辽宁省名校联盟2023-2024学年高二下学期3月联合考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知$z_1=2+2\mathrm{i},z_2=1+3\mathrm{i}$，则（　）

A．$z_1>z_2$　　B．$z_1<z_2$　　C．$|z_1|>|z_2|$　　D．$|z_1|<|z_2|$

2．已知集合$A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+2}\le 0\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{-1,0,1,2\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{1,2\}$

3．已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与直线$y=2x$垂直，则双曲线$C$的离心率为（　）

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

4．已知θ为第二象限角，若$\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|=-\sin\dfrac{\theta}{2}$，则$\dfrac{\theta}{2}$在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

5．函数$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}-|\log_3 x|$的零点个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．若$\left(3x-\dfrac{1}{x}\right)^n(n\in\mathrm{N}^*)$的展开式中各项系数和为16，则其展开式中的常数项为（　）

A．54　　B．-54　　C．108　　D．-108

7．若球的两个平行截面的面积分别为10π和16π，球心到这两个截面的距离之差为$\sqrt{2}$，则球的直径为（　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$5\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

8．已知$f(x)$是定义在R上的偶函数，当$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且$x_1\ne x_2$时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>4(x_1+x_2)$恒成立，$f(2)=16$，则满足$f(\ln m)\le 4(\ln m)^2$的$m$的取值范围为（　）

A．$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$　　B．$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},1\right]$　　C．$\left[1,\mathrm{e}^2\right]$　　D．$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}^2\right]$

二、多选题

9．为了得到函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象，只需把正弦曲线上所有的点（　）

A．先向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变

B．先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再将横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变

C．先将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D．先将横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

10．已知 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 是夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的单位向量，且 $\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2},\vec{b}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，则（　）

A．$|\vec{a}|=\sqrt{7}$　　B．$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$　　C．$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$　D．$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\vec{b}$

11．对于直线 $l_1: ax+2y+3a=0, l_2: 3x+(a-1)y+3-a=0$，则（　）

A．$l_1//l_2$ 的充要条件是 $a=3$ 或 $a=-2$　　B．当 $a=\frac{2}{5}$ 时，$l_1\perp l_2$

C．直线 l_2 经过第二象限内的某定点　　D．点 $P(1,3)$ 到直线 l_1 的距离的最大值为 $3\sqrt{2}$

12．在四面体 $ABCD$ 中，棱 AB 的长为 $4, AB\perp BD, CD\perp BD, BD=CD=2$，若该四面体的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则（　）

A．异面直线 AB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$　B．AC 的长不可能为 $4\sqrt{2}$

C．点 D 到平面 ABC 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$　　D．当二面角 $A-BC-D$ 是钝角时，其正切值为 $-\sqrt{6}$

三、填空题

13．若某圆锥的侧面积为底面积的 2 倍，则该圆锥的母线与底面所成角的正切值为______.

14．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a=2b\cos C$，则这个三角形一定是______三角形.

15．已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F, O 为坐标原点，M 为抛物线上异于点 O 的动点，则

$\dfrac{|MF|}{|MO|}$的最小值是______.

16．甲、乙、丙、丁四位同学参加跳台滑雪、越野滑雪、单板滑雪三个项目的比赛，每人只能参加一个项目，每个项目至少一个人参加，且甲、乙两人不能参加同一项目的比赛，则四人参加比赛的不同方案一共有_____种；如果符合以上条件的各种方案出现的概率相等，定义事件A为丙和丁参加的项目不同，事件B为甲和乙恰好有一人参加跳台滑雪，则$P(B|A)=$________.

四、解答题

17．计算下列各式.

(1)$0.125^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{9}{8}\right)^{0}+\left[(-2)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3})^{6}$；

(2)$\frac{1}{2}\lg 25+\lg 2-\lg\sqrt{0.1}-\log_2 9\times\log_3 2$.

18．已知函数$f(x)=x^2+bx+6(b>0)$有唯一零点，函数$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x<0)$.

(1)求$g(x)$的单调递增区间，并用定义法证明；

(2)求$g(x)$的值域.

19．已知集合$A=\left\{x\middle|a\le 2^{x-1}\le 4\right\}$，集合$B=\left\{x\middle|\log_3(2x+1)<2\right\}$.

