

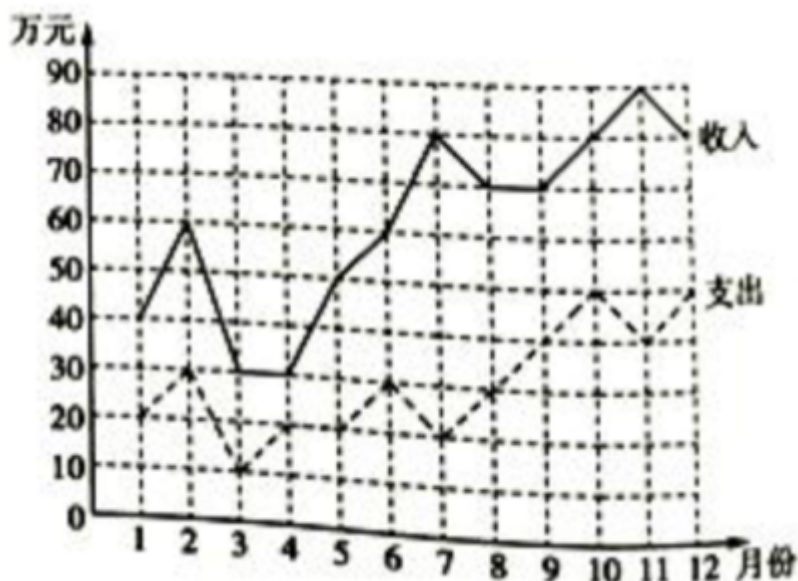
2023-2024 学年广东省兴宁市水口中学高三 5 月模拟（一模）数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知某超市 2018 年 12 个月的收入与支出数据的折线图如图所示：



根据该折线图可知，下列说法错误的是（ ）

- A. 该超市 2018 年的 12 个月中的 7 月份的收益最高
- B. 该超市 2018 年的 12 个月中的 4 月份的收益最低
- C. 该超市 2018 年 1-6 月份的总收益低于 2018 年 7-12 月份的总收益
- D. 该超市 2018 年 7-12 月份的总收益比 2018 年 1-6 月份的总收益增长了 90 万元

2. 已知底面为边长为 2 的正方形，侧棱长为 1 的直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点. 给出以下四个结论中，正确的个数是（ ）

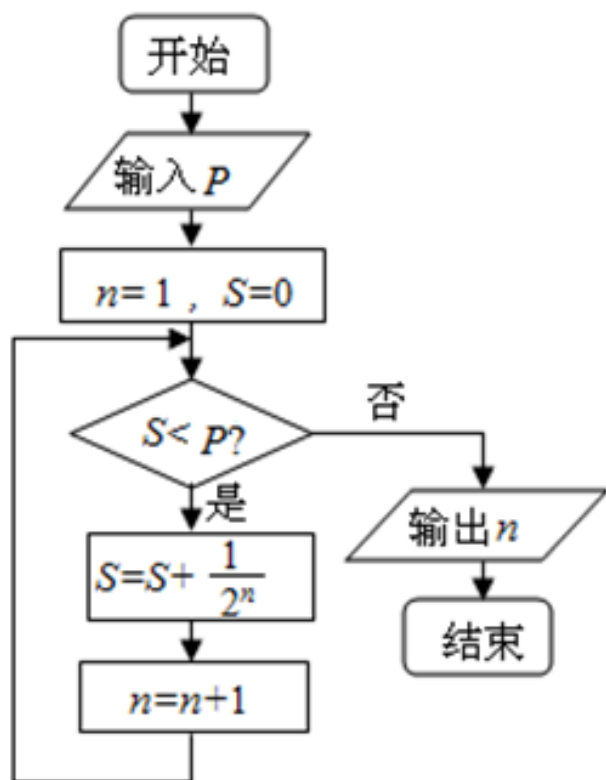
- ①与点 D 距离为 $\sqrt{3}$ 的点 P 形成一条曲线，则该曲线的长度是 $\frac{\pi}{2}$ ；
- ②若 $DP \parallel$ 面 ACB_1 ，则 DP 与面 ACC_1A_1 所成角的正切值取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}\right]$ ；
- ③若 $DP = \sqrt{3}$ ，则 DP 在该四棱柱六个面上的正投影长度之和的最大值为 $6\sqrt{2}$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 要得到函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标 ()

- A. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
- B. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
- C. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度
- D. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\frac{11\pi}{24}$ 个单位长度

4. 执行如图所示的程序框图后, 输出的值为 5, 则 P 的取值范围是 ().



