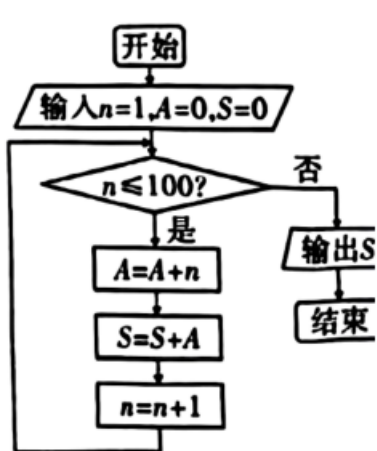


陕西省咸阳市 2024 届高三下学期高考模拟检测（二）数学  
(理科) 试题

学校: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 考号: \_\_\_\_\_

一、单选题

1. 若复数  $z$  满足  $(1-i)z = 3+4i$ , 则复数  $z$  的共轭复数的虚部为 ( )
- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{7}{2}$       C.  $\frac{7}{2}i$       D.  $-\frac{7}{2}$
2. 已知集合  $A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{5-x} \geq 0 \right\}$ ,  $B = \left\{ x \mid y = \log_2(x^2 - 16) \right\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$  ( )
- A.  $(-1, 4)$       B.  $[-1, 4]$       C.  $(-1, 5]$       D.  $(4, 5)$
3. 已知在边长为1的菱形  $ABCD$  中, 角  $A$  为  $60^\circ$ , 若点  $E$  为线段  $CD$  的中点, 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} =$  ( )
- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{3}{4}$       C.  $-\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{3}{2}$
4. 已知角  $\alpha$  的始边为  $x$  轴的非负半轴, 顶点为坐标原点, 若它的终边经过点  $P(1, -2)$ , 则  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha =$  ( )
- A.  $\frac{1}{5}$       B.  $-\frac{9}{5}$       C.  $-\frac{7}{5}$       D.  $-\frac{1}{5}$
5. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_4 = 2$ ,  $S_8 = 12$ , 则  $S_{20} =$  ( )
- A. 30      B. 58      C. 60      D. 90
6. 执行如图的程序框图, 则输出的结果是 ( )



- A. 5050      B. 4950      C. 166650      D. 171700
7. 已知平面区域  $\Omega$  中的点满足  $\left[ (\sqrt{2}+1)x - y \right] \left[ x - (\sqrt{2}+1)y \right] < 0$ , 若在圆面  $x^2 + y^2 \leq 2$  中任取一点  $P$ , 则该点取自区域  $\Omega$  的概率为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{6}$       D.  $\frac{1}{7}$

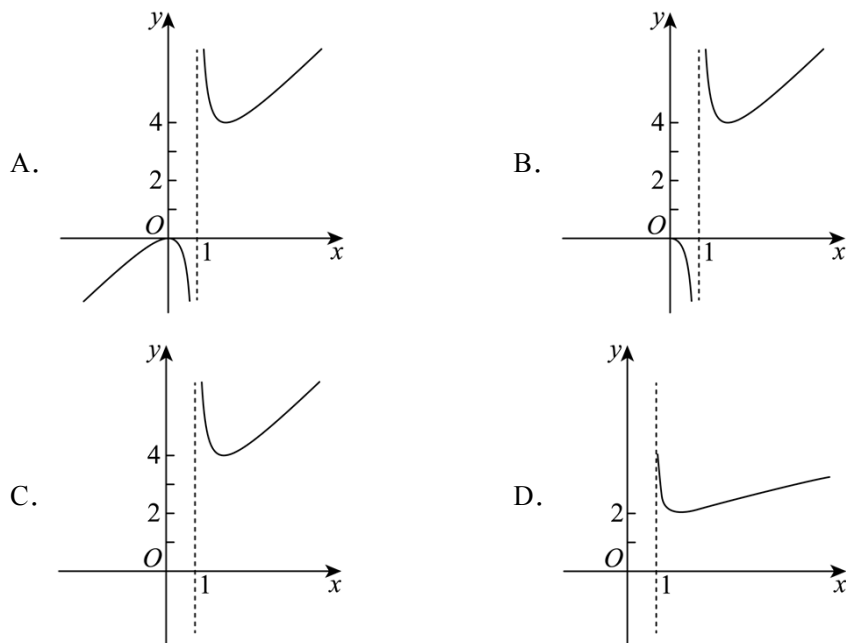
8. 当函数  $y = 3\sin x + 4\cos x$  取得最小值时,  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = ( \quad )$

