

## 目录

### 一、集合、复数、常用逻辑用语...1

#### 一、集合..1

#### 二、复数..2

#### 三、常用逻辑用语..3

##### (一) 命题...3

##### (二) 条件...5

#### 二、函数..6

##### 一、定义域..6

##### 二、函数解析式的求法..7

###### 1. 换元法..7

###### 2. 方程法..7

###### 3. 待定系数法..7

##### 三、值域..8

##### 四、单调性..9

##### 五、奇偶性..10

##### 六、周期性..11

##### 七、对称性..12

###### (一) 对称性定义..12

###### (二) 双对称出周期..12

##### 八、基本初等函数..13

##### 九、数形结合与零点问题..14

##### 十、好题归纳..16

#### 三、三角函数..18

##### 四、解三角形..22

五、数列..	26
六、不等式..	30
一、比较大小..	30
二、线性规划..	31
三、分式型与一元二次不等式..	32
四、基本不等式..	34
七、直线与圆..	35
一、直线问题..	35
二、直线与圆..	37
八、立体几何..	40
1.面积与体积..	40
2.面积..	40
3.平行..	40
4.垂直..	40
5.利用向量证明平行与垂直..	40
6.空间向量解空间角..	40
九、平面向量..	50
十、圆锥曲线..	53
1.椭圆..	53
2.双曲线..	53
3.抛物线..	53
十一、导数..	58
十二、统计概率..	63
一、随机抽样..	63
1.简单随机抽样:..	63
2.系统抽样(等距抽样)..	63

3. 分层抽样 (等比抽样) .63
二、频率分布直方图与数字特征 .63
1. 频率 .63
2. 频率分布直方图 .63
3. 茎叶图 .64
4. 数字特征 .64
5. 数字特征与频率分布直方图 .64
三、变量关系 .66
四、概率 .67
(一) 随机事件 .67
(二) 古典概型 .68
(三) 几何概型 .68
五、线性回归分析 .70
六、独立性检验 .71
十三、计数原理与二项式定理 (理科专用) .73
一、计数原理 .73
(一) 计数原理 .73
(二) 排列组合 .73
二、二项式定理 .77
十四、离散型随机变量 (理科专用) .79
一、条件概率 .79
二、离散型随机变量及其分布列 .81
三、离散型随机变量的期望与方差 .84
四、正态分布 .86
十五、坐标系与参数方程 .90
(一) 极坐标 .90

(二) 参数方程..90

十六、不等式选讲..95

一、含绝对值的不等式..95

二、绝对值不等式..96

三、不等式的证明..97

## 一、集合、复数、常用逻辑用语

### 一、集合

#### 【知识归纳】

$A \cap B$ : 在数轴上表示为  $A, B$  表示区域的公共部分

$A \cup B$ : 在数轴上表示为  $A, B$  表示区域的总和

$C_U A$ : 在数轴上表示为  $U$  中除去  $A$  剩下的部分 (要注意边界值能否取到)

【例 1: 对数函数与一元二次不等式的解法】(难度: ☆☆☆) 已知集合  $A = \{x | \log_2(x+1) \leq 2\}$ ,  $B = \{x | (x+1)(3-x) \geq 0, x \in \mathbf{N}\}$ , 则  $A \cap B = ( )$

A.  $\{3\}$  B.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$  C.  $\{0, 1, 2, 3\}$  D.  $\emptyset$

【名师解析】解  $\log_2(x+1) \leq 2$  不等式得  $-1 < x \leq 3$ , 所以  $A = \{x | -1 < x \leq 3\}$ , 解  $(x+1)(3-x) \geq 0$  不等式得  $B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ , 又因为  $x \in \mathbf{N}$ , 所以  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 所以  $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$ , 故选 C.

【例 2: 对数函数与指数函数】(难度: ☆☆☆) 设全集  $U = \{x | \log_2 x < 3, x \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $A = \{x | 1 < 2^x < 32, x \in \mathbf{Z}\}$ , 则  $C_U A = ( )$

A.  $\{1, 2, 3, 4\}$  B.  $[5, 8)$  C.  $(5, 8)$  D.  $\{5, 6, 7\}$

【名师解析】 $\because U = \{x | \log_2 x < 3, x \in \mathbf{N}^*\} = \{x | 0 < x < 2^3, x \in \mathbf{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  
 $A = \{x | 1 < 2^x < 32, x \in \mathbf{Z}\} = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\therefore C_U A = \{5, 6, 7\}$ , 故选 D.

