福建省长泰县一中2024-2025学年高三一模（全国I卷）数学试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

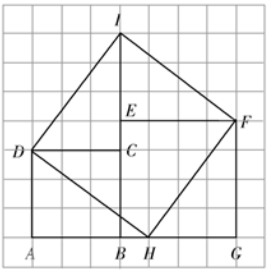
3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知向量$\vec{a}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\vec{b}=\left(\sqrt{3},-1\right)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A． $\dfrac{\pi}{6}$　　**B．** $\dfrac{\pi}{3}$　　**C．** $\dfrac{2\pi}{3}$　　**D．** $\dfrac{5\pi}{6}$

2．刘徽是我国魏晋时期伟大的数学家，他在《九章算术》中对勾股定理的证明如图所示.“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也.合成弦方之幂，开方除之，即弦也”.已知图中网格纸上小正方形的边长为1，其中“正方形$ABCD$为朱方，正方形$BEFG$为青方”，则在五边形$AGFID$内随机取一个点，此点取自朱方的概率为（　　）



A． $\dfrac{16}{37}$　　**B．** $\dfrac{9}{49}$　　**C．** $\dfrac{9}{37}$　　**D．** $\dfrac{3}{11}$

3．复数$\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$（　　）.

A． i　　**B．** $1+\mathrm{i}$　　**C．** $-\mathrm{i}$　　**D．** $1-\mathrm{i}$

4．记递增数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若$a_1=1$，$a_9=9$，且对$\{a_n\}$中的任意两项a_i与a_j（$1\le i<j\le 9$），其和a_i+a_j，或其积a_ia_j，或其商$\dfrac{a_j}{a_i}$仍是该数列中的项，则（　　）

A． $a_5>3, S_9<36$　　**B．** $a_5>3, S_9>36$

C． $a_6>3, S_9>36$　　**D．** $a_6>3, S_9<36$

5．设全集为**R**，集合$A=\left\{x\middle|0<x<2\right\}$，$B=\left\{x\middle|x\ge 1\right\}$，则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A． $\left\{x\middle|0<x\le 1\right\}$　　**B．** $\left\{x\middle|0<x<1\right\}$　　**C．** $\left\{x\middle|1\le x<2\right\}$　　**D．** $\left\{x\middle|0<x<2\right\}$

6．已知抛物线$C:y^2=4x$和点$D(2,0)$，直线$x=ty-2$与抛物线C交于不同两点A，B，直线BD与抛物线C

交于另一点E．给出以下判断：

①以BE为直径的圆与抛物线准线相离；

②直线OB与直线OE的斜率乘积为-2；

③设过点A，B，E的圆的圆心坐标为(a,b)，半径为r，则$a^2-r^2=4$．

其中，所有正确判断的序号是（　　）

A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

7．2020年是脱贫攻坚决战决胜之年，某市为早日实现目标，现将甲、乙、丙、丁4名干部派遣到A、B、C三个贫困县扶贫，要求每个贫困县至少分到一人，则甲被派遣到A县的分法有（　　）

A．6种　　B．12种　　C．24种　　D．36种

8．复数$z(1-i)=i$（i为虚数单位），则z的共轭复数在复平面上对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

9．设$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos(\pi+\beta)=-\frac{4}{5}(\beta\in(0,\pi))$，则$\tan(2\alpha-\beta)$的值为（　　）

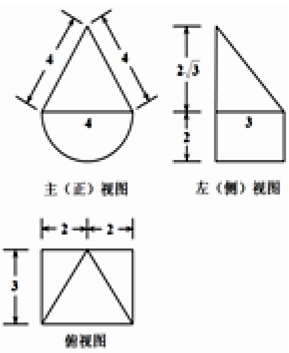
A．$-\frac{7}{24}$　　B．$-\frac{5}{24}$

C．$\frac{5}{24}$　　D．$\frac{7}{24}$

10．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$A\left(\frac{1}{3},0\right)$为$f(x)$图象的对称中心，若图象上相邻两个极值点$x_1$，$x_2$满足$|x_1-x_2|=1$，则下列区间中存在极值点的是（　　）

A．$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C．$\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$　　D．$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