- A.  $-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$       B.  $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$       C.  $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$       D.  $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

9. 为了强化学生安全意识, 落实“12530”安全教育, 某学校让学生用这 5 个数字再加一个 0 来设定自己教室储物柜密码, 若两个 0 之间至少有一个数字, 且两 0 不都在首末两位, 可以设置的密码共有 ( )

- A. 72      B. 120      C. 216      D. 240

10. 若将  $\ln y = \ln x + \ln(y-x)$  确定的两个变量  $y$  与  $x$  之间的关系看成  $y = f(x)$ , 则函数  $y = f(x)$  的图象大致为 ( )



11. 已知点  $F$  为双曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  的右焦点, 过点  $F$  的直线  $l$  (斜率为  $k$ ) 交双曲线右支于  $M, N$  两点, 若线段  $MN$  的中垂线交  $x$  轴于一点  $P$ , 则  $\frac{|MN|}{|PF|} = ( \quad )$

- A.  $\frac{5}{4}$       B.  $\frac{5}{8}$       C.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{8}{5}$

12. 已知函数  $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{a}{2}x^2$ , 若  $x=0$  是函数  $f(x)$  的唯一极小值点, 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $[1, +\infty)$       B.  $(0, 1)$       C.  $[-1, +\infty)$       D.  $(-\infty, 1]$

## 二、填空题

13. 已知总体的各个个体的值由小到大依次为  $2, 4, 4, 6, a, b, 12, 14, 18, 20$ ，且总体的平均值为 10，则  $\frac{4}{a} + \frac{9}{b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14.  $P$  为抛物线  $y^2 = 4x$  上任意一点，点  $A(2, 4)$ ，设点  $P$  到  $y$  轴的距离为  $d$ ，则  $|PA| + d$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  所对的边，若  $a = b \cos C + \sqrt{3}c \sin B$ ，设点  $D$  为边  $AC$  的中点，且  $BD = AC = 4$ ，则  $S_{\triangle ABC} =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知三棱锥  $D-ABC$  中， $AB = 4, AC = 3, BC = 5$ ，三角形  $DBC$  为正三角形，若二面角  $D-BC-A$  为  $120^\circ$ ，则该三棱锥的外接球的体积为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 若  $b_n = a_{n+1} - a_n$ ，请判断并证明数列  $\{b_n\}$  的单调性；

(2) 若  $c_n = \left( \frac{1}{a_{n+1}a_n} \right)^2$ ，求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. 陕西省从 2022 年秋季启动新高考，新高考“3+1+2”模式中“3”为全国统一高考科目的语文、数学、外语，“1”为首选科目，要求从物理、历史 2 门科目中确定 1 门，“2”为再选科目，要求从思想政治、地理、化学、生物学 4 门科目中确定 2 门，共计产生 12 种组合. 某班有学生 50 名，在选科时，首选科目选历史和物理的统计数据如下表所示

|    | 历史 | 物理 | 合计 |
|----|----|----|----|
| 男生 | 2  | 23 | 25 |
| 女生 | 8  | 17 | 25 |
| 合计 | 10 | 40 | 50 |

附：  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中  $n = a+b+c+d$ .

| $\alpha$ | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\chi_a$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

(1) 根据表中的数据，判断是否有 99% 的把握认为学生选择历史与性别有关；

(2)从选择历史的 10 名学生中任意抽取 3 名同学参加学校“铭记历史，强国有我”演讲比赛，设  $X$  为抽取的三名学生中女生的人数，求  $X$  的分布列，并求数学期望和方差.

19. 在几何体中，底面  $ABC$  是边长为 2 的正三角形.  $AE \perp$  平面  $ABC$ ，若  $AE \parallel CD \parallel BF, AE = 5, CD = 4, BF = 3$ .

(1)求证：平面  $DEF \perp$  平面  $AEFB$ ；

(2)是否在线段  $AE$  上存在一点  $P$ ，使得二面角  $P-DF-E$  的大小为  $\frac{\pi}{3}$ . 若存在，求出  $AP$  的长度，若不存在，请说明理由.

20. 已知两圆  $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 25$ ， $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 1$ ，动圆  $C$  在圆  $C_1$  的内部，且与圆  $C_1$  相内切，与圆  $C_2$  相外切.

(1)求点  $C$  的轨迹方程；

(2)设点  $M(-1,0)$ ， $N(1,0)$ ，过点  $M$  的直线交  $C$  于  $P$ ， $Q$  两点，求  $\triangle PQN$  的内切圆面积的最大值.