- A. $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$ B. $\left[\frac{5}{6}, \frac{9}{10}\right]$ C. $\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right]$ D. $\left[\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right]$

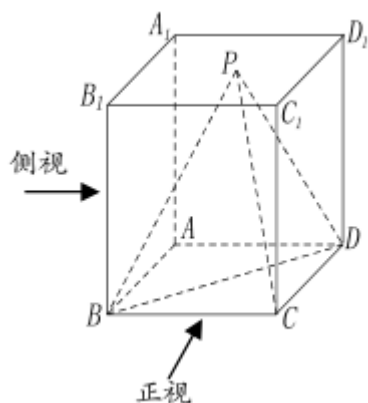
5. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 黑、白两蚂蚁从点 A 出发沿棱向前爬行, 每走完一条棱称为“走完一段”. 白蚂蚁爬行的路线是 $AA_1 \rightarrow A_1D_1 \rightarrow \dots$, 黑蚂蚁爬行的路线是 $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow \dots$, 它们都遵循如下规则: 所爬行的第 $i+2$ 段与第 i 段所在直线必须是异面直线 ($i \in \mathbb{N}^*$). 设白、黑蚂蚁都走完 2020 段后各自停止在正方体的某个顶点处, 这时黑、白两蚂蚁的距离是 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 0

6. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还。”意思为有一个人要走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了六天恰好到达目的地，请问第二天比第四天多走了（ ）

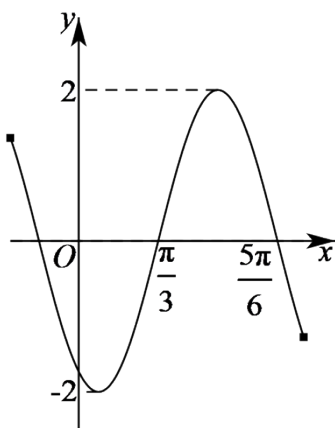
- A. 96 里 B. 72 里 C. 48 里 D. 24 里

7. 如图，在底面边长为 1，高为 2 的正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，则三棱锥 $P-BCD$ 的正视图与侧视图的面积之和为（ ）



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

8. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi \leq \pi$) 的图象如图所示，则下列说法错误的是（ ）



- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{17\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}\right]$ 上单调递减
- B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增
- C. 函数 $f(x)$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- D. 函数 $f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，焦点到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ ，则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm\sqrt{3}x$ B. $y = \pm\sqrt{2}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm 2x$

10. 若复数 z 满足 $z - \sqrt{3}(1+z)i = 1$ ，复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$ ，则 $z + \bar{z} =$ ()

- A. 1 B. 0 C. -1 D. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，则 $a_5 =$ ()

- A. $\frac{21}{2}$ B. 9 C. $\frac{17}{2}$ D. 7

12. 以下三个命题：①在匀速传递的产品生产流水线上，质检员每 10 分钟从中抽取一件产品进行某项指标检测，这样的抽样是分层抽样；②若两个变量的线性相关性越强，则相关系数的绝对值越接近于 1；③对分类变量 X 与 Y 的随机变量 k^2 的观测值 k 来说， k 越小，判断“ X 与 Y 有关系”的把握越大；其中真命题的个数为 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，若函数 $f(x) = \ln x - ax$ 在 $x=1$ 处的切线与圆 $C: x^2 - 2x + y^2 + 1 - a = 0$ 存在公共点，则实数 a 的取值范围为_____.

14. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_n > 0$ ， $a_1 = 1$ ，且 $2S_n = a_n(a_n + 1)$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，则 $S_{10} =$ _____.

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ x + y - 3 < 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x - y$ 的取值范围为_____.

