

# 第 02 讲 幂函数与二次函数

## (6 类核心考点精讲精练)

### 1. 5 年真题考点分布

5 年考情		
考题示例	考点分析	关联考点
2024 年新 I 卷, 第 1 题, 5 分	解三次不等式	交集的概念及计算
2023 年新 I 卷, 第 1 题, 5 分	二次函数图象解不等式	集合间的基本运算
2023 年新 I 卷, 第 4 题, 5 分	二次函数单调区间求参数值 或范围	函数的单调性求参数值 判断指数型复合函数的单调性

### 2. 命题规律及备考策略

**【命题规律】** 本节内容是新高考卷的命题载体内容, 通常会结合其他知识点考查, 需要掌握幂函数的基本性质, 难度中等偏下

**【备考策略】** 1. 掌握幂函数的定义及一般形式, 掌握  $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^{-1} = \frac{1}{x}, y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  的图象

和性质

2. 理解并掌握二次函数的图象与性质(单调性、对称性、顶点、最值等)

3. 理解并掌握幂函数  $y = x^\alpha, \alpha = \frac{q}{p} (\alpha \neq 0)$  的单调性和奇偶性

4. 会解一元二次不等式、分式不等式、单绝对值不等式和高次不等式

**【命题预测】** 本节内容会结合其他函数内容综合考查, 需综合性学习备考

## 知识讲解

### 1. 幂函数

#### (1) 幂函数的定义及一般形式

形如  $y = x^\alpha (\alpha \in R)$  的函数称为幂函数, 其中  $x$  是自变量,  $\alpha$  为常数

#### (2) 幂函数的图象和性质

### ①幂函数的单调性

$$f(x) = x^\alpha \begin{cases} \alpha > 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 在第一象限单调递增} \\ \alpha < 0 \text{ 时, } f(x) \text{ 在第一象限单调递减} \end{cases}$$

### ②幂函数的奇偶性

$$f(x) = x^\alpha \begin{cases} \alpha \text{ 为整数} \begin{cases} \alpha \text{ 为偶数, } f(x) \text{ 为偶函数} \\ \alpha \text{ 为奇数, } f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases} \\ \alpha \text{ 为分数, 设 } \alpha = \frac{q}{p} \begin{cases} p \text{ 为偶数时, } f(x) \text{ 为非奇非偶函数} \\ p \text{ 为奇数时} \begin{cases} q \text{ 为奇数, } f(x) \text{ 为奇函数} \\ q \text{ 为偶数, } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

### 2. 一元二次方程:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

①方程有两个实数根  $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

②方程有同号两根  $\Leftrightarrow$

③方程有异号两根  $\Leftrightarrow$

④韦达定理及应用:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$$

### 3. 二次函数

①一般式:  $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} (a \neq 0)$ , 对称轴是  $x = -\frac{b}{2a}$ ,

顶点是  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ ;

②顶点式:  $y = a(x + m)^2 + k (a \neq 0)$ , 对称轴是  $x = -m$ , 顶点是  $(-m, k)$ ;

③交点式:  $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$ , 其中  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$  是抛物线与  $x$  轴的交点

### 4. 二次函数的性质

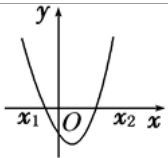
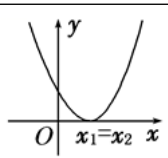
①函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图象关于直线  $x = -\frac{b}{2a}$  对称。

②  $a > 0$  时, 在对称轴  $(x = -\frac{b}{2a})$  左侧,  $y$  值随值的增大而减少; 在对称轴  $(x = -\frac{b}{2a})$  右侧:  $y$  的值随值的增大而增大。当  $x = -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  取得最小值  $\frac{4ac - b^2}{4a}$

③  $a < 0$  时, 在对称轴  $(x = -\frac{b}{2a})$  左侧,  $y$  值随值的增大而增大; 在对称轴  $(x = -\frac{b}{2a})$  右侧:  $y$  的值随值的增大而减少。当  $x = -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  取得最大值  $\frac{4ac - b^2}{4a}$

### 5. 解一元二次不等式

“三个二次”: 一元二次不等式与一元二次方程及二次函数的联系

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根	有两个不等实根 $x_1, x_2$ (设)	有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实数根
二次函数 的图象			
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$		$R$
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x   x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