(1)当$a=\dfrac{1}{2}$，求$\left(\complement_{R}A\right)\cap B$；

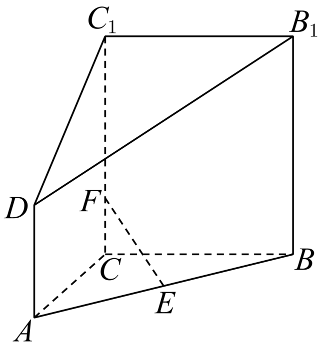
(2)已知“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，求a的取值范围.

20．已知$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$.

(1)求$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$的值；

(2)求$\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}+\alpha\right)+\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}+\alpha\right)}$的值.

21．如图，多面体$ABC-DB_1C_1$是由三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$截去部分后而成，D是AA_1的中点.



(1)若 $AD = AC = 3, AD \perp$ 平面 $ABC, BC \perp AC$，求点 C 到平面 B_1C_1D 的距离；

(2)如图，点 E 在线段 AB 上，且 $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EB}$，点 F 在 CC_1 上，且 $\overrightarrow{CC_1} = \lambda\overrightarrow{CF}$，问 λ 为何值时，EF // 平面 B_1C_1D？

22．已知椭圆 $T: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B，左焦点为 $F_1(-c, 0)$，过点 F_1 作 x 轴的垂线与 T 在第二象限的交点为 M，$\triangle MBF_1$ 的面积为 $\dfrac{50}{3}$，且 $\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

(1)求 T 的方程；

(2)已知点 P 为直线 $8x + 7y - 113 = 0$ 上一动点，过点 P 向 T 作两条切线，切点分别为 J, K．求证：直线 JK 恒过一定点 Q，并求出点 Q 的坐标.

参考答案：

1．D

【分析】根据复数的定义即可判断AB，根据复数的模的计算公式即可判断CD.

【详解】由复数$z_1=2+2\mathrm{i},z_2=1+3\mathrm{i}$，可得两个复数不能比较大小，故AB错误，

$\left|z_1\right|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2},\left|z_2\right|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，所以$\left|z_1\right|<\left|z_2\right|$，故C错误，D正确.

故选：D.

2．C

【分析】由$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+2}\le 0\right.\right\}$解出不等式，得到集合$B$，再由交集的定义即可得到结果.

【详解】由$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+2}\le 0\right.\right\}$得$B=\left\{x\left|-2<x\le 1\right.\right\}$，

又因为$A=\left\{-2,-1,0,1,2\right\}$，

所以$A\cap B=\left\{-1,0,1\right\}$

故选：C.

3．C

【分析】根据双曲线的一条渐近线与直线$y=2x$垂直求出$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，进而求出离心率.

【详解】双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

$\because$双曲线的一条渐近线与直线$y=2x$垂直，

$\therefore$双曲线C一条渐近线的斜率为$-\frac{1}{2}$，所以$-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$，即$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，

因此双曲线C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选：C.

4．C

【分析】由$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi,k\in\mathrm{Z}$，得到$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$，再对$k$赋值，根据$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=-\sin\frac{\theta}{2}$判断.

【详解】解：因为θ为第二象限角，

所以$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi,k\in Z$，

则$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，

当$k=0$时，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，当$k=1$时，$\frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{2}$，

因为$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=-\sin\frac{\theta}{2}$，

所以$\sin\frac{\theta}{2}<0$，所以$\frac{\theta}{2}$在第三象限，

故选:C

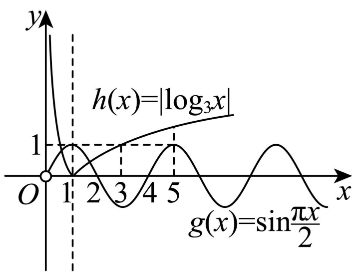
5．B

【分析】在坐标平面中画出两个函数的图像，从而可判断零点的个数.

【详解】函数$f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}-\left|\log_3 x\right|$的零点个数，

即函数$g\left(x\right)=\sin\frac{\pi x}{2}$与$h\left(x\right)=\left|\log_3 x\right|$的交点个数，

在坐标平面中画出两个函数的图像，如图所示：



则两个图像交点的个数为2，

故选：B

6．A

【分析】令$x=1$，结合已知求出n，再求出展开式的通项，令x的指数等于零，即可得解.