16. 不等式 $\sqrt{x-1} < 1$ 的解集为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 2019 年底，北京 2022 年冬奥组委会启动志愿者全球招募，仅一个月内报名人数便突破 60 万，其中青年学生约有 50 万人。现从这 50 万青年学生志愿者中，按男女分层抽样随机选取 20 人进行英语水平测试，所得成绩(单位：分)统计结果用茎叶图记录如下：

男			女	
	6	4	7	
	3	5	7	9
0	3	8	5	6
1	4	7	1	3
	5	8	1	8

(I)试估计在这 50 万青年学生志愿者中，英语测试成绩在 80 分以上的女生人数；

(II)从选出的 8 名男生中随机抽取 2 人，记其中测试成绩在 70 分以上的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

(III)为便于联络，现将所有的青年学生志愿者随机分成若干组(每组人数不少于 5000)，并在每组中随机选取 m 个人作为联络员，要求每组的联络员中至少有 1 人的英语测试成绩在 70 分以上的概率大于 90%.根据图表中数据，以频率作为概率，给出 m 的最小值.(结论不要求证明)

18. (12 分) 手工艺是一种生活态度和对传统的坚持，在我国有很多手工艺品制作村落，村民的手工技艺世代相传，有些村落制造出的手工艺品不仅全国闻名，还大量远销海外.近年来某手工艺品村制作的手工艺品在国外备受欢迎，该村村民成立了手工艺品外销合作社，为严把质量关，合作社对村民制作的每件手工艺品都请 3 位行家进行质量把关，质量把关程序如下：(i) 若一件手工艺品 3 位行家都认为质量过关，则该手工艺品质量为 A 级；(ii) 若仅有 1 位行家认为质量不过关，再由另外 2 位行家进行第二次质量把关，若第二次质量把关这 2 位行家都认为质量过关，则该手工艺品质量为 B 级，若第二次质量把关这 2 位行家中有一人或 2 位认为质量不过关，则该手工艺品质量为 C 级；(iii) 若有 2 位或 3 位行家认为质量不过关，则该手工艺品质量为 D 级.已知每一次质量把关中一件手工艺品被 1 位行家认为质量不过关的概率为 $\frac{1}{3}$ ，且各手工艺品质量是否过关相互独立.

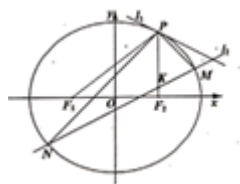
(1) 求一件手工艺品质量为 B 级的概率；

(2) 若一件手工艺品质量为 A, B, C 级均可外销，且利润分别为 900 元，600 元，300 元，质量为 D 级不能外销，利润记为 100 元.

①求 10 件手工艺品中不能外销的手工艺品最有可能是多少件；

②记 1 件手工艺品的利润为 X 元，求 X 的分布列与期望.

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 ，点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上，满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{9}{4}$



(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 直线 l_1 过点 P ，且与椭圆只有一个公共点，直线 l_1 与 l_2 的倾斜角互补，且与椭圆交于异于点 P 的两点 M, N ，与直线 $x=1$ 交于点 K (K 介于 M, N 两点之间)，是否存在直线 l_2 ，使得直线 l_1, l_2, PM, PN 的斜率按某种排序能构成等比数列？若能，求出 l_2 的方程，若不能，请说理由。

20. (12 分) 已知命题 $P: \forall x \in R, x^2 - x + m > 0$ ；命题 Q : 函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{2}x$ 无零点。

(1) 若 $\neg Q$ 为假，求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $P \wedge Q$ 为假， $P \vee Q$ 为真，求实数 m 的取值范围。

21. (12 分) 某工厂为提高生产效率，需引进一条新的生产线投入生产，现有两条生产线可供选择，生产线①：有 A, B 两道独立运行的生产工序，且两道工序出现故障的概率依次是 $0.02, 0.03$ 。若两道工序都没有出现故障，则生产成本为 15 万元；若 A 工序出现故障，则生产成本增加 2 万元；若 B 工序出现故障，则生产成本增加 3 万元；若 A, B 两道工序都出现故障，则生产成本增加 5 万元。生产线②：有 a, b 两道独立运行的生产工序，且两道工序出现故障的概率依次是 $0.04, 0.01$ 。若两道工序都没有出现故障，则生产成本为 14 万元；若 a 工序出现故障，则生产成本增加 8 万元；若 b 工序出现故障，则生产成本增加 5 万元；若 a, b 两道工序都出现故障，则生产成本增加 13 万元。

