) 找出所有形如 $f(x) = a \log_3 x + b\sqrt{x}$ 的函数 (a, b 都是常数), 使其在区间 $[1, 9]$ 上是闭函数.

20. (12分) 如图, 四棱锥 $E-ABCD$ 中, 平面 $ABCD \perp$ 平面 BCE , 若 $\angle BCE = \frac{\pi}{2}$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $AE \perp BD$.



(I) 求证: $AB = AD$;

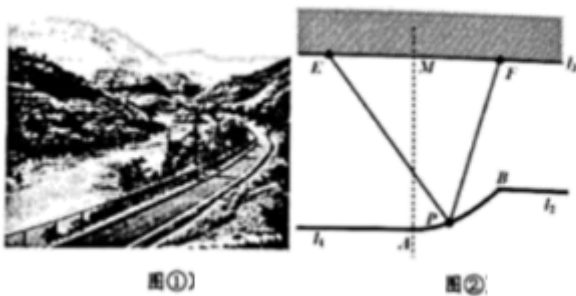
(II) 若点 F 在线段 AE 上, 且 $EC \parallel$ 平面 BDF , $\angle BCD = 60^\circ$, $BC = CE$, 求二面角 $A-BF-D$ 的余弦值.

21. (12分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, a_n 是 -1 与 a_{n+1} 的等差中项.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n + 2n\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10分) 某地为改善旅游环境进行景点改造. 如图, 将两条平行观光道 l_1 和 l_2 通过一段抛物线形状的栈道 AB 连通 (道路不计宽度), l_1 和 l_2 所在直线的距离为 0.5 (百米), 对岸堤岸线 l_3 平行于观光道且与 l_2 相距 1.5 (百米) (其中 A 为抛物线的顶点, 抛物线的对称轴垂直于 l_3 , 且交 l_3 于 M), 在堤岸线 l_3 上的 E, F 两处建造建筑物, 其中 E, F 到 M 的距离为 1 (百米), 且 F 恰在 B 的正对岸 (即 $BF \perp l_3$).



(1) 在图②中建立适当的平面直角坐标系, 并求栈道 AB 的方程;

(2) 游客 (视为点 P) 在栈道 AB 的何处时, 观测 EF 的视角 ($\angle EPF$) 最大? 请在 (1) 的坐标系中, 写出观测点 P 的坐标.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据题意可得 $BC \perp$ 平面 ACD , $EF \parallel BC$, 则 $\angle CBG$ 即异面直线 BG 与 EF 所成的角, 连接 CG , 在 $Rt\triangle CBG$ 中,

$$\cos \angle CBG = \frac{BC}{BG}, \text{ 易得 } BD = AD = AB = 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } BG = \sqrt{6}, \text{ 所以 } \cos \angle CBG = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 故选 B.}$$

2、C

【解析】

化简得到 $z = -3 - 4i$ ，得到答案.

【详解】

$$(1+i)z = 1-7i, \text{ 故 } z = \frac{1-7i}{1+i} = \frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i, \text{ 对应点在第三象限.}$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了复数的化简和对应象限, 意在考查学生的计算能力.

3、D

【解析】

先判断函数在 $x > 0$ 时的单调性, 可以判断出函数是奇函数, 利用奇函数的性质可以得到 $b = f(\log_3 2)$, 比较

$\log_3 \sqrt{5}, \log_3 2, \ln 3$ 三个数的大小, 然后根据函数在 $x > 0$ 时的单调性, 比较出三个数 a, b, c 的大小.

【详解】

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \cdot 2^{|x|} = x \cdot 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x + x \cdot \ln 2 \cdot 2^x > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时, 是增函数. 因为

$$f(-x) = -x \cdot 2^{|-x|} = -x \cdot 2^x = -f(x), \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 是奇函数, 所以有 } b = -f(\log_3 \frac{1}{2}) = f(-\log_3 \frac{1}{2}) = f(\log_3 2),$$

因为 $\ln 3 > 1 > \log_3 \sqrt{5} > \log_3 2 > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时, 是增函数, 所以 $c > a > b$, 故本题选 D.

【点睛】

本题考查了利用函数的单调性判断函数值大小问题, 判断出函数的奇偶性、单调性是解题的关键.

4、B

【解析】

函数 $y = f(x)$ 的图象恒在 x 轴的上方, $\frac{e^x}{a} - x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 即 $\frac{e^x}{a} > x$, 即函数 $y = \frac{e^x}{a}$ 的图象在直线 $y = x$

上方, 先求出两者相切时 a 的值, 然后根据 a 变化时, 函数 $y = \frac{e^x}{a}$ 的变化趋势, 从而得 a 的范围.

