关于周期非正弦电路

主 要 内 容

主 要 内 容

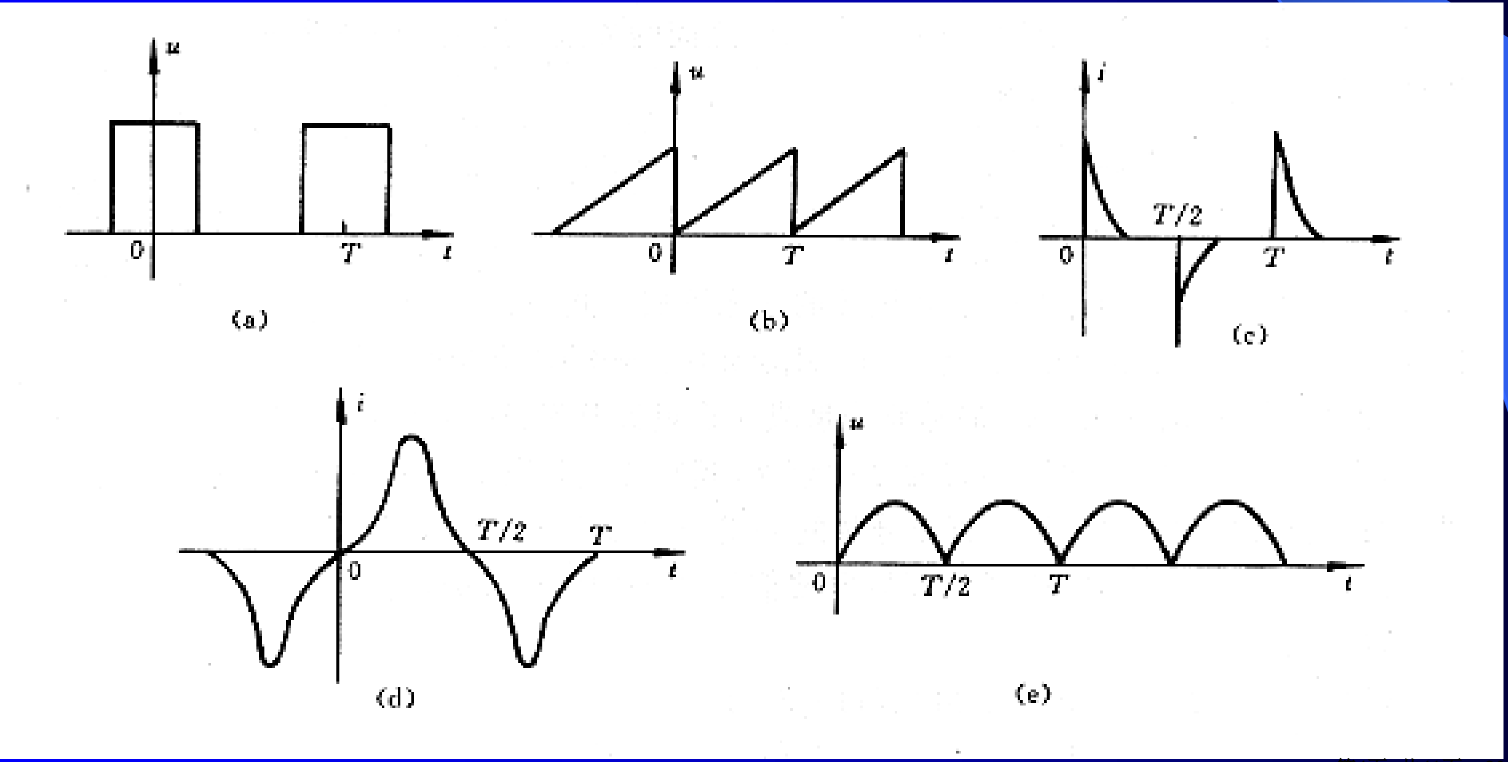
§ 11－6 周期非正弦信号激励时电路的响应

§ 11－7 不同频率正弦电源共同作用下电路的分析

§11－8 对称三相电路中的高次谐波

§11－1 周期非正弦信号

电工、电子技术中常遇到周期非正弦信号，下图示出了几种常见的周期非正弦电压和电流。



说明：全波整流电压和单相可控硅整流电压的周期是按整流电路输入正弦电压的周期计，所以T为两个半波对应的时间。

周期非正弦电路的形成：

（1）线性电路中激励为周期非正弦信号；

（2）线性电路中，激励为若干个不同频率的正弦信号；

（3）激励为正弦信号，但电路中有非线性元件（如铁心线圈、铁心变压器等）或时变元件；

（4）前两种激励作用于非线性元件。

本章仅讨论第（1）、（2）两种情况。

§11－2 周期非正弦信号的傅立叶级数

任何周期非正弦函数当满足狄里赫利条件时，都可展开成傅立叶级数。电工、电子技术中的周期非正弦信号，通常都满足狄里赫利条件。

一. 周期非正弦信号 $f(t)$ 展成傅氏级数

$$
f(t)\begin{cases}\text{周期：}T\\ \text{频率：}f = 1/T\\ \text{角频率：}\omega = 2\pi/T\end{cases}
$$

傅氏级数形式一：

$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) + (a_2 \cos 2\omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t) + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) \qquad \text{——①}$$

傅氏级数形式二：式①可写成如下形式

$$f(t) = A_0 + A_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{2m} \cos(2\omega_1 t + \psi_2) + \cdots$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \psi_k) \qquad \text{——②}$$

二. 傅氏级数各参数之计算

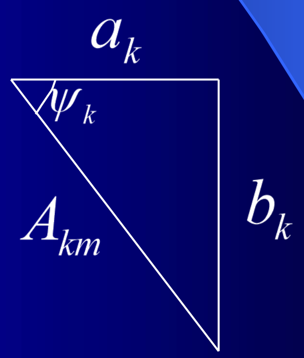
由数据分析有

式①： $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$

$$\left.\begin{aligned} A_{km} &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \psi_k &= \arctan\frac{-b_k}{a_k} \end{aligned}\right\}$$