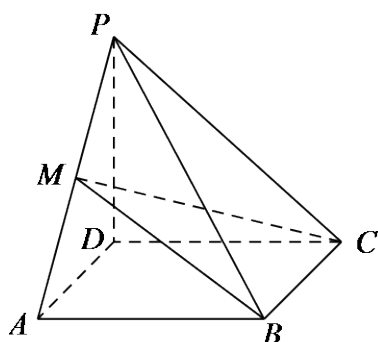
(1) 若选择生产线①，求生产成本恰好为 18 万元的概率；

(2) 为最大限度节约生产成本，你会给工厂建议选择哪条生产线？请说明理由。

22. (10 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， M 是 PA 的中点， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PD = CD = 4, AD = 2$ 。

(1) 求 AP 与平面 CMB 所成角的正弦。

(2) 求二面角 $M-CB-P$ 的余弦值。



参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

用收入减去支出，求得每月收益，然后对选项逐一分析，由此判断出说法错误的选项.

【详解】

用收入减去支出，求得每月收益（万元），如下表所示：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
收益	20	30	20	10	30	30	60	40	30	30	50	30

所以 7 月收益最高，A 选项说法正确 4 月收益最低，B 选项说法正确 1-6 月总收益 140 万元，7-12 月总收益 240 万元，所以前 6 个月收益低于后六个月收益，C 选项说法正确，后 6 个月收益比前 6 个月收益增长 $240 - 140 = 100$ 万元，所以 D 选项说法错误.故选 D.

【点睛】

本小题主要考查图表分析，考查收益的计算方法，属于基础题.

2、C

【解析】

①与点 D 距离为 $\sqrt{3}$ 的点 P 形成以 D_1 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧 MN ，利用弧长公式，可得结论；②当 P 在 A_1 （或 C_1 ）时， DP 与面 ACC_1A_1 所成角 $\angle DA_1O$ （或 $\angle DC_1O$ ）的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 最小，当 P 在 O_1 时， DP 与面 ACC_1A_1 所成角 $\angle DO_1O$ 的正切值为 $\sqrt{2}$ 最大，可得正切值取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}]$ ；③设 $P(x, y, 1)$ ，则 $x^2 + y^2 + 1 = 3$ ，即 $x^2 + y^2 = 2$ ，可得 DP 在前后、左右、上下面上的正投影长，即可求出六个面上的正投影长度之和.

【详解】

如图：

①错误， 因为 $D_1P = \sqrt{DP^2 - DD_1^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$ ， 与点 D 距离为 $\sqrt{3}$ 的点 P 形成以 D_1 为圆心， 半径为 $\sqrt{2}$

的 $\frac{1}{4}$ 圆弧 MN ， 长度为 $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ；

②正确，因为面 $A_1DC_1 \parallel$ 面 ACB_1 ，所以点 P 必须在面对角线 A_1C_1 上运动，当 P 在 A_1 （或 C_1 ）时， DP 与面 ACC_1A_1 所成角 $\angle DA_1O$ （或 $\angle DC_1O$ ）的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 最小（ O 为下底面面对角线的交点），当 P 在 O_1 时， DP 与面 ACC_1A_1

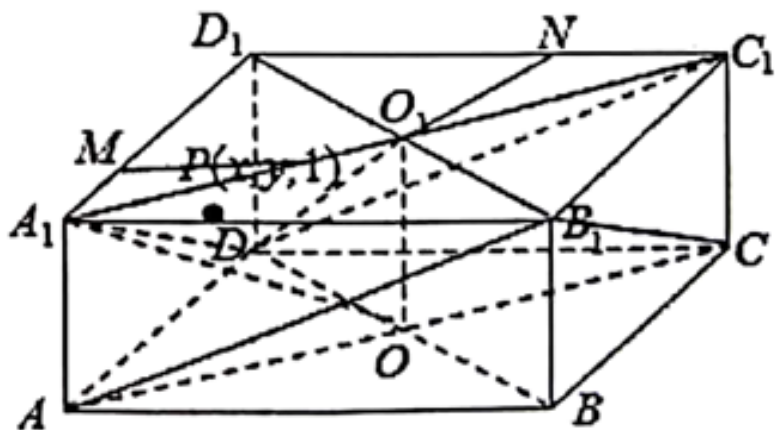
所成角 $\angle DO_1O$ 的正切值为 $\sqrt{2}$ 最大，所以正切值取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}\right]$ ；

③正确，设 $P(x, y, 1)$ ，则 $x^2 + y^2 + 1 = 3$ ，即 $x^2 + y^2 = 2$ ， DP 在前后、左右、上下面上的正投影长分别为