【详解】

由题 $\frac{e^x}{a} - x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 即 $\frac{e^x}{a} > x$,

$y = \frac{e^x}{a}$ 的图象永远在 $y = x$ 的上方,

设 $y = \frac{e^x}{a}$ 与 $y = x$ 的切点 (x_0, y_0) ，则 $\begin{cases} \frac{e^{x_0}}{a} = 1 \\ \frac{e^{x_0}}{a} = x_0 \end{cases}$ ，解得 $a = e$ ，

易知 a 越小， $y = \frac{e^x}{a}$ 图象越靠上，所以 $0 < a < e$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查函数图象与不等式恒成立的关系，考查转化与化归思想，首先函数图象转化为不等式恒成立，然后不等式恒成立再转化为函数图象，最后由极限位置直线与函数图象相切得出参数的值，然后得出参数范围。

5、B

【解析】

因为对 A 不符合定义域当中的每一个元素都有象，即可排除；

对 B 满足函数定义，故符合；

对 C 出现了定义域中的一个元素对应值域当中的两个元素的情况，不符合函数的定义，从而可以否定；

对 D 因为值域当中有的元素没有原象，故可否定。

故选 B。

6、C

【解析】

否命题与逆命题是等价命题，写出①的逆命题，举反例排除；原命题与逆否命题是等价命题，写出②的逆否命题后，利用指数函数单调性验证正确；写出③的逆命题判，利用两直线平行的条件容易判断③正确。

【详解】

①的逆命题为“若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a+2} < \frac{1}{b+2}$ ”，

令 $a = -1$ ， $b = -3$ 可知该命题为假命题，故否命题也为假命题；

②的逆否命题为“若 $x \leq 0$ 且 $y \leq 0$ ，则 $2^{x+y} \leq 1$ ”，该命题为真命题，故②为真命题；

③的逆命题为“若直线 $x - my = 0$ 与直线 $2x - 4y + 1 = 0$ 平行，则 $m = 2$ ”，该命题为真命题。

故选：C。

【点睛】

本题考查判断命题真假。判断命题真假的思路：

(1)判断一个命题的真假时,首先要弄清命题的结构,即它的条件和结论分别是什么,然后联系其他相关的知识进行判断.

(2)当一个命题改写成“若 p ,则 q ”的形式之后,判断这个命题真假的方法:

①若由“ p ”经过逻辑推理,得出“ q ”,则可判定“若 p ,则 q ”是真命题;②判定“若 p ,则 q ”是假命题,只需举一反例即可.

7、C

【解析】

先根据 $f(x)$ 是奇函数,排除A,B,再取特殊值验证求解.

【详解】

因为 $f(-x) = -x \cos 2^{|-x|} = -x \cos 2^{|x|} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数,故排除A,B,

又 $f(1) = \cos 2 < 0$,

故选:C

【点睛】

本题主要考查函数的图象,还考查了理解辨析的能力,属于基础题.

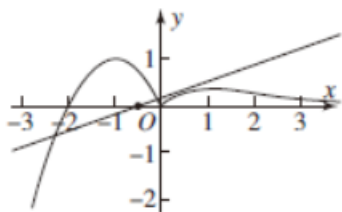
8、D

【解析】

将函数的零点个数问题转化为函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = k(x + \frac{1}{2})$ 的交点的个数问题,画出函数 $y = f(x)$ 的图象,易知直线 $y = k(x + \frac{1}{2})$ 过定点 $(-\frac{1}{2}, 0)$,故与 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时的图象必有两个交点,故只需与 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的图象有两个交点,再与切线问题相结合,即可求解.

【详解】

由图知 $y = f(x)$ 与 $y = k(x + \frac{1}{2})$ 有4个公共点即可,



即 $k \in (0, k_{\text{切}})$,当设切点 (x_0, y_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} k = \frac{1-x_0}{e^{x_0}} \\ k(x_0 + \frac{1}{2}) = \frac{x_0}{e^{x_0}} \end{cases}, \therefore \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2\sqrt{e}} \end{cases}$$

$$\therefore k \in (0, \frac{1}{2\sqrt{e}}).$$

故选：D.

【点睛】

本题考查了函数的零点个数的问题，曲线的切线问题，注意运用转化思想和数形结合思想，属于较难的压轴题.

9、D

【解析】

由题意利用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，三角函数的图象的对称性，余弦函数的值域，求得结果.

【详解】

解：把函数 $f(x) = 2\sin(3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，

可得 $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{8} + \varphi\right)$ 的图象；

再根据得到函数的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，

$$\therefore 3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{8} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \varphi = \frac{7\pi}{8}, \quad \text{函数 } f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{7\pi}{8}\right).$$

在 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 上， $3x + \frac{7\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$ ， $\therefore \sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ ，

故 $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \in [-\sqrt{2}, 2]$ ，即 $f(x)$ 的值域是 $[-\sqrt{2}, 2]$ ，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，三角函数的图象的对称性，余弦函数的值域，属于中档题.

10、A

【解析】

用 $x < 0$ 排除 B，C；用 $x = 2$ 排除 D；可得正确答案.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/308014003013006056>