【详解】令$x=1$，可得$\left(3-1\right)^n=16$，所以$n=4$，

则$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^4$展开式的通项为$T_{k+1}=C_4^k\left(3x\right)^{4-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\left(-1\right)^k\cdot 3^{4-k}C_4^k x^{4-2x}$，

令$4-2x=0$，得$x=2$，

所以展开式中的常数项为$\left(-1\right)^2\times 3^2 C_4^2=54$.

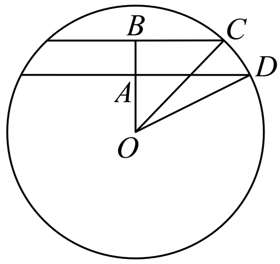
故选：A.

7．D

【分析】根据题意作出截面图，即可根据勾股定理给求出球的半径.

【详解】设球心为O，半径为R，

若两平面在球心同一侧，画出其截面图，如图：



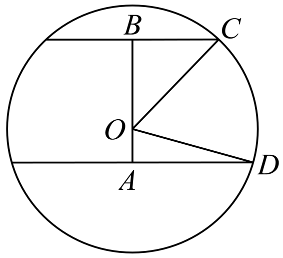
设$OA=d$，

由题可得$AD=4$，$BC=\sqrt{10}$，$AB=\sqrt{2}$，$OD=OC=R$，

则$\begin{cases}R^2=4^2+d^2\\R^2=(\sqrt{10})^2+(d+\sqrt{2})^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}d=\sqrt{2}\\R=3\sqrt{2}\end{cases}$.

故球的直径为$2R=6\sqrt{2}$.

若两平面在球心两侧，画出其截面图，如图：



设$OA=d$，

由题可得$AD=4$，$BC=\sqrt{10}$，$AB=\sqrt{2}$，$OD=OC=R$，

则$\begin{cases}R^2=4^2+d^2\\R^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-d)^2\end{cases}$，解得$d=-\sqrt{2}$（不合题意舍去）.

故选：D.

8．D

【分析】利用构造函数法，结合函数的单调性、奇偶性来求得m的取值范围.

【详解】设$x_1>x_2$，由$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>4\left(x_1+x_2\right)$，

得$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>4\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)=4\left(x_1^2-x_2^2\right)$，

所以$f\left(x_1\right)-4x_1^2>f\left(x_2\right)-4x_2^2$，

令$g\left(x\right)=f\left(x\right)-4x^2$，则$g\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$，

所以函数$g\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，

因为$f(x)$是定义在R上的偶函数，所以$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

所以对任意的$x\in\mathbf{R}$，$g\left(-x\right)=f\left(-x\right)-4\left(-x\right)^2=f\left(x\right)-4x^2=g\left(x\right)$，

所以，函数$g\left(x\right)$为R上的偶函数，且$g\left(2\right)=f\left(2\right)-4\times\left(2\right)^2=16-16=0$，

由$f(\ln m)\le 4(\ln m)^2$，可得$f(\ln m)-4(\ln m)^2\le 0$，即$g\left(\ln m\right)\le g\left(2\right)$，

即$\left|\ln m\right|\le 2$，所以$-2\le\ln m\le 2$，解得$m\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}^2\right]$，

故选：D

【点睛】方法点睛：形如$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$的已知条件，往往是给出函数的单调性，可以利用函数单调性的定义来进行求解.利用函数的单调性和奇偶性来求解不等式，可将不等式转化为函数不等式的形式，然后结合单调性、奇偶性去掉函数符号，再解不等式来求得答案.

9．AC

【分析】根据三角函数图象平移、变换求解解析式方法即可判断选项.

【详解】正弦曲线$y=\sin x$先向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度，

得到函数$y=\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，

再将所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，

得到函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，故A正确，B错误；

先将正弦曲线$y=\sin x$上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，

得到函数$y=\sin 2x$的图象，再向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，

得到函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，故C正确，D错误.

故选：AC

10．ABD

【分析】利用向量数量积运算，模、夹角公式，计算出夹角的余弦值，还有投影的定义求解.