21. 已知函数  $f(x) = ae^{x-1} - x + \ln a$ .

(1)讨论  $f(x)$  的单调性；

(2)若  $f(x) \geq \ln x - x + 1$ ，求  $a$  的取值范围.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数)，以坐标

原点  $O$  为极点， $x$  轴正半轴为极轴，建立极坐标系. 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta = 3$ .

(1)求曲线  $C$  的直角坐标方程和直线  $l$  的一般方程；

(2)设直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $A$ ， $B$  两点，求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

23. 已知函数  $f(x) = |2x+1| + |3x-3|$ .

(1)解不等式  $f(x) > 5$ ；

(2)设函数  $g(x) = -3x^2 + 12x + m$ ，若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象无公共点，求参数  $m$  的取值范围.

参考答案:

1. D

【分析】

根据复数除法运算可求得 $z$ ，由共轭复数和虚部定义可求得结果.

【详解】由 $(1-i)z=3+4i$ 得： $z=\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+7i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$ ,

$\therefore z$ 的共轭复数 $\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$ ，则其虚部为 $-\frac{7}{2}$ .

故选：D.

2. B

【分析】

计算出集合 $A$ 、 $B$ 后，借助补集定义及交集定义即可得.

【详解】由 $\frac{x+1}{5-x}\geq 0$ ，即 $\begin{cases} (x+1)(5-x)\geq 0 \\ 5-x\neq 0 \end{cases}$ ，解得 $-1\leq x<5$ ，故 $A=\{x|-1\leq x<5\}$ ，

由 $y=\log_2(x^2-16)$ ，可得 $x^2-16>0$ ，即 $x>4$ 或 $x<-4$ ，故 $\complement_{\mathbb{R}}B=\{x|-4\leq x\leq 4\}$ ，

故 $A\cap(\complement_{\mathbb{R}}B)=\{x|-1\leq x\leq 4\}$ .

故选：B.

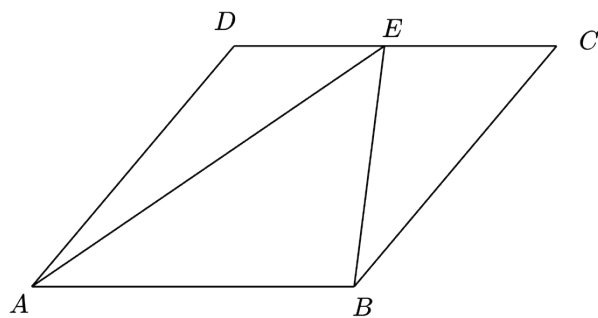
3. C

【分析】

借助向量的线性运算及数量积公式计算即可得

【详解】 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$ .

故选：C.



4. C

【分析】

根据三角函数的定义求出  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ , 再由二倍角公式代入计算可得.

【详解】因为角  $\alpha$  的终边经过点  $P(1, -2)$ ,

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$= 2 \times \left( \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right) \times \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \times \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 - 1 = -\frac{7}{5}.$$

故选: C

5. D

【分析】

借助等差数列片断和的性质计算即可得.

【详解】由数列  $\{a_n\}$  为等差数列,

故  $S_4$ 、 $S_8 - S_4$ 、 $S_{12} - S_8$ 、 $S_{16} - S_{12}$ 、 $S_{20} - S_{16}$  亦为等差数列,

由  $S_4 = 2$ ,  $S_8 = 12$ , 则  $S_8 - S_4 = 10$ ,

故  $S_{12} - S_8 = 18$ ,  $S_{16} - S_{12} = 26$ ,  $S_{20} - S_{16} = 34$ ,

即有  $S_{12} = 18 + S_8 = 30$ ,  $S_{16} = 26 + S_{12} = 56$ ,  $S_{20} = 34 + S_{16} = 90$ .

故选: D.

6. D

【分析】

把问题转化成为求数列的和, 根据数列求和的方法求解.

【详解】问题转化为: 已知  $\{a_n\}$  中,  $a_n = n$ ,

$A_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $S_n$  是数列  $\{A_n\}$  的前  $n$  项和. 最终求  $S_{100}$ .

$$\text{所以 } A_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$S_{100} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + 100) = \frac{1}{2} \times \frac{100 \times 101 \times 201}{6} + \frac{5050}{2} = 171700.$$

故选: D

【点睛】关键点点睛: 正整数前  $n$  项的平方和公式:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

要记清，这是求解的一个重点.