### 6. 解分式不等式

①  $\frac{g(x)}{f(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0$

②  $\frac{g(x)}{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$

③  $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

④  $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

### 7. 解单绝对值不等式

$|x| \geq a (a > 0) \Rightarrow x \leq -a \text{ 或 } x \geq a, |x| < a (a > 0) \Rightarrow -a < x < a$

## 考点一、幂函数的图象

1. (23-24 高三·阶段练习) 已知幂函数  $f(x)$  的图象过点  $(16, 4)$ , 则函数  $f(x)$  的图象是 ( )

A.

B.

C.

D.

**【答案】** C

**【分析】**

根据幂函数经过的点得表达式，进而根据幂函数的性质即可结合选项求解.

**【详解】**

设幂函数的解析式为  $f(x) = x^\alpha$ ,

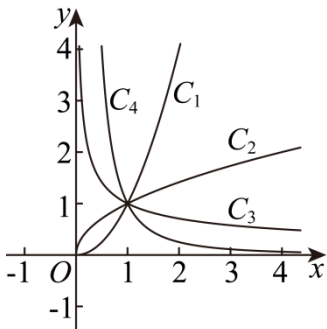
由幂函数  $y = f(x)$  的图象过点  $(16, 4)$ ,  $\therefore 4 = 16^\alpha$ , 解得  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore y = f(x) = \sqrt{x}$ , 其定义域为  $[0, +\infty)$ , 且是增函数,

当  $0 < x < 1$  时, 其图象在直线  $y = x$  的上方, 故 C 满足题意.

故选: C

2. (2023 高三·山西运城·学业考试) 如图的曲线是幂函数  $y = x^n$  在第一象限内的图象. 已知  $n$  分别取  $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$  四个值, 与曲线  $C_1, C_2, C_3, C_4$  相应的  $n$  依次为 ( )



A.  $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$

B.  $2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$

C.  $-\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$

D.  $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$

**【答案】** A

**【分析】** 作直线  $x = 2$  分别与曲线  $C_1, C_2, C_3, C_4$  相交, 结合函数  $y = 2^x$  的单调性即可判断.

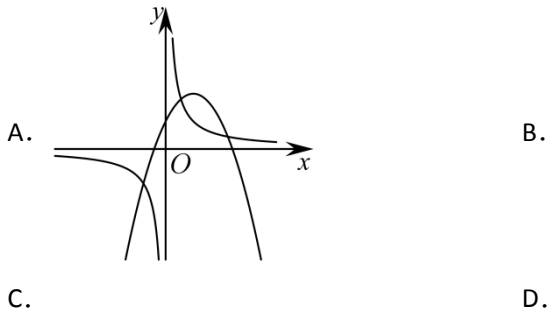
**【详解】** 因为函数  $y = 2^x$  为增函数, 所以,

所以作直线  $x = 2$  分别与曲线  $C_1, C_2, C_3, C_4$  相交, 交点由上到下分别对应的  $n$  值为  $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$ ,

由图可知, 曲线  $C_1, C_2, C_3, C_4$  相应  $n$  值为  $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$ .

故选: A

3. (23-24 高三·阶段练习) 函数  $f(x) = ax^2 + 2x + 1$  与  $g(x) = x^a$  在同一直角坐标系中的图象不可能为 ( )



【答案】B

【分析】利用二次函数的图象得出  $a$  的正负，结合幂函数特点可得答案.

【详解】对于 A，二次函数开口向下，所以  $a < 0$ ，此时  $g(x) = x^a$  与图中符合；

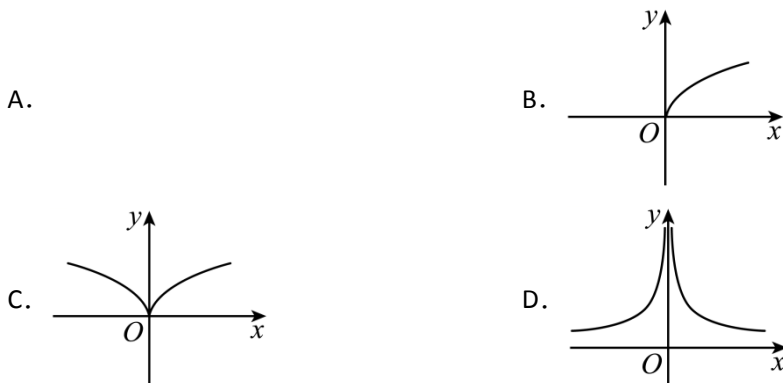
对于 B，二次函数开口向上，所以  $a > 0$ ，此时  $g(x) = x^a$  在  $(0, +\infty)$  为增函数，不符合；