11．一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为（　　）



A．$\frac{32\sqrt{3}}{3}+6\pi$　　B．$8\sqrt{3}+6\pi$

C. $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}+\dfrac{16\pi}{3}$　　　　D. $8\sqrt{3}+\dfrac{16\pi}{3}$

12．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则（　　）

A. $f(-3)<f\left(-\log_3 13\right)<f\left(2^{0.6}\right)$　　B. $f(-3)<f\left(2^{0.6}\right)<f\left(-\log_3 13\right)$

C. $f\left(2^{0.6}\right)<f\left(-\log_3 13\right)<f(-3)$　　D. $f\left(2^{0.6}\right)<f(-3)<f\left(-\log_3 13\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若变量 x，y 满足：$\begin{cases}2x-y+2\le 0\\ x+2y-4\ge 0\\ x-3y+11\ge 0\end{cases}$，且满足 $(t+1)x+(t-1)y+t+1=0$，则参数 t 的取值范围为_______.

14. 在如图所示的三角形数阵中，用 $a_{i,j}\left(i\ge j\right)$ 表示第 i 行第 j 个数 $\left(i,j\in N^*\right)$，已知 $a_{i,1}=1-\dfrac{1}{2^{i-1}}\left(i\in N^*\right)$，且当 $i\ge 3$ 时，每行中的其他各数均等于其“肩膀”上的两个数之和，即 $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j}\left(2\le j\le i-1\right)$，若 $a_{m,2}>2019$，则正整数 m 的最小值为______.

$$0$$

$$\frac{1}{2}\qquad\qquad\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}\qquad\qquad 1\qquad\qquad\frac{3}{4}$$

$$\frac{7}{8}\qquad\qquad\frac{7}{4}\qquad\qquad\frac{7}{4}\qquad\qquad\frac{7}{8}$$

$$\frac{15}{16}\qquad\qquad\frac{21}{8}\qquad\qquad\frac{7}{2}\qquad\qquad\frac{21}{8}\qquad\qquad\frac{15}{16}$$

$$\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots$$

$$1-\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad 1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

15．已知 $a=\log_{0.3}0.2,b=\log_2 0.2$，则 $\boldsymbol{a+b}$________. ab (填“>”或“=”或“<”).

16. 已知 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点，$A(-2,1)$，$B(2,-1)$，设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=4$ 交于 M，N 两点，若 ΔABP 与 ΔMNP 的面积相等，则线段 OP 的长为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f(x)=e^x-x\ln x+ax$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值.

（1）求证：$\ln x_0+x_0=0$；

（2）若 $x\ldots x_0$ 时，$f(x)\ldots 1$ 恒成立，求 a 的取值范围．

18．（12 分）已知 $a>0,b>0$，函数 $f\left(x\right)=\left|x+a\right|+\left|2x-b\right|$ 的最小值为 **1**．

（1）证明：$2a+b=2$．

（2）若 $a+2b\geq tab$ 恒成立，求实数 t 的最大值．

19．（12 分）已知在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}\sin C}$．

（1）求 b 的值；

（2）若 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=2$，求 ΔABC 面积的最大值．

20．（12 分）已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{ex}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程是 $y=(1-\dfrac{2}{e})x+\dfrac{4}{e}-1$．

（1）求 a,b 的值；

（2）若函数 $g(x)=xf(x)$，讨论 $g(x)$ 的单调性与极值；

（3）证明：$f(x)>\dfrac{1}{e^x}$．

21．（12 分）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$0\leq\alpha<\pi$，$t$ 为参数），曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$．

(1)将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程，并说明曲线 C 的形状；

(2)若直线 l 经过点 $(1,0)$，求直线 l 被曲线 C 截得的线段的长．

22．（10 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}$ 且 $a_1=\dfrac{1}{2}$

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+2\mathrm{n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B

【解析】

由已知向量的坐标，利用平面向量的夹角公式，直接可求出结果.

【详解】

解：由题意得，设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3-1}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$，

由于向量夹角范围为：$0 \le \theta \le \pi$，

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

故选：B.

本题考查利用平面向量的数量积求两向量的夹角，注意向量夹角的范围.

2．C

【解析】

首先明确这是一个几何概型面积类型，然后求得总事件的面积和所研究事件的面积，代入概率公式求解.

【详解】

因为正方形$ABCD$为朱方，其面积为 9，

五边形$AGFID$的面积为$S_{ABCD} + S_{BGFE} + S_{\Delta DCI} + S_{\Delta IEF} = 37$，

所以此点取自朱方的概率为$\dfrac{9}{37}$.