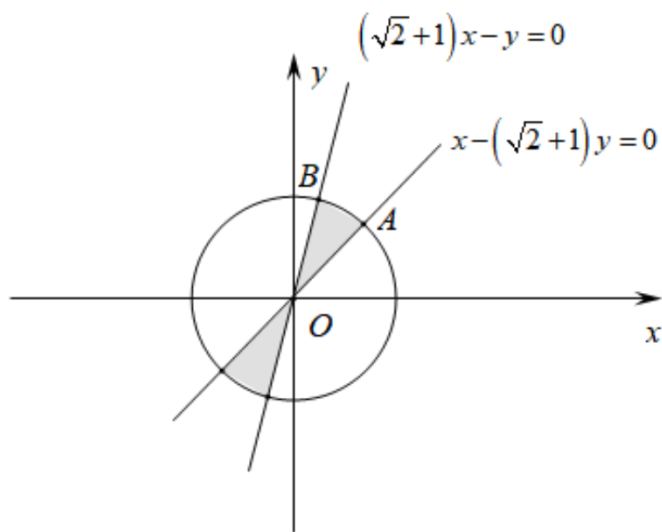
7. B

【分析】先求出 A、B 所表示区域的面积，然后代入几何概率公式，计算即可得答案.

【详解】根据题意可得集合  $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$  所表示的区域

即为如图所表示的圆及内部的平面区域，面积为  $2\pi$ ，

集合  $B = \{(x, y) | [(\sqrt{2}+1)x - y][x - (\sqrt{2}+1)y] < 0\}$ ，



表示的平面区域即为图中的阴影部分，设  $\alpha = \angle xOA$ ,  $\beta = \angle xOB$ ，

所以  $\tan \beta = \sqrt{2} + 1$ ,  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$ ，

$$\tan \angle AOB = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \frac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)}{1 + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 1,$$

所以  $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ ，所以阴影部分的面积为： $S = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}$ ，

根据几何概率的计算公式可得  $P = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$ ，

故选：B.

8. A

【分析】

根据辅助角公式，结合三角函数的性质可得  $\cos x = -\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ,  $\sin x = -\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，即可由和差角公式求解.

【详解】  $y = 3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x + \theta)$ , 其中  $\cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$ ,

当  $x + \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  时, 取最小值, 此时  $x = -\theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

故  $\cos x = -\sin \theta = -\frac{4}{5}, \sin x = -\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ,

故  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{-4}{5} = -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ ,

故选: A

9. C

【分析】

分两个 0 之间有一个数字, 两个数字和三个数字, 结合排列知识进行求解, 相加后得到答案.

【详解】 从左到右的 6 个位置分别为  $A, B, C, D, E, F$ ,

若两个 0 之间有一个数字, 此时两个 0 的位置有  $A, C$  或  $B, D$  或  $C, E$  或  $D, F$  四种情况,

在把剩余的 4 个数进行全排列, 此时共有  $4A_4^4 = 96$  种,

若两个 0 之间有两个数字, 此时两个 0 的位置有  $A, D$  或  $B, E$  或  $C, E$  三种情况,

剩余的 4 个数进行全排列, 此时有  $3A_4^4 = 72$  种,

若两个 0 之间有三个数字, 此时两个 0 的位置有  $A, E$  或  $B, F$  两种情况,

剩余的 4 个数进行全排列, 此时有  $2A_4^4 = 48$  种,

综上, 可以设置的密码共有  $96 + 72 + 48 = 216$  个.

故选: C

10. C

【分析】

利用对数的运算及排除法即可求解.

【详解】

由  $\ln y = \ln x + \ln(y - x)$  得  $y = x(y - x) = xy - x^2$ ,

显然  $x \neq 1$ , 所以  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,

由  $x > 0$ ,  $y > 0$  得  $x > 1$ ,

所以  $f(x) = \frac{x^2}{x-1} (x > 1)$ , 排除 AB,

由  $f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 2+2=4$ ，当且仅当  $x=2$  时取等号，可排除 D.

故选：C.

11. D

【分析】

设直线  $MN$  的方程及  $M$ 、 $N$  的坐标，利用韦达定理、弦长公式计算即可.