对于 C，二次函数开口向上，所以  $a > 0$ ，此时  $g(x) = x^a$  在  $(0, +\infty)$  为增函数，符合；

对于 D，二次函数开口向上，所以  $a > 0$ ，此时  $g(x) = x^a$  在  $(0, +\infty)$  为增函数，符合；

故选：B.

1. (23-24 高三·阶段练习) 已知幂函数的图象经过点  $P(8,4)$ ，则该幂函数的大致图象是 ( )



【答案】C

【分析】设幂函数为  $f(x) = x^a$ ，然后将  $P(8,4)$  坐标代入可求出函数解析式，从而可得函数图象.

【详解】设幂函数为  $f(x) = x^a$ ，则  $8^a = 4$ ， $2^{3a} = 2^2$ ，得  $3a = 2$ ，得  $a = \frac{2}{3}$ ，

所以，定义域为  $\mathbf{R}$ ，所以排除 AD，

因为  $f(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$ ，所以函数为偶函数，所以排除 B，

故选：C

2. (23-24 高三·阶段练习) (多选) 现有 4 个幂函数的部分图象如图所示，则下列选项可能成立的是 ( )

A.,  $m=2$ ,  $q=\frac{1}{2}$ ,  $n=-3$

B.  $p=4$ ,  $m=3$ ,  $q=\frac{1}{3}$ ,  $n=-2$

C.,  $m=3$ ,  $q=-\frac{1}{2}$ ,  $n=-3$

D.  $p=\frac{1}{2}$ ,  $m=\frac{1}{3}$ ,  $n=\frac{1}{4}$

**【答案】** AB

**【分析】** 根据幂函数的图象和性质结合已知图象分析判断即可.

**【详解】** 对于幂函数  $y=x^\alpha$ , 若函数在  $(0,+\infty)$  上单调递增, 则  $\alpha > 0$ , 若函数在  $(0,+\infty)$  上单调递减, 则  $\alpha < 0$ , 所以  $n < 0$ , D 选项错误;

当  $x > 1$  时, 若  $y=x^\alpha$  的图象在  $y=x$  的上方, 则  $\alpha > 1$ , 若  $y=x^\alpha$  的图象在  $y=x$  的下方, 则  $\alpha < 1$ , 所以  $p > 1, m > 1, 0 < q < 1$ , C 选项错误;

因为当  $x > 1$  时, 指数越大, 图象越高, 所以  $p > m$ ,

综上,  $p > m > 1 > q > 0 > n$ , AB 选项正确.

故选: AB

3. (22-23 高三·全国·对口高考) 给定一组函数解析式:

①; ②; ③; ④; ⑤; ⑥; ⑦.

如图所示一组函数图象. 图象对应的解析式号码顺序正确的是 ( )

A. ⑥③④②⑦①⑤

B. ⑥④②③⑦①⑤

C. ⑥④③②⑦①⑤

D. ⑥④③②⑦⑤①

**【答案】** C

**【分析】** 根据幂函数的图象的性质判断各图象对应解析式的形式, 即可得答案.

**【详解】** 图象 (1) 关于原点对称, 为奇函数, 且不过原点、第一象限递减, 故满足;  
图象 (2) 关于  $y$  轴对称, 为偶函数, 且不过原点、第一象限递减, 故满足;  
图象 (3) 非奇非偶函数, 且不过原点、第一象限递减, 故满足;  
图象 (4) 关于  $y$  轴对称, 为偶函数, 且过原点、第一象限递增, 故满足;  
图象 (5) 关于原点对称, 为奇函数, 且过原点、第一象限递增, 故满足;  
图象 (6) 非奇非偶函数, 且过原点、第一象限递增, 而增长率随增大递减, 故满足;  
图象 (7) 非奇非偶函数, 且过原点、第一象限递增, 而增长率随增大递增, 故满足;  
故图象对应解析式顺序为⑥④③②⑦①⑤.

