

江苏省锡山高级中学 2024 届高考压轴卷数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

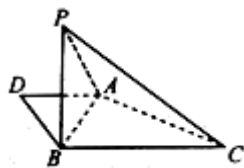
1. 方程 $2(x-1)\sin \pi x + 1 = 0$ 在区间 $[-2, 4]$ 内的所有解之和等于()

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

2. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上， $PA=\sqrt{2}$ ， $PB=\sqrt{14}$ ， $AB=4$ ， $CA=CB=\sqrt{10}$ ，面 $PAB\perp$ 面 ABC ，则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

3. 如图，平面四边形 $ACBD$ 中， $AB\perp BC$ ， $AB=\sqrt{3}$ ， $BC=2$ ， $\triangle ABD$ 为等边三角形，现将 $\triangle ABD$ 沿 AB 翻折，使点 D 移动至点 P ，且 $PB\perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 ()

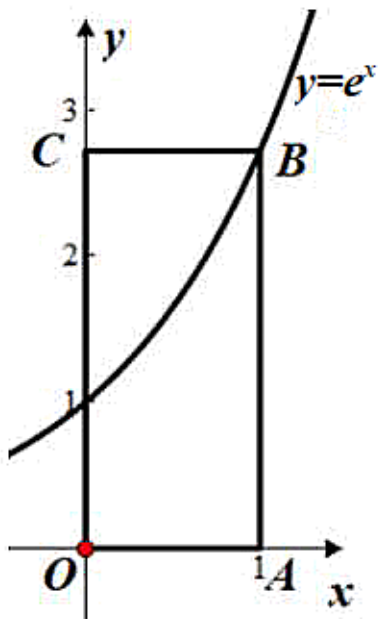


- A. 8π B. 6π C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

4. 若复数 z 满足 $(1+3i)z = (1+i)^2$ ，则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

5. 某人用随机模拟的方法估计无理数 e 的值，做法如下：首先在平面直角坐标系中，过点 $A(1,0)$ 作 x 轴的垂线与曲线 $y=e^x$ 相交于点 B ，过 B 作 y 轴的垂线与 y 轴相交于点 C （如图），然后向矩形 $OABC$ 内投入 M 粒豆子，并统计出这些豆子在曲线 $y=e^x$ 上方的有 N 粒 ($N < M$)，则无理数 e 的估计值是 ()



- A. $\frac{N}{M-N}$ B. $\frac{M}{M-N}$ C. $\frac{M-N}{N}$ D. $\frac{M}{N}$

6. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 - i$, 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
C. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 且 $|\vec{AB}| = 1, |\vec{AC}| = 2, \angle BAC = 120^\circ$, 则 $|\vec{EB}| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{19}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_4 = -3, S_{12} = 24$, 若 $a_i + a_j = 0$ ($i, j \in \mathbf{N}^*$, 且 $1 \leq i < j$), 则 i 的取值集合是 ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{6, 7, 8\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

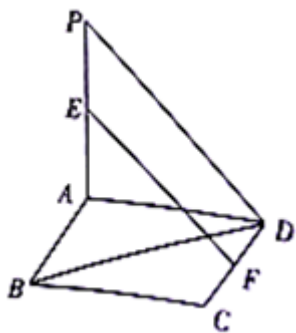
9. 已知各项都为正的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, 若 $a_1 + 2, a_3 + 4, a_6 + 16$ 成等比数列, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 ()

- A. $f(-3) < f(-\log_3 13) < f(2^{0.6})$ B. $f(-3) < f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13)$
C. $f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13) < f(-3)$ D. $f(2^{0.6}) < f(-3) < f(-\log_3 13)$

11. 如图, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $ABCD$ 为正方形, 且 $PA = AD$, E, F 分别是线段 PA, CD 的中点, 则异面直线 EF 与 BD 所成角的余弦值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

12. 若直线 α 不平行于平面 β , 且 $\alpha \not\subset \beta$, 则 ()

- A. β 内所有直线与 α 异面
B. β 内只存在有限条直线与 α 共面
C. β 内存在唯一的直线与 α 平行
D. β 内存在无数条直线与 α 相交

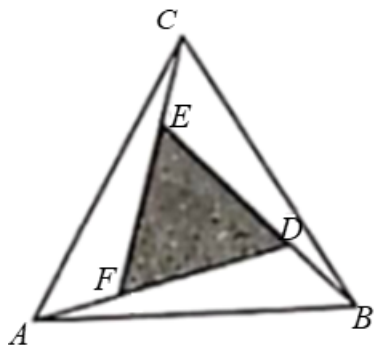
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的顶点到渐近线的距离为 $\frac{b}{2}$, 则 $\frac{b^2+1}{\sqrt{3}a}$ 的最小值_____.