【例 3: 二次函数与一次函数】(难度: ★☆☆) 已知集合  $A = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | ax = 1\}$ , 若  $A \cap B = B$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $-\frac{1}{2}$  或 1 B. 2 或 -1 C. -2 或 1 或 0 D.  $-\frac{1}{2}$  或 1 或 0

【名师解析】  $A = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$ ,  $\therefore A \cap B = B$ ,  $\therefore B \subseteq A$ . 当  $a = 0$  时,  $B = \emptyset$ , 符合题

意; 当  $a \neq 0$  时,  $B = \left\{\frac{1}{a}\right\}$ ,  $B \subseteq A$ ,  $\therefore \frac{1}{a} = -2$  或  $\frac{1}{a} = 1$ ,  $\therefore a = -\frac{1}{2}$  或  $a = 1$ , 故选 D.

## 二、复数

### 【知识归纳】

1. 复数  $z$  的代数形式为  $z = a + bi$  ( $a, b \in R$ ), 其中  $a$  称为  $z$  的实部,  $b$  称为  $z$  的虚部

2.

$$i^2 = -1$$

$$3. \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

4. 共轭复数:  $\bar{z} = a - bi$ , 对于  $z$  而言, 实部相同, 虚部相反

5. 复数的模:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$   $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  ( $|z|^2 \neq z^2$ )

【例 1: 复数的模长】 (难度: ☆☆☆) 若复数  $z = 2i + \frac{2}{1+i}$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则复数  $z$  的模为 ( )

A.  $\sqrt{2}$  B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  C.  $\sqrt{3}$  D. 2

【名师解析】  $z = 2i + \frac{2}{1+i} = 2i + \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2i + 1 - i = 1 + i \therefore |z| = \sqrt{2}$

【例 2: 虚数的考察】 (难度: ☆☆☆) 若  $z = \frac{a+i}{1-i}$  是纯虚数, 则实数  $a$  的值是 ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【名师解析】  $z = \frac{a+i}{1-i} = \frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{a-1+(a+1)i}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{a+1}{2}i$ , 得  $\frac{a-1}{2} = 0 \Rightarrow a = 1$

【例 3: 共轭复数】 (难度: ☆☆☆) 已知复数  $z = \frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2}$ ,  $\bar{z}$  是  $z$  的共轭复数, 则  $z \cdot \bar{z} =$  ( )

A.  $\frac{1}{4}$  B.  $\frac{1}{2}$  C. 1 D. 2

【名师解析】  $z = \frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2} = -\frac{i}{2}$ ,  $\therefore |z|^2 = \frac{1}{4}$

### 三、常用逻辑用语

#### (一) 命题

##### 【知识归纳】

1. 设原命题为“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式, 则

(1) 否命题: “若  $\neg p$ , 则  $\neg q$ ”; (2) 逆命题: “若  $q$ , 则  $p$ ”; (3) 逆否命题: “若  $\neg q$ , 则  $\neg p$ ”

2.  $p \vee q, p \wedge q$

(1) 用“或”字连接的两个命题 (或条件), 表示两个命题 (或条件) 中至少有一个成立即可, 记为  $p \vee q$

(2) 用“且”字连接的两个命题 (或条件), 表示两个命题 (或条件) 要同时成立, 记为  $p \wedge q$

3. 命题的否定  $\neg p$ : 命题的否定并不是简单地在某个地方加一个“不”字, 对于不同形式的命题也有不同的方法

(1) 一些常用词的“否定”: 是一不是 全是一不全是 至少一个一都没有

至多  $n$  个  $\rightarrow$  至少  $n+1$  个 小于  $\rightarrow$  大于等于

(2) 含有逻辑联结词的否定: 逻辑联接词对应改变, 同时  $p, q$  均变为  $\neg p, \neg q$ :

$p$  或  $q \rightarrow \neg p$  且  $\neg q$   $p$  且  $q \rightarrow \neg p$  或  $\neg q$

(3) 全称命题与存在性命题的否定

全称命题:  $p: \forall x \in M, p(x) \rightarrow \neg p: \exists x \in M, \neg p(x)$

存在性命题:  $p: \exists x \in M, p(x) \rightarrow \neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$

4.  $p \vee q, p \wedge q$ , 如下列真值表所示:

$p$	$q$	$p$ 或 $q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假
$p$	$q$	$p$ 且 $q$
真	真	真
真	假	假

$p$	$q$	$p$ 或 $q$
假	真	假
假	假	假

【例 1: 命题的否定】(难度: ☆☆☆) 命题“存在  $x \in Z, x^2 + 2x + m \leq 0$ ”的否定是 ( )