【详解】设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，

对B，因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)=\overrightarrow{e_1}^2-\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}-2\overrightarrow{e_2}^2=-\frac{1}{2}$，B正确；

对A，$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}\right)^2}=\sqrt{\overrightarrow{e_1}^2-4\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+4\overrightarrow{e_2}^2}=\sqrt{7}$，A正确；

对C，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)^2}=\sqrt{\overrightarrow{e_1}^2+2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2}=1$，

所以$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，C错误；

对D，$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为$|\vec{a}|\cos\theta\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=|\vec{a}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}\cdot\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{b}$，D正确.

故选：ABD

11．ABC

【分析】求出$l_1//l_2$的充要条件即可判断A；根据两直线垂直得充要条件即可判断B；求出直线l_2经过的定点即可判断C；判断何种情况下点$P(1,3)$到直线l_1的距离最大，并求出最大值，可判断D.

【详解】对于A，若$l_1//l_2$，

则$a\left(a-1\right)-6=0$，解得$a=3$或$a=-2$，

经检验，符合题意，所以$a=3$或$a=-2$，

所以$l_1//l_2$的充要条件是$a=3$或$a=-2$，故A正确；

对于B，当$a=\frac{2}{5}$时，$3a+2\left(a-1\right)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}=0$，所以$l_1\perp l_2$，故B正确；

对于C，由$l_2:3x+(a-1)y+3-a=0$，得$\left(y-1\right)a+3x-y+3=0$，

令$\begin{cases}y-1=0\\3x-y+3=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=1\end{cases}$，

所以直线l_2经过定点$\left(-\frac{2}{3},1\right)$，位于第二象限，故C正确；

对于D，由$l_1:ax+2y+3a=0$，得$\left(x+3\right)a+2y=0$，

令$\begin{cases}x+3=0\\2y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-3\\y=0\end{cases}$，

所以直线l_1过定点$M\left(-3,0\right)$，

当$PM\perp l_1$时，点$P(1,3)$到直线l_1的距离的最大，

最大值为$\left|PM\right|=\sqrt{\left(-3-1\right)^2+\left(0-3\right)^2}=5$，故D错误.

故选：ABC.

12．ACD

【分析】根据等体积法可结合三角形的面积公式可得$\sin\angle CDE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即可由异面直线的角的定义求解A，根据余弦定理即可求解B，根据等体积法即可求解C，根据二面角的几何法，结合同角关系即可求解D.

【详解】在平面ABD内过D作$ED//AB$，且$ED=AB$，

由于$AB\perp BD$，故四边形$ABDE$为矩形，

$CD\perp BD,DE\perp BD,CD\cap DE=C,CD,DE\subset$平面$CDE$，故$BD\perp$平面$CDE$，

故$V_{C-ABD}=V_{C-EDA}=V_{B-CDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot BD=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD\cdot ED\cdot\sin\angle CDE=\frac{1}{2}\times2\times4\sin\angle CDE=4\sin\angle CDE$，

故$V_{C-ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\times2=\frac{1}{3}\times4\sin\angle CDE\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,因此$\sin\angle CDE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由于$\angle CDE\in\left(0,\pi\right)$，所以$\angle CDE=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

由于$\angle CDE$为异面直线AB与CD所成角或其补角，故异面直线AB与CD所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$，A正确，

当$\angle CDE=\frac{2\pi}{3}$时，

$CE=\sqrt{CD^2+ED^2-2CD\cdot DE\cos\angle CDE}=\sqrt{2^2+4^2-2\times2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{7}$，

由于$BD\perp$平面CDE，$AE//BD,\therefore AE\perp$平面$CDE$，$CE\subset$平面$CDE$，

故$AE\perp EC$，此时$AC=\sqrt{CE^2+AE^2}=\sqrt{28+4}=4\sqrt{2}$,故B错误，

当$\angle CDE=\frac{\pi}{3}$时，$CE=\sqrt{CD^2+ED^2-2CD\cdot DE\cos\angle CDE}=\sqrt{2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$，

此时$AC=\sqrt{CE^2+AE^2}=\sqrt{12+4}=4$，

由于$BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=2\sqrt{2},AB=4$，