故选: C

## 考点二、幂函数的单调性与奇偶性

1. (上海·高考真题) 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减的函数为 ( )

- A.  $y = x^{-2}$       B.      C.  $y = x^2$       D.

【答案】A

【详解】试题分析: 由偶函数定义知, 仅 A, C 为偶函数, C.  $y = x^2$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增函数, 故选 A.

考点: 本题主要考查奇函数的概念、函数单调性、幂函数的性质.

点评: 函数奇偶性判定问题, 应首先考虑函数的定义域是否关于原点对称.

2. (2023·全国·专题练习) 如图所示是函数 ( $m, n \in \mathbf{N}^*$  且互质) 的图象, 则 ( )

- A.  $m, n$  是奇数且  $\frac{m}{n} < 1$       B.  $m$  是偶数,  $n$  是奇数, 且  $\frac{m}{n} < 1$   
C.  $m$  是偶数,  $n$  是奇数, 且  $\frac{m}{n} > 1$       D.  $m, n$  是偶数, 且  $\frac{m}{n} > 1$

【答案】B

【分析】

根据图象得到函数的奇偶性及  $(0, +\infty)$  上单调递增, 结合  $m, n \in \mathbf{N}^*$  且互质, 从而得到答案.

【详解】由图象可看出为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

故  $\frac{m}{n} \in (0, 1)$  且  $m$  为偶数, 又  $m, n \in \mathbf{N}^*$  且互质, 故  $n$  是奇数.

故选: B

3. (23-24 高二下·浙江·期中) 幂函数  $y = x^{m^2-2m-3}$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) 的图象关于  $y$  轴对称, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数, 则  $m$  的值是 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

【答案】A

【分析】首先根据幂函数的单调性, 确定  $m$  得到取值, 再回代函数确定函数的奇偶性, 即可求解.

【详解】因为幂函数  $y = x^{m^2-2m-3}$ , ( $m \in \mathbf{Z}$ ) 在区间  $(0, +\infty)$  上是减函数,

所以  $m^2 - 2m - 3 < 0$ , 解得:  $-1 < m < 3$ ,

因为  $m \in \mathbf{Z}$ , 得  $m = 0, 1, 2$ ,

当  $m = 0$  时, 函数是奇函数, 不关于  $y$  轴对称, 故舍去,

当  $m = 1$  时, 函数是偶函数, 关于  $y$  轴对称, 故舍去,

当  $m = 2$  时, 函数是奇函数, 不关于  $y$  轴对称, 故舍去,

所以  $m = 1$ .

故选：A

1. (1993·全国·高考真题) 函数  $y = x^{\frac{3}{5}}$  在  $[-1, 1]$  上是

- A. 增函数且是奇函数                      B. 增函数且是偶函数  
C. 减函数且是奇函数                      D. 减函数且是偶函数

【答案】A

【详解】

考查幂函数.

$\because \frac{3}{5} > 0$ , 根据幂函数的图象与性质

可得在  $[-1, 1]$  上的单调增函数, 是奇函数.

故选 A.

点睛: 对于形如的幂函数, 研究函数性质时, 可以将函数化简为  $y = \sqrt[n]{x^n}$ , 可知定义域及函数奇偶性, 幂函数的单调性可以只研究第一象限, 再结合奇偶性即可得结论.

2. (2024·全国·模拟预测) (多选) 下列函数中既是奇函数, 又是定义域上的减函数的是 ( )

- A.  $f(x) = -3x^5$                               B.  $f(x) = 2^x$   
C.  $f(x) = \frac{1}{x}$                                       D.

【答案】AD

【分析】由解析式直接判断函数的奇偶性与单调性即可得解.

【详解】对于 A,  $f(x) = -3x^5$  是奇函数, 在其定义域上单调递减, 故 A 正确;

对于 B,  $f(x) = 2^x$  是在其定义域上单调递增的指数函数, 故 B 错误;

对于 C,  $f(-1) = -1, f(1) = 1$ , 故  $f(x) = \frac{1}{x}$  在其定义域上不单调递减, 故 C 错误;

对于 D, 是奇函数, 在其定义域上单调递减, 故 D 错误.