14. 若 $(x-2)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64, 则展开式各项系数和为_____.

15. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = (2\sin 32^\circ, 2\cos 32^\circ)$, $\overrightarrow{BC} = (\cos 77^\circ, -\cos 13^\circ)$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____, $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 如图 $\triangle ABC$ 是由 3 个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成的大等边三角形, 设 $DF = 2AF$, $AB = \sqrt{13}$, 则 $\triangle EDF$ 的面积为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 12$, 且曲线 C 的左焦点 F 在直线 l 上.

(I) 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的参数方程;

(II) 求曲线 C 的内接矩形的周长的最大值.

18. (12分) 已知等腰梯形 $ABCD$ 中 (如图 1), $AB = 4$, $BC = CD = DA = 2$, F 为线段 CD 的中点, E 、 M 为线段 AB 上的点, $AE = EM = 1$, 现将四边形 $AEFD$ 沿 EF 折起 (如图 2)

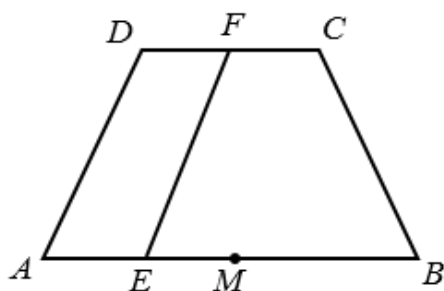


图 1

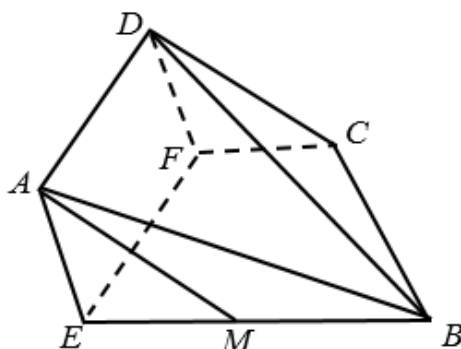


图 2

(1) 求证: $AM \parallel$ 平面 BCD ;

(2) 在图 2 中, 若 $BD = \sqrt{6}$, 求直线 CD 与平面 $BCFE$ 所成角的正弦值.

19. (12分) 某中学为研究学生的身体素质与体育锻炼时间的关系, 对该校 200 名高三学生平均每天体育锻炼时间进行调查, 如表: (平均每天锻炼的时间单位: 分钟)

平均每天锻炼的时间/分钟	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)
总人数	20	36	44	50	40	10

将学生日均体育锻炼时间在 $[40,60)$ 的学生评价为“锻炼达标”.

(1) 请根据上述表格中的统计数据填写下面 2×2 列联表:

	锻炼不达标	锻炼达标	合计
男			
女		20	110
合计			

并通过计算判断, 是否能在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为“锻炼达标”与性别有关?

(2) 在“锻炼达标”的学生中, 按男女用分层抽样方法抽出 10 人, 进行体育锻炼体会交流.

(i) 求这 10 人中, 男生、女生各有多少人?

(ii) 从参加体会交流的10人中，随机选出2人发言，记这2人中女生的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望。

参考公式：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$
，其中 $n = a + b + c + d$ 。

临界值表：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

20. (12分) 已知函数 $g(x) = e^x - (a-1)x^2 - bx - 1 (a, b \in R)$ ，其中 e 为自然对数的底数。

- (1) 若函数 $f(x) = g'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是单调函数，试求 a 的取值范围；
- (2) 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上恰有 3 个零点，且 $g(1) = 0$ ，求 a 的取值范围。

21. (12分) 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 都是各项不为零的数列，且满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = c_nS_n, n \in N^*$ ，其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $\{c_n\}$ 是公差为 $d (d \neq 0)$ 的等差数列。

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 是常数列， $d = 2, c_2 = 3$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；
- (2) 若 $a_n = \lambda n (\lambda$ 是不为零的常数)，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；
- (3) 若 $a_1 = c_1 = d = k (k$ 为常数， $k \in N^*)$ ， $b_n = c_{n+k} (n \geq 2, n \in N^*)$ 。求证：对任意 $n \geq 2, n \in N^*$ ， $\frac{b_n}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ 的恒成立。

22. (10分) 已知函数 $f(x) = |x-1|$ 。

- (1) 求不等式 $f(x) < x + |x+1|$ 的解集；
- (2) 若函数 $g(x) = \log_2[f(x+3) + f(x) - 2a]$ 的定义域为 R ，求实数 a 的取值范围。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

画出函数 $y = \sin \pi x$ 和 $y = -\frac{1}{2(x-1)}$ 的图像， $y = \sin \pi x$ 和 $y = -\frac{1}{2(x-1)}$ 均关于点 $(1, 0)$ 中心对称，计算得到答案.