对应

$\longleftrightarrow$



三．说明

1．式②中

A_0 ——*f* (t)的恒定分量或直流分量

$A_{1m}\cos(\omega_1 t+\psi_1)$ ——*f* (t)的基波（分量）或1次谐波（分量）

$A_{2m}\cos(2\omega_1 t+\psi_2)$ ——*f* (t)的2次谐波（分量）

$A_{3m}\cos(3\omega_1 t+\psi_3)$ ——*f* (t)的3次谐波（分量）

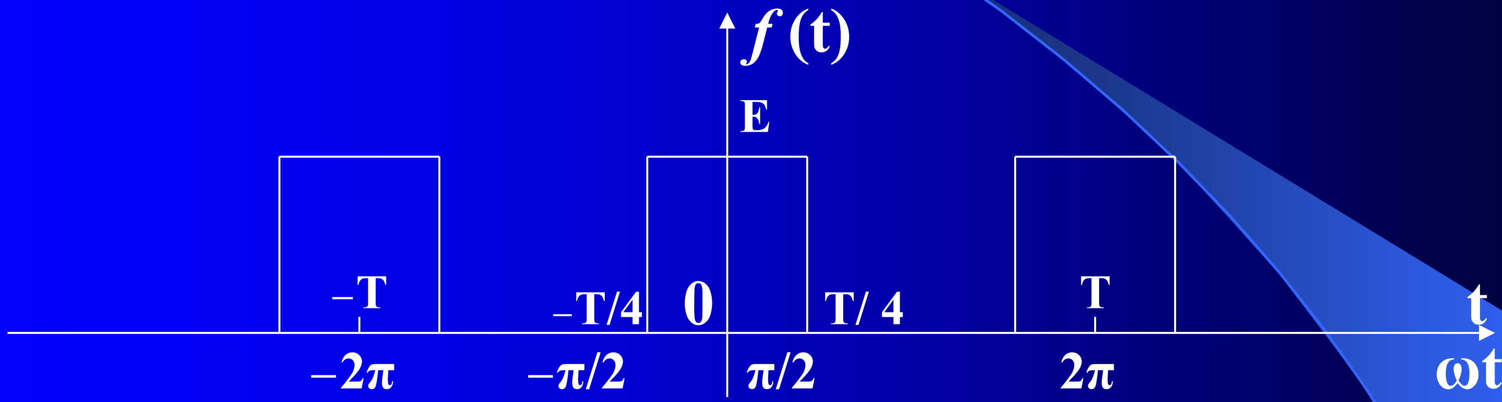
⋮

2次及2次以上的谐波统称为高次谐波；

2．傅氏级数具有收敛性，即随着频率的增加，谐波幅值总的趋势越来越小；

3．$f(t)$ 波形越平滑，越接近正弦，其高次谐波分量越小，级数收敛越快；$f(t)$ 波形越不平滑或有跳跃其高次谐波分量大，级数收敛慢。

例11－1 求下图所示周期方波信号 $f(t)$ 的傅立叶级数。



解

（1）傅立叶系数a_0、 a_k、 b_k：由公式得

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} E\,dt = \frac{E}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k\omega_1 t \, d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E\cos k\omega_1 t \, d(\omega_1 t) = \frac{2E}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$$