故选: AD.

3. (2024·广东广州·模拟预测) 若幂函数  $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{2m-3}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 则实数  $m$  的值为 ( )

- A. 2                                      B. 1                                      C.                                      D.

【答案】A

【分析】根据条件, 利用幂函数的定义和性质, 即可求出结果.

【详解】因为幂函数  $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{2m-3}$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数,



【详解】由题意得  $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $b = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ,

由于在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故  $1 = 1^{\frac{2}{3}} > a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} > b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ;

而  $y = \log_{\frac{2}{3}} x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 故,

故  $c > a > b$ ,

故选: A

2. 设  $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ ,  $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )

A.  $c < a < b$

B.  $c < b < a$

C.  $a < c < b$

D.  $b < c < a$

【答案】A

【解析】易得  $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > 1$ , 再由  $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$ ,  $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$ , 利用幂函数的单调性判断.

【详解】因为  $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$ ,  $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > 1$ ,  $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$ ,

且  $0 < \frac{8}{27} < \frac{9}{16} < 1$ , 在  $(0, +\infty)$  上递增,

所以  $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ , 即  $c < a$ ,

综上:  $c < a < b$

故选: A

## 考点四、幂函数的综合应用

1. (2024·吉林·模拟预测) 请写出一个幂函数  $f(x)$  满足以下条件: ①定义域为  $[0, +\infty)$ ; ②  $f(x)$  为增函数; ③

对任意的  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 都有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

【答案】(答案不唯一)

【分析】根据幂函数的性质可写出一个符合①②的幂函数, 利用作差法说明其也满足③, 即可得答案.

【详解】由题意可知的定义域为  $[0, +\infty)$ , 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为增函数;

下面证明该函数满足③:

取任意的  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}} > 0, \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2} > 0,$$

$$\text{则} \left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)^2 = \frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{4} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}-2\sqrt{x_1x_2}}{4} = 0,$$

当且仅当  $x_1 = x_2$  时取等号,

$$\text{即} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ 即满足 } \textcircled{3},$$

故答案为:

2. (2023·全国·模拟预测) 已知  $x, y \in \mathbf{R}$ , 满足  $(x-1)^{2023} + x = \frac{5}{2}$ ,  $(2y+1)^{2023} + 2y = -\frac{5}{2}$ , 则  $x+2y = (\quad)$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】B

【分析】令  $f(x) = x^{2023} + x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 易得  $f(x)$  为奇函数且为增函数, 再由  $(x-1)^{2023} + x = \frac{5}{2}$  和

$$(2y+1)^{2023} + 2y = -\frac{5}{2}, \text{ 变形得到 } f(x-1) = \frac{3}{2}, f(2y+1) = -\frac{3}{2} \text{ 求解.}$$

【详解】解: 令  $f(x) = x^{2023} + x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $f(-x) = (-x)^{2023} + (-x) = -f(x)$ ,

$\therefore f(x)$  为奇函数.

$$\therefore (x-1)^{2023} + x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore (x-1)^{2023} + (x-1) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{又} \therefore (2y+1)^{2023} + 2y = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore (2y+1)^{2023} + (2y+1) = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore f(x-1) = \frac{3}{2}, f(2y+1) = -\frac{3}{2}.$$

又  $\therefore f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

$$\therefore x-1+2y+1=0, \text{ 即 } x+2y=0.$$

故选: B.

1. (2024·云南曲靖·一模) 如图, 在第一象限内, 矩形  $ABCD$  的三个顶点  $A, B, C$  分别在函数的图象上, 且矩形的边分别与两坐标轴平行, 若  $A$  点的纵坐标是 2, 则  $D$  点的坐标是\_\_\_\_\_.