【详解】

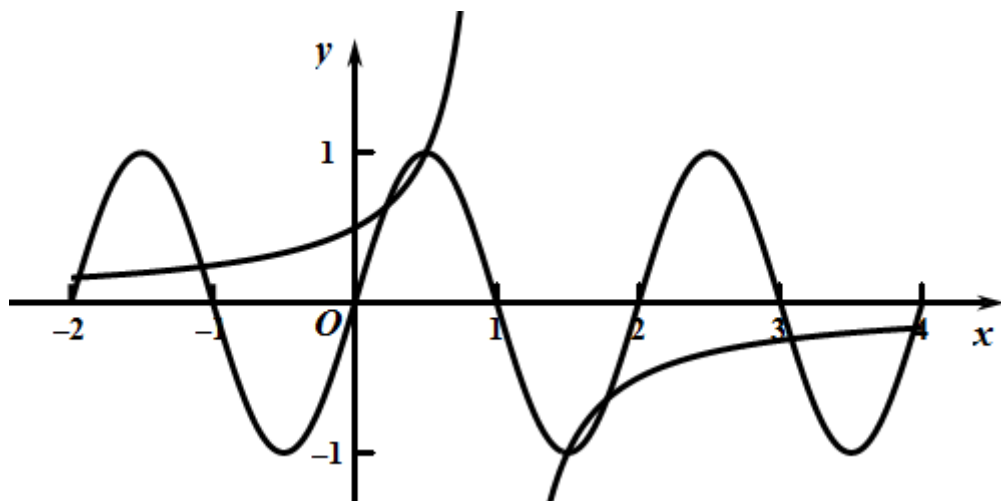
$2(x-1)\sin \pi x + 1 = 0$ ，验证知 $x = 1$ 不成立，故 $\sin \pi x = -\frac{1}{2(x-1)}$ ，

画出函数 $y = \sin \pi x$ 和 $y = -\frac{1}{2(x-1)}$ 的图像，

易知： $y = \sin \pi x$ 和 $y = -\frac{1}{2(x-1)}$ 均关于点 $(1, 0)$ 中心对称，图像共有 8 个交点，

故所有解之和等于 $4 \times 2 = 8$.

故选：C.



【点睛】

本题考查了方程解的问题，意在考查学生的计算能力和应用能力，确定函数关于点 $(1, 0)$ 中心对称是解题的关键.

2、D

【解析】

由题意画出图形，找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设 AB 的中点为 D ；

$\because PA = \sqrt{2}$ ， $PB = \sqrt{14}$ ， $AB = 4$ ，

$\therefore \triangle PAB$ 为直角三角形，且斜边为 AB ，故其外接圆半径为： $r = \frac{1}{2}AB = AD = 2$ ；

设外接球球心为 O ；

$\because CA = CB = \sqrt{10}$ ，面 $PAB \perp$ 面 ABC ，

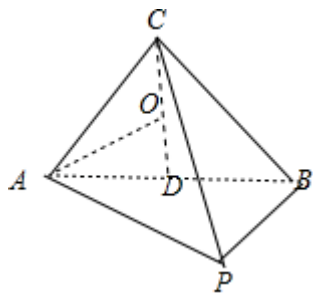
$\therefore CD \perp AB$ 可得 $CD \perp$ 面 PAB ；且 $DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}$ 。

$\therefore O$ 在 CD 上；

故有： $AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}}$ ；

$\therefore$ 球 O 的表面积为： $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}$ 。

故选： D 。



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题。

3、A

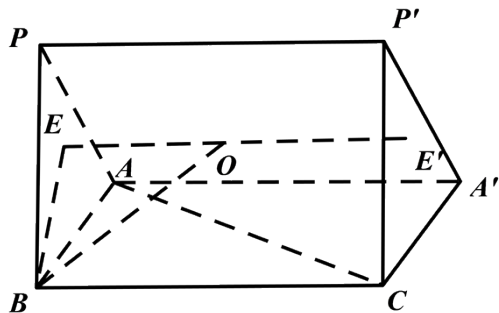
【解析】

将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同，由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，在 $Rt\triangle OBE$ 中，计算半径 OB 即可。

【详解】

由 $AB \perp BC$ ， $PB \perp BC$ ，可知 $BC \perp$ 平面 PAB 。

将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同。



由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，

记 $\triangle ABP$ 的外心为 E ，由 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