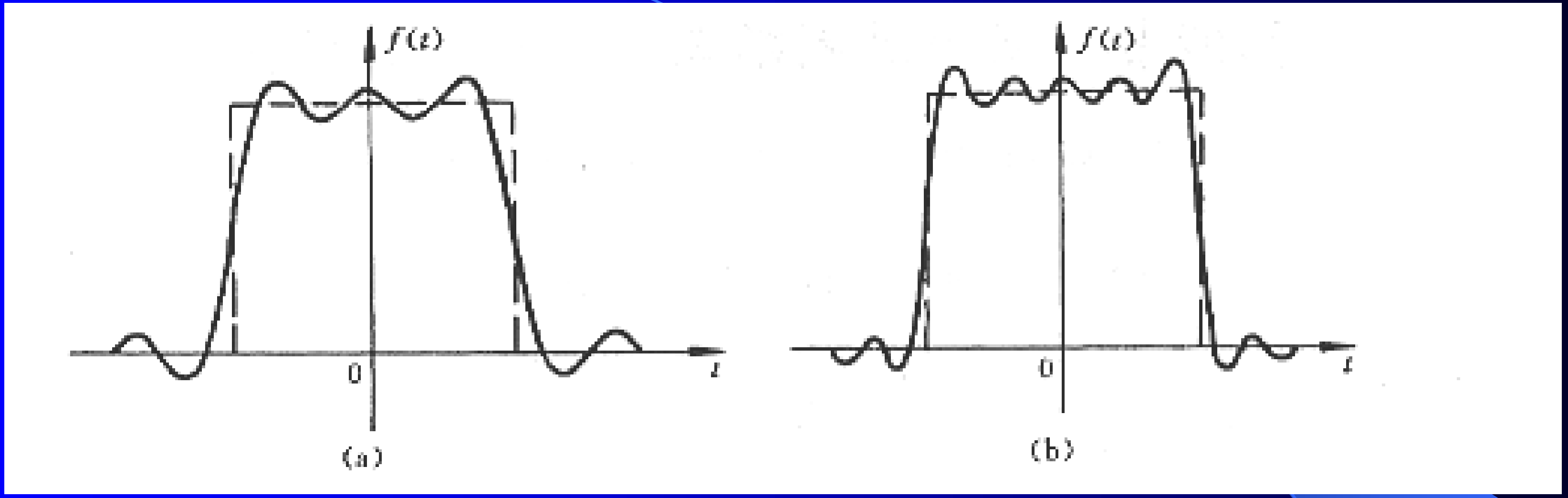
$$= \begin{cases} 0 & k = 2,4,6,\cdots \\ \dfrac{2E}{k\pi} & k = 1,5,9,\cdots \\ -\dfrac{2E}{k\pi} & k = 3,7,11,\cdots \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin k\omega_1 t \, d(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E\sin k\omega_1 t \, d(\omega_1 t) = 0$$

（2）f(t) 的傅立叶级数展开式：将求得的傅立叶系数带入式①，得

$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{2E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t+\cdots\right)$$

周期非正弦信号的傅立叶级数有无穷多项，由于它具有收敛性，因此，一般可只取前若干项近似表示。项数取得越多，近似效果越好。上例方波信号的傅立叶级数展开式，若取前四项、即取到5次谐波，其合成波形如下图（a）所示。若取前7项、即取到11次谐波，则合成波形如图（b）所示。可见所取谐波项数越多。合成的波形越接近原信号波形。