故选：C

本题主要考查了几何概型的概率求法，还考查了数形结合的思想和运算求解的能力，属于基础题.

3．A

【解析】

试题分析：$\dfrac{1+2i}{2-i} = \dfrac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i+4i-2}{5} = i$，故选 A.

【考点】复数运算

【名师点睛】复数代数形式的四则运算的法则是进行复数运算的理论依据，加减运算类似于多项式的合并同类项，乘法法则类似于多项式的乘法法则，除法运算则先将除式写成分式的形式，再将分母实数化.

4．D

【解析】

由题意可得$a_5=\frac{a_9}{a_5}$，从而得到$a_5=3$，再由$a_5=3$就可以得出其它各项的值，进而判断出S_9的范围.

【详解】

解：Q a_i+a_j，或其积a_ia_j，或其商$\frac{a_j}{a_i}$仍是该数列中的项，

$\therefore a_2+a_9$或者a_2a_9或者$\frac{a_9}{a_2}$是该数列中的项，

又Q 数列$\{a_n\}$是递增数列，

$\therefore a_1<a_2<a_3<\ldots<a_9$，

$\therefore a_2+a_9>a_9$，$a_2a_9>a_9$，只有$\frac{a_9}{a_2}$是该数列中的项，

同理可以得到$\frac{a_9}{a_3}$，$\frac{a_9}{a_4}$，⋯，$\frac{a_9}{a_8}$也是该数列中的项，且有$a_1<\frac{a_9}{a_8}<\frac{a_9}{a_7}<\ldots<\frac{a_9}{a_2}<a_9$，

$\therefore a_5=\frac{a_9}{a_5}$，$\therefore a_5=3$或$a_5=-3$（舍），$\therefore a_6>3$，

根据$a_1=1$，$a_5=3$，$a_9=9$，

同理易得$a_2=3^{\frac{1}{4}}$，$a_3=3^{\frac{1}{2}}$，$a_4=3^{\frac{3}{4}}$，$a_6=3^{\frac{5}{4}}$，$a_7=3^{\frac{3}{2}}$，$a_8=3^{\frac{7}{4}}$，

$\therefore S_9=a_1+a_2+\ldots+a_9=\frac{1-3^{\frac{9}{4}}}{1-3^{\frac{1}{4}}}<36$，

故选：D.

本题考查数列的新定义的理解和运用，以及运算能力和推理能力，属于中档题.

5．B

【解析】

分析：由题意首先求得C_RB，然后进行交集运算即可求得最终结果.

详解：由题意可得：$C_RB=\{x\mid x<1\}$，

结合交集的定义可得：$A\cap(C_RB)=\{0<x<1\}$.

本题选择B选项.

点睛：本题主要考查交集的运算法则，补集的运算法则等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

6．D

【解析】

对于①，利用抛物线的定义，利用$d=\frac{d_1+d_2}{2}=\frac{|BF|+|EF|}{2}>\frac{|BE|}{2}=R$可判断；

对于②，设直线DE的方程为$x=my+2$，与抛物线联立，用坐标表示直线OB与直线OE的斜率乘积，即可判断；

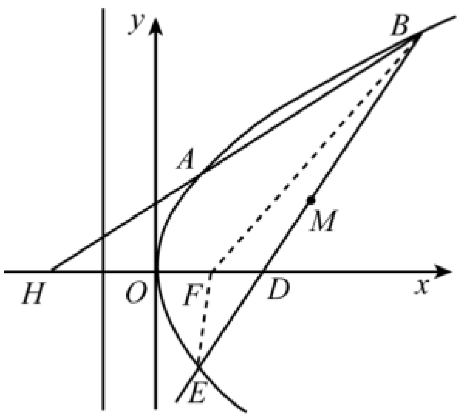
对于③，将$x=ty-2$代入抛物线C的方程可得，$y_Ay_1=8$，从而，$y_A=-y_2$，利用韦达定理可得

$|BE|^2=16m^4+48m^2+32$，再由$r^2=|MN|^2+\left(\frac{|BE|}{2}\right)^2$，可用m表示$r^2$，线段$BE$的中垂线与$x$轴的交点（即圆心

N）横坐标为$2m^2+4$，可得a，即可判断.

【详解】

如图，设F为抛物线C的焦点，以线段BE为直径的圆为M，则圆心M为线段BE的中点.