可得 $BE = 1$ ．又 $OE = \frac{BC}{2} = 1$ ，故在 $Rt\triangle OBE$ 中， $OB = \sqrt{2}$ ，

此即为外接球半径，从而外接球表面积为 8π ．

故选：A

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积，考查了学生空间想象，逻辑推理，综合分析，数学运算的能力，属于较难题．

4、D

【解析】

先化简得 $z = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ ，再求 $|z|$ 得解．

【详解】

$$z = \frac{2i}{1+3i} = \frac{2i(1-3i)}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i,$$

$$\text{所以 } |z| = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查复数的运算和模的计算，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平．

5、D

【解析】

利用定积分计算出矩形 $OABC$ 中位于曲线 $y = e^x$ 上方区域的面积，进而利用几何概型的概率公式得出关于 e 的等式，

解出 e 的表达式即可．

【详解】

在函数 $y = e^x$ 的解析式中，令 $x = 1$ ，可得 $y = e$ ，则点 $B(1, e)$ ，直线 BC 的方程为 $y = e$ ，

$$\text{矩形 } OABC \text{ 中位于曲线 } y = e^x \text{ 上方区域的面积为 } S = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x) \Big|_0^1 = 1,$$

矩形 $OABC$ 的面积为 $1 \times e = e$ ，

由几何概型的概率公式得 $\frac{N}{M} = \frac{1}{e}$ ，所以， $e = \frac{M}{N}$ ．

故选：D．

【点睛】

本题考查利用随机模拟的思想估算 e 的值, 考查了几何概型概率公式的应用, 同时也考查了利用定积分计算平面区域的面积, 考查计算能力, 属于中等题.

6、B

【解析】

利用复数的代数运算法则化简即可得到结论.

【详解】

$$\text{由 } \frac{1}{z} = 1 - i, \text{ 得 } z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\text{所以, } \bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算, 考查复数的基本概念, 属于基础题.

7、A

【解析】

根据向量的线性运算可得 $\vec{EB} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$, 利用 $|\vec{EB}|^2 = \vec{EB}^2$ 及 $|\vec{AB}| = 1, |\vec{AC}| = 2, \angle BAC = 120^\circ$ 计算即可.

【详解】

$$\text{因为 } \vec{EB} = \vec{EA} + \vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AB} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) + \vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC},$$

$$\text{所以 } |\vec{EB}|^2 = \vec{EB}^2 = \frac{9}{16}\vec{AB}^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{16}\vec{AC}^2$$

$$= \frac{9}{16} \times 1^2 - \frac{3}{8} \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16} \times 2^2$$

$$= \frac{19}{16},$$

$$\text{所以 } |\vec{EB}| = \frac{\sqrt{19}}{4},$$

故选: A

【点睛】

本题主要考查了向量的线性运算, 向量数量积的运算, 向量数量积的性质, 属于中档题.

8、C

【解析】

首先求出等差数列的首项和公差, 然后写出数列即可观察到满足 $a_i + a_j = 0$ 的 i 的取值集合.

【详解】

设公差为 d ，由题知 $a_4 = -3 \Rightarrow a_1 + 3d = -3$ ，

$$S_{12} = 24 \Rightarrow 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d = 24，$$

解得 $a_1 = -9$ ， $d = 2$ ，

所以数列为 $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ ，

故 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量的求解，属于基础题。

9、A

【解析】

试题分析：设公差为 d ， $a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 = 15 \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 2d \Rightarrow (a_1 + 2)(a_1 + 5d + 16)$

$$= (7 - 2d)(3d + 21) = 81 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 22 = 0 \Rightarrow d = 2 \text{ 或 } d = -\frac{11}{2} \text{ (舍)} \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \times 2 = 19，\text{ 故选 A.}$$

考点：等差数列及其性质。

10、C

【解析】

根据题意，由函数的奇偶性可得 $f(-3) = f(3)$ ， $f(-\log_3 13) = f(\log_3 13)$ ，又由 $2^{0.6} < 2 < \log_3 13 < \log_3 27 = 3$ ，

结合函数的单调性分析可得答案。

【详解】

根据题意，函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，则 $f(-3) = f(3)$ ， $f(-\log_3 13) = f(\log_3 13)$ ，

$$\text{有 } 2^{0.6} < 2 < \log_3 13 < \log_3 27 = 3，$$

又由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则有 $f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13) < f(-3)$ ，故选 C。

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性与单调性的综合应用，注意函数奇偶性的应用，属于基础题。

11、C

【解析】

分别以 AB ， AD ， AP 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/308132127006006063>