【详解】设双曲线方程  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，焦距  $2c$ ，显然  $a=4, b=3, c=5$ ，

不妨设  $MN$  的方程为： $y=k(x-c), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，

$MN$  的中点为  $Q$ ，则  $Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ，

联立双曲线方程  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx - ck \end{cases} \Rightarrow (b^2 - a^2k^2)x^2 + 2ca^2k^2x - a^2c^2k^2 - a^2b^2 = 0$ ，

所以  $x_1 + x_2 = \frac{2ca^2k^2}{a^2k^2 - b^2}$ ， $x_1x_2 = -\frac{a^2c^2k^2 + a^2b^2}{a^2k^2 - b^2}$ ， $\left(k \neq \pm \frac{3}{4}\right)$ ，

则  $\frac{y_1+y_2}{2} = k\left(\frac{x_1+x_2}{2} - c\right) = \frac{ckb^2}{a^2k^2 - b^2}$ ，

$|MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2ab^2\sqrt{1+k^2}}{|a^2k^2 - b^2|} = \frac{2ab^2(1+k^2)}{|a^2k^2 - b^2|}$ ，

易知  $Q\left(\frac{ca^2k^2}{a^2k^2 - b^2}, \frac{cb^2k}{a^2k^2 - b^2}\right)$ ，

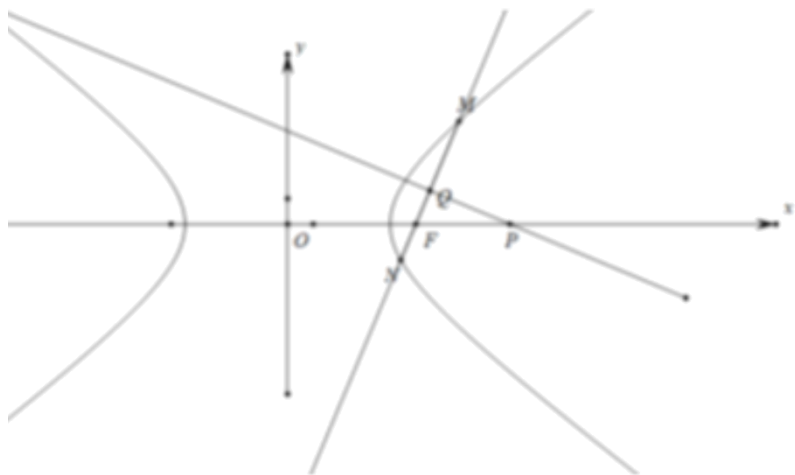
则  $l_{PQ}: y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{ca^2k^2}{a^2k^2 - b^2}\right) + \frac{cb^2k}{a^2k^2 - b^2}$ ，

令  $y=0 \Rightarrow x_P = \frac{cb^2k^2}{a^2k^2 - b^2} + \frac{ca^2k^2}{a^2k^2 - b^2} = \frac{c^3k^2}{a^2k^2 - b^2}$ ，

则  $|PF| = \left| \frac{c^3k^2}{a^2k^2 - b^2} - c \right| = \frac{cb^2(k^2+1)}{|a^2k^2 - b^2|}$

所以  $\frac{|MN|}{|PF|} = \frac{2a}{c} = \frac{8}{5}$ 。

故选：D



12. A

【分析】

对  $a$  分类讨论，通过二阶求导得出函数  $f(x)$  的单调性，得出  $x=0$  是函数  $f(x)$  的唯一极小值点的条件.

【详解】因为  $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{a}{2}x^2 = \cos x + 1 + \frac{a}{2}x^2$ ，所以  $f'(x) = -\sin x + ax$ ，

令  $g(x) = f'(x) = -\sin x + ax$ ， $g'(x) = -\cos x + a$ ，

当  $a \geq 1$  时， $g'(x) = -\cos x + a \geq 0$ ，故  $g(x)$  单调递增，

又  $g(0) = 0$ ，故当  $x > 0$  时  $g(x) > 0$ ，当  $x < 0$  时  $g(x) < 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减，在  $(0, +\infty)$  上单调递增，

故  $x=0$  是函数  $f(x)$  的唯一极小值点，符合题意；

当  $a < 1$  时， $g'(0) = -1 + a < 0$ ，

故一定存在  $m > 0$ ，使得  $g(x)$  在  $(0, m)$  单调递减，

此时  $x=0$  不是函数  $f(x)$  的极小值点，不合题意，

综上所述， $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$ ，

故选：A.

【点睛】

关键点点睛：本题关键是通过二阶求导，得出函数  $f(x)$  的单调性，对  $a$  分类讨论得出结果.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/308027110062006052>