$\sqrt{y^2 + 1}$ ， $\sqrt{x^2 + 1}$ ， $\sqrt{x^2 + y^2}$ ，所以六个面上的正投影长度之

$$2(\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}) \leq 2\left(2\sqrt{\frac{y^2 + 1 + x^2 + 1}{2}} + \sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}，当且仅当 P 在 O_1 时取等号。$$

故选：C。



【点睛】

本题以命题的真假判断为载体，考查了轨迹问题、线面角、正投影等知识点，综合性强，属于难题。

3、B

【解析】

分析：根据三角函数的图象关系进行判断即可。

详解：将函数 $y = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），

得到 $y = \sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2} \times 2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $y = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ ，

故选 B。

点睛：本题主要考查三角函数的图象变换，结合 ω 和 φ 的关系是解决本题的关键。

4、C

【解析】

框图的功能是求等比数列的和，直到和不满足给定的值时，退出循环，输出 n 。

【详解】

第一次循环： $S = \frac{1}{2}, n = 2$ ；第二次循环： $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}, n = 3$ ；

第三次循环： $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}, n = 4$ ；第四次循环： $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}, n = 5$ ；

此时满足输出结果，故 $\frac{7}{8} < P \leq \frac{15}{16}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查程序框图的应用，建议数据比较小时，可以一步一步的书写，防止错误，是一道容易题。

5、B

【解析】

根据规则，观察黑蚂蚁与白蚂蚁经过几段后又回到起点，得到每爬 1 步回到起点，周期为 1。计算黑蚂蚁爬完 2020 段后实质是到达哪个点以及计算白蚂蚁爬完 2020 段后实质是到达哪个点，即可计算出它们的距离。

【详解】

由题意，白蚂蚁爬行路线为 $AA_1 \rightarrow A_1D_1 \rightarrow D_1C_1 \rightarrow C_1C \rightarrow CB \rightarrow BA$ ，

即过 1 段后又回到起点，

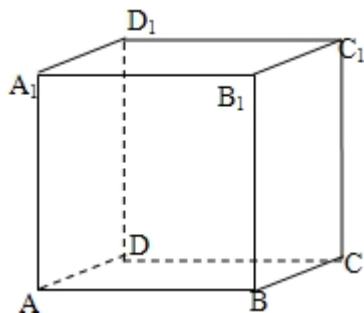
可以看作以 1 为周期，

由 $2020 \div 6 = 336 \text{L} 4$ ，

白蚂蚁爬完 2020 段后到回到 C 点；

同理，黑蚂蚁爬行路线为 $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow B_1C_1 \rightarrow C_1D_1 \rightarrow D_1D \rightarrow DA$ ，

黑蚂蚁爬完 2020 段后回到 D_1 点，



所以它们此时的距离为 $\sqrt{2}$ 。

故选 B。

【点睛】

本题考查多面体和旋转体表面上的最短距离问题，考查空间想象与推理能力，属于中等题.

6、B

【解析】

人每天走的路程构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，设此人第一天走的路程为 a_1 ，计算 $a_1 = 192$ ，代入得到答案.

【详解】

由题意可知此人每天走的路程构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，设此人第一天走的路程为 a_1 ，

$$\text{则 } \frac{a_1 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 378, \text{ 解得 } a_1 = 192, \text{ 从而可得 } a_2 = 192 \times \frac{1}{2} = 96, a_4 = 192 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 24, \text{ 故}$$

$$a_2 - a_4 = 96 - 24 = 72.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列的应用，意在考查学生的计算能力和应用能力.

7、A

【解析】

根据几何体分析正视图和侧视图的形状，结合题干中的数据可计算出结果.

【详解】

由三视图的性质和定义知，三棱锥 $P-BCD$ 的正视图与侧视图都是底边长为2高为1的三角形，其面积都是 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ ，正视图与侧视图的面积之和为 $1+1=2$ ，

故选：A.

【点睛】

本题考查几何体正视图和侧视图的面积和，解答的关键就是分析出正视图和侧视图的形状，考查空间想象能力与计算能力，属于基础题.

8、B

【解析】

根据图象求得函数 $y = f(x)$ 的解析式，结合余弦函数的单调性与对称性逐项判断即可.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/308054066030006134>