几种常见的周期非正弦信号的傅立叶级数见本章最后一页。

本节完

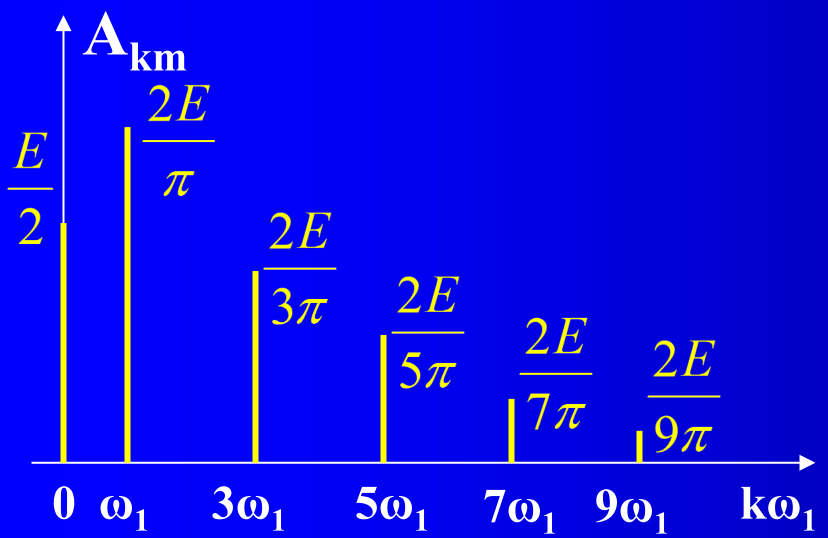
§11－3 周期非正弦信号的频谱

为了直观、清晰地看出各谐波幅值A_{km}、初相位ψ_k与频率$k\omega$之关系，可以画出$A_{km}\sim k\omega_1$和$\psi_k\sim k\omega_1$的谱线图，它们分别称为幅度频谱图和相位频谱图（见下面的例）

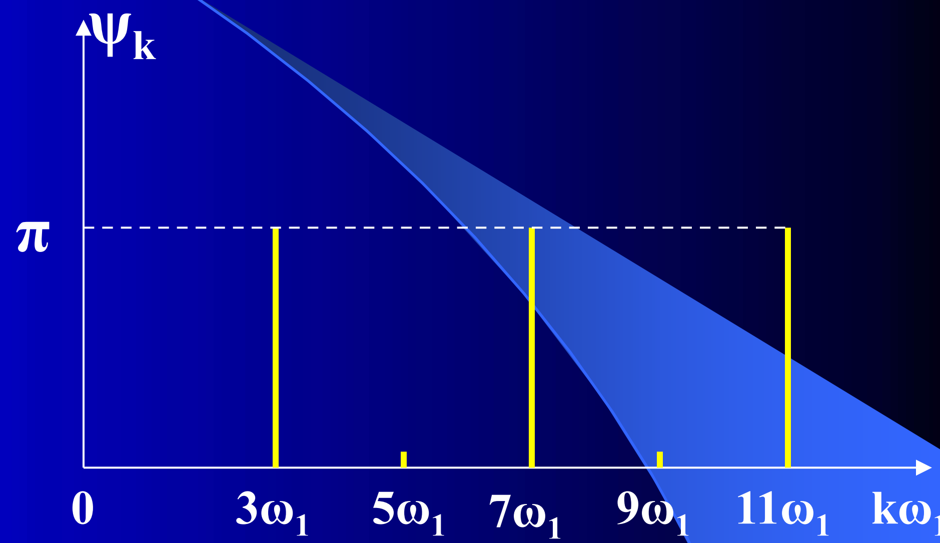
例

$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{2E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t+\cdots\right)$$

其对应的频谱图如下：



（a）幅度频谱



（b）相位频谱

频谱图中的竖线称为谱线，谱线只可能在离散点$k\omega_1$的位置上出现，因此是离散频谱。谱线的间距取决于信号$f(t)$的周期T，T越大，ω_1越小，谱线间距越窄，谱线越密。