设B，E到准线的距离分别为d_1，d_2，$\odot M$的半径为R，点M到准线的距离为d，

显然B，E，F三点不共线，

则$d=\frac{d_1+d_2}{2}=\frac{|BF|+|EF|}{2}>\frac{|BE|}{2}=R$．所以①正确.

由题意可设直线DE的方程为$x=my+2$，

代入抛物线C的方程，有$y^2-4my-8=0$.

设点B，E的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$.

所以$x_1x_2=(my_1+2)(my_2+2)=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4=4$.

则直线OB与直线OE的斜率乘积为$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-2$．所以②正确.

将$x=ty-2$代入抛物线C的方程可得，$y_Ay_1=8$，从而，$y_A=-y_2$．根据抛物线的对称性可知，

A，E两点关于x轴对称，所以过点A，B，E的圆的圆心N在x轴上.

由上，有$y_1+y_2=4m$，$x_1+x_2=4m^2+4$，

则$|BE|^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2+\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2=16m^4+48m^2+32$.

所以，线段BE的中垂线与x轴的交点（即圆心N）横坐标为$2m^2+4$，所以$a=2m^2+4$.

于是，$r^2=|MN|^2+\left(\frac{|BE|}{2}\right)^2=\left(2m^2+4-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+4m^4+12m^2+8$，

代入$x_1+x_2=4m^2+4$，$y_1+y_2=4m$，得$r^2=4m^4+16m^2+12$，

所以$a^2-r^2=\left(2m^2+4\right)^2-\left(4m^4+16m^2+12\right)=4$.

所以③正确.

故选：D

本题考查了抛物线的性质综合，考查了学生综合分析，转化划归，数形结合，数学运算的能力，属于较难题.

7．B

【解析】

分成甲单独到A县和甲与另一人一同到A县两种情况进行分类讨论，由此求得甲被派遣到A县的分法数.

【详解】

如果甲单独到A县，则方法数有$C_3^2\times A_2^2=6$种.

如果甲与另一人一同到A县，则方法数有$C_3^1\times A_2^2=6$种.

故总的方法数有$6+6=12$种.

故选：B

本小题主要考查简答排列组合的计算，属于基础题.

8．C

【解析】

由复数除法求出z，写出共轭复数，写出共轭复数对应点坐标即得

【详解】

解析：Q $z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，$\therefore \overline{z}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，

对应点为$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，在第三象限.

故选：C.

本题考查复数的除法运算，共轭复数的概念，复数的几何意义．掌握复数除法法则是解题关键．

9．D

【解析】

利用倍角公式求得 $\tan 2\alpha$ 的值，利用诱导公式求得 $\cos\beta$ 的值，利用同角三角函数关系式求得 $\sin\beta$ 的值，进而求得 $\tan\beta$ 的值，最后利用正切差角公式求得结果.

【详解】

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$，

$\cos\left(\pi+\beta\right)=-\frac{4}{5}=-\cos\beta$，$\left(\beta\in\left(0,\pi\right)\right)$，

$\therefore\cos\beta=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\tan\beta=\frac{3}{4}$，

$$\tan\left(2\alpha-\beta\right)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24},$$

故选：D.

该题考查的是有关三角函数求值问题，涉及到的知识点有诱导公式，正切倍角公式，同角三角函数关系式，正切差角公式，属于基础题目.

10．A

【解析】

结合已知可知，$\frac{1}{2}T=1$ 可求 T，进而可求 ω，代入 $f(x)$，结合 $f(\frac{1}{3})=0$，可求 φ，即可判断.

【详解】

$\because$ 图象上相邻两个极值点 x_1，x_2 满足 $|x_1-x_2|=1$，

$\therefore\frac{1}{2}T=1$ 即 $T=2$，

$\therefore\omega=\pi$，$f(x)=\sin(\pi x+\varphi)$，且 $f(\frac{1}{3})=\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)=0$，

$\therefore\frac{1}{3}\pi+\varphi=k\pi$，$k\in Z$，

$\because|\varphi|<\frac{1}{2}\pi$，$\therefore\varphi=-\frac{1}{3}\pi$，$f(x)=\sin(\pi x-\frac{1}{3}\pi)$，

当 $x=-\frac{1}{6}$ 时，$f(-\frac{1}{6})=-1$ 为函数的一个极小值点，而 $-\frac{1}{6}\in(-\frac{\pi}{6},0)$.

故选：A.

本题主要考查了正弦函数的图象及性质的简单应用，解题的关键是性质的灵活应用.