微考点 6-1 圆锥曲线中的非对称韦达定理问题（三大题型）

考点解密

在一些定点、定值、定线问题中，还常出现需要证明类似$\dfrac{(y_2-2)x_1}{(y_1+2)x_2}$为定值的情形，通过直线代换可得：

$\dfrac{(y_2-2)x_1}{(y_1+2)x_2}=\dfrac{(kx_2+2)x_1}{(kx_1+6)x_2}=\dfrac{kx_1x_2+2x_1}{kx_1x_2+6x_2}$，但此时式子并不能完全整理为韦达定理的形式，这种式子一般称为非对称韦达定理”．或者在处理斜率比值的时候：$\dfrac{k_{PA}}{k_{PB}}=\dfrac{\dfrac{y_1-t}{x_1}}{\dfrac{y_2-t}{x_2}}=\dfrac{x_2y_1-tx_2}{x_1y_2-tx_1}=\dfrac{kx_1x_2+(m-t)x_2}{kx_1x_2+(m-t)x_1}$

我们明明求了韦达定理却无法代入，这时我们就需要通过所求得的韦达定理找到x_1+x_2和$x_1\cdot x_2$之间的关系，将其中一个替换，常用手段是把乘法的替换成加法．

这样的非对称形式，即韦达定理无法直接代入，可以通过韦达定理构造互化公式，先局部互化，然后可整理成对称型．

具体办法：

①联立方程后得到韦达定理：$\begin{cases}x_1+x_2=f(t)\\x_1x_2=g(t)\end{cases}\Rightarrow m(t)(x_1+x_2)=n(t)x_1x_2$代入之后进行代换消元解题．

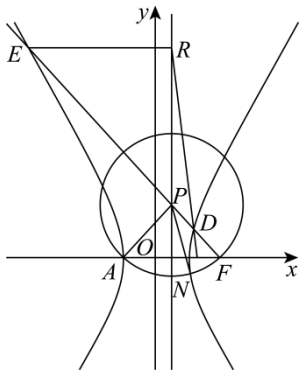
②利用点在椭圆方程上代换

题型解密

题型一：利用非对称韦达定理思想解决定点问题

【精选例题】

【例 1】已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$的左顶点为$A$，右焦点为$F$，$P$是直线$l:x=\dfrac{a}{2}$上一点，且$P$不在$x$轴上，以点$P$为圆心，线段$PF$的长为半径的圆弧$AF$交$C$的右支于点$N$．



(1)证明：$\angle APN=2\angle NPF$；

(2)取$a=1$，若直线PF与C的左、右两支分别交于E，D两点，过E作l的垂线，垂足为R，试判断直线DR是否过定点若是，求出定点的坐标；若不是，请说明理由．

【答案】(1)证明见解析；(2)答案见解析

【分析】（1）过N作l的垂线，垂足为H，且与圆弧AF交于点M，则$MN\parallel AF$，结合圆的知识可得

$|AM|=|NF|$，$|MH|=|HN|$，设点$N(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{3a^2}=1$，由$\frac{|NF|}{|HN|}=2$，可得$|NF|=2|HN|$，即得$|AM|=|NF|=|MN|$（用双曲线的第二定义来说明，也可以），由相等弦长所对的圆心角相等，得$\angle APM=\angle MPN=\angle NPF$，进而求解；（2）设直线$PF$的方程为$x=my+2$，由题意可得$m\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，联立方程组，结合韦达定理可得$y_1+y_2$，$y_1y_2$，由题知，直线$DR$的方程为$y-y_2=\frac{y_2-y_1}{\frac{1}{2}-x_1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，令$y=0$，化简即可求解.

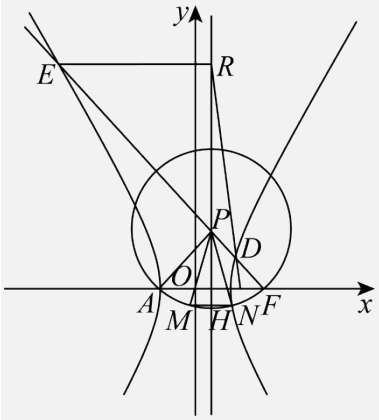
【详解】（1）证明：过N作l的垂线，垂足为H，且与圆弧AF交于点M，则$MN\parallel AF$，

连接AM，PM，NF．因为在圆P中，$PH\perp AF$，$PH\perp MN$，所以$|AM|=|NF|,|MH|=|HN|$.

由题易知右焦点$F(2a,0)$，设点$N(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{3a^2}=1$，整理得$y_0^2=3x_0^2-3a^2$.

因为$\frac{|NF|}{|HN|}=\frac{\sqrt{(x_0-2a)^2+y_0^2}}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=\frac{\sqrt{(x_0-2a)^2+3x_0^2-3a^2}}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=\frac{\sqrt{(2x_0-a)^2}}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=\frac{|2x_0-a|}{\left|x_0-\frac{a}{2}\right|}=2$，

所以$|NF|=2|HN|$，所以$|AM|=|NF|=|MN|$.



【这里若学生用双曲线的第二定义来说明，也可以．见下：因为直线$l:x=\frac{a}{2}$为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$的准线，根据双曲线的第二定义，可知$\frac{|NF|}{|HN|}=\frac{c}{a}=2$，即$|NF|=2|HN|$，即得$|AM|=|NF|=|MN|$．】

在圆P中，由相等弦长所对的圆心角相等，得$\angle APM=\angle MPN=\angle NPF$，

所以$\angle APN=2\angle NPE$.

（2）由题知双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$，渐近线为：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，右焦点为$F(2,0)$，

直线PF的斜率不为0，设直线PF的方程为$x=my+2$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/308111063040006037