信号的幅度频谱和相位频谱的重要性在不同场合有所不同，如传送语音信号时，重要的是使各频率分量的幅值相对不变，以保持原来的音调，即不失真，因此幅度频谱很重要，而相位频谱并不重要，因为人的听觉对各频率分量的相位关系不敏感。但是在传送图像信号时，保持各频率分量间的相位关系则对图像的不失真具有重要意义。

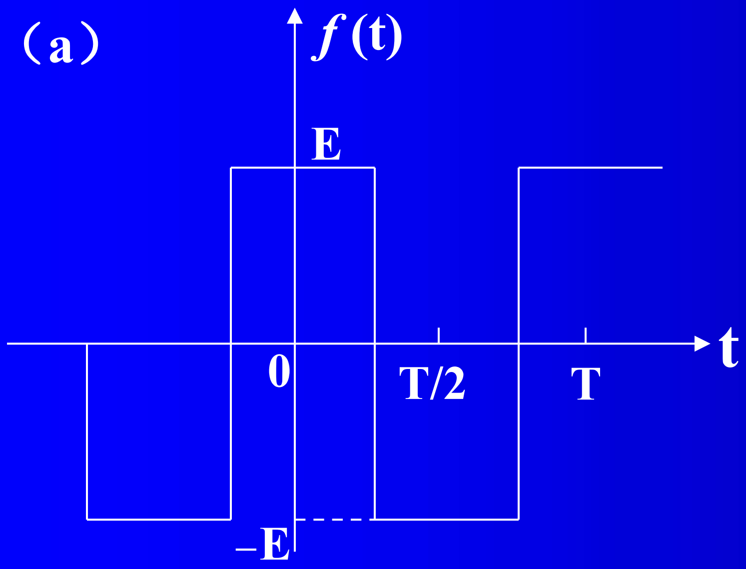
§11－4 傅立叶系数与波形对称性的关系

对一个周期非正弦函数进行分解时，应先分析它是否具有对称性。如果波形具有对称性，则它的某些傅立叶系数将为零，利用这一特点，计算将大为简化。下面分析傅立叶系数波形对称性的关系。

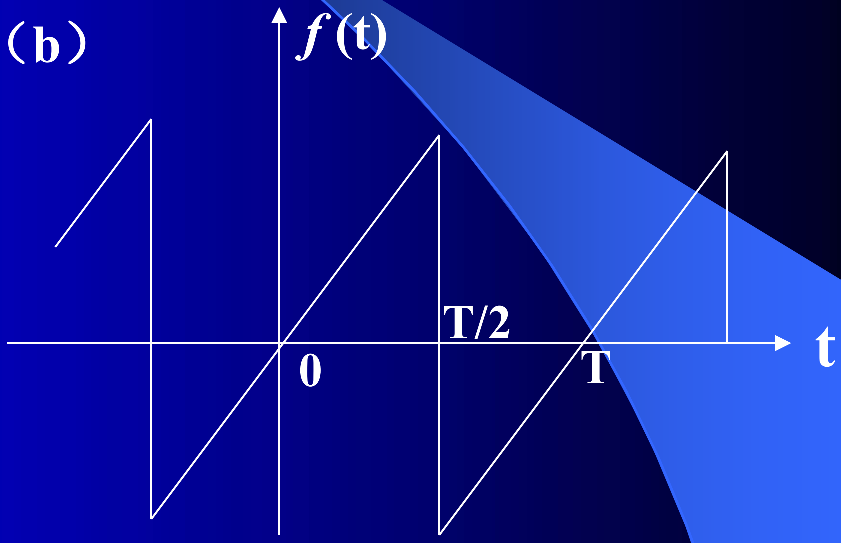
一. $f(t)$ 波形在一个周期内，在 t 轴上、下的面积相等

下面所示波形属于此情况，此时有

（a）



（b）



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 0$$

二. f(t) 为偶函数 —— f(t) = f(–t)

波形特点：对称于纵轴，例如上图（a）。

傅氏级数特点：不含奇函数，即傅氏级数形式一中无正弦分量，

$$b_k = 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t$$

式中a_0可能为零，也可能不为零。上图（a）的a_0＝0，若图（a）的t 轴下移，则 $a_0 \neq 0$。