【答案】 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$

【分析】根据指对幂函数的图象及解析式求出  $A$  点的横坐标、 $C$  点纵坐标，即可得  $D$  点的坐标。

【详解】由题意， $A, B$  纵坐标都为 2，则点横坐标为 8，即  $C$  点横坐标为 8，

所以  $A$  点的横坐标为， $C$  点纵坐标为，

由  $ABCD$  为矩形及题图知： $D$  点的坐标是  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$ 。

故答案为： $(\frac{1}{3}, \frac{1}{81})$

2. (2024·全国·模拟预测) 写出满足下列条件①②③的一个函数： $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

①  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ；②  $x \in \mathbf{R}$ ， $f(-x) = -f(x)$ ；③  $0 < x_1 < x_2$ ，都有  $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 < \frac{f(x_1)}{f(x_2)} < \frac{x_1}{x_2}$ 。

【答案】(答案不唯一，形如， $p, q$  为奇数，且  $1 < \frac{q}{p} < 2$  均可)

【分析】根据题意函数需分别满足题中①②③的条件，且答案不唯一。

【详解】由③知(不妨取  $x > 0$  时  $f(x) > 0$ )，

所以函数  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数，函数  $\frac{f(x)}{x^2}$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数，

又由①②，函数为奇函数且定义域为  $\mathbf{R}$ ，

所以可取幂函数。

故答案为：(答案不唯一，形如， $p, q$  为奇数，且  $1 < \frac{q}{p} < 2$  均可)。

## 考点五、解一元二次不等式、分式不等式与高次不等式

1. (2024·上海·高考真题) 已知则不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\{x | -1 < x < 3\}$

【分析】求出方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的解后可求不等式的解集。

【详解】方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的解为  $x = -1$  或  $x = 3$ ，

故不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为  $\{x | -1 < x < 3\}$ ，

故答案为： $\{x | -1 < x < 3\}$ 。

2. (全国·高考真题) 不等式  $\frac{x-2}{x+3} > 0$  的解集是 ( )

A.  $(-3, 2)$

B.  $(2, +\infty)$

C.  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

D.  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

【答案】C

【分析】分式不等式转化成整式不等式求解即可.

【详解】由  $\frac{x-2}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) > 0$ , 解得  $x > 2$  或  $x < -3$ .

故选: C

3. (2024·全国·高考真题) 已知集合  $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$ ,  $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $\{-1, 0\}$       B.  $\{2, 3\}$       C.  $\{-3, -1, 0\}$       D.  $\{-1, 0, 2\}$

【答案】A

【分析】化简集合 A, 由交集的概念即可得解.

【详解】因为  $A = \{x | -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$ ,  $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ , 且注意到  $1 < \sqrt[3]{5} < 2$ ,

从而  $A \cap B = \{-1, 0\}$ .

故选: A.

1. (2024·福建福州·一模) 已知集合  $A = \left\{x \mid \frac{x-2}{x+2} \leq 0\right\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 3x < 0\}$ , 则  $A \cup B = ( \quad )$

- A.  $\{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$       B.  $\{x \mid -2 < x < 3\}$   
C.  $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$       D.  $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

【答案】B

【分析】根据分式不等式和一元二次不等式得解法解出集合 A, B, 再按照集合的并集运算即可.

【详解】 $\frac{x-2}{x+2} \leq 0$ , 则  $(x-2)(x+2) \leq 0$ , 且  $x+2 \neq 0$ , 解得  $-2 < x \leq 2$ ,

则集合  $A = \{x \mid -2 < x \leq 2\}$ ,  $B = \{x \mid x(x-3) < 0\} = \{x \mid 0 < x < 3\}$

则  $A \cup B = \{x \mid -2 < x < 3\}$

故选: B.

2. (2024·全国·一模) 已知集合  $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \log_2 |x| < 1\}$ ,  $N = \{x \mid x^3 - x \leq 0\}$ , 则  $M \cap N = ( \quad )$

- A.  $\{-1, 1\}$       B.  $\{-1, 0, 1\}$   
C.  $\{-2, -1, 1\}$       D.  $\{-2, -1, 0, 1\}$

【答案】A

【分析】解集合中的不等式, 得到这两个集合, 再由定义求交集.

【详解】不等式  $\log_2 |x| < 1$ , 即  $0 < |x| < 2$ , 当  $x \in \mathbb{Z}$  时, 不等式解集为  $\{-1, 1\}$ , 即  $M = \{-1, 1\}$ ,

不等式  $x^3 - x = x(x+1)(x-1) \leq 0$ , 解得  $x \leq -1$  或  $0 \leq x \leq 1$ , 即  $N = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } 0 \leq x \leq 1\}$ ,

所以  $M \cap N = \{-1, 1\}$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/308027107100007025>