- A. 存在  $x \in Z, x^2 + 2x + m > 0$  B. 不存在  $x \in Z, x^2 + 2x + m > 0$   
 C. 对任意  $x \in Z, x^2 + 2x + m \leq 0$  D. 对任意  $x \in Z, x^2 + 2x + m > 0$

【名师解析】存在性命题的否定: 要将量词变为“任意”, 语句对应变化  $x^2 + 2x + m \leq 0 \rightarrow x^2 + 2x + m > 0$ , 但  $x$  所在集合不变。所以变化后的命题为: “对任意  $x \in Z, x^2 + 2x + m > 0$ ”

【例 2: 真假命题】(难度: ☆☆☆) 下列命题错误的是 ( )

- A. 命题“若  $m > 0$ , 则方程  $x^2 + x - m = 0$  有实数根”的逆否命题为“若方程  $x^2 + x - m = 0$  无实数根, 则  $m \leq 0$ ”  
 B. “ $x = 1$ ”是“ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的充分不必要条件  
 C. 若  $p \wedge q$  为假命题, 则  $p, q$  均为假命题  
 D. 对于命题  $p: \exists x \in \mathbf{R},$  使得  $x^2 + x + 1 < 0$ , 则  $\neg p: \text{对 } \forall x \in \mathbf{R},$  均有  $x^2 + x + 1 \geq 0$

【名师解析】若  $p \wedge q$  为假命题,  $p, q$  至少有一个为假命题, 故 C 错误.

【例 3: 命题】(难度: ☆☆☆) 给出下列三个结论

- (1) 若命题  $p$  为假命题, 命题  $\neg q$  为假命题, 则命题“ $p \vee q$ ”为假命题  
 (2) 命题“若  $xy = 0$ , 则  $x = 0$  或  $y = 0$ ”的否命题为“若  $xy \neq 0$ , 则  $x \neq 0$  或  $y \neq 0$ ”  
 (3) 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{R}, 2^x \leq 0$ ”, 则以上结论正确的个数为 ( )

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【名师解析】(1) 中要判断  $p \vee q$  的真假, 则需要判断  $p, q$  各自的真值情况,  $\neg q$  为假命题, 则  $q$  为真命题, 所以  $p, q$  一假一真,  $p \vee q$  为真命题, (1) 错误。(2) “若……, 则……”命题的否命题要将条件和结论均要否定, 而 (2) 中对“ $x = 0$  或  $y = 0$ ”的否定应该为“ $x \neq 0$  且  $y \neq 0$ ”, 所以 (2) 错误。(3) 全称命题的否定, 要改变量词和语句, 且  $x$  的范围不变。而 (3) 的改写符合要求, 所以 (3) 正确。综上只有 (3) 是正确的

## (二) 条件

【知识归纳】

## 1. 定义:

(1) 对于两个条件  $p, q$ , 如果命题“若  $p$  则  $q$ ”是真命题, 则称条件  $p$  能够推出条件  $q$ , 记为  $p \Rightarrow q$

(2) 充分条件与必要条件: 如果条件  $p, q$  满足  $p \Rightarrow q$ , 则称条件  $p$  是条件  $q$  的充分条件; 称条件  $q$  是条件  $p$  的必要条件

## 2. 两个条件之间可能的充分必要关系:

(1)  $p$  能推出  $q$ , 但  $q$  推不出  $p$ , 则称  $p$  是  $q$  的充分不必要条件

(2)  $p$  推不出  $q$ , 但  $q$  能推出  $p$ , 则称  $p$  是  $q$  的必要不充分条件

(3)  $p$  能推出  $q$ , 且  $q$  能推出  $p$ , 记为  $p \Leftrightarrow q$ , 则称  $p$  是  $q$  的充要条件, 也称  $p, q$  等价

(4)  $p$  推不出  $q$ , 且  $q$  推不出  $p$ , 则称  $p$  是  $q$  的既不充分也不必要条件

**【例 1: 正向考察】** (难度: ☆☆☆) 设集合  $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\right\}$ ,  $B = \{x \mid |x-1| < a\}$ , 则“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

**【名师解析】** 先解出两个解集:  $A = (-1, 1)$ ,  $B$  的解集与  $a$  的取值有关: 若  $a \leq 0$ , 则  $B = \emptyset$ ; 若  $a > 0$ , 则  $B = (1-a, 1+a)$ , 观察条件, 若  $a=1$ , 则  $B = (0, 2)$ , 所以  $A \cap B \neq \emptyset$  成立; 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则通过数轴观察区间可得  $a$  的取值为多个 (比如  $a = \frac{1}{2}$ ), 所以“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分不必要条件

**【例 2: 逆用条件】** (难度: ☆☆☆) 已知  $p: x \geq k$ ,  $q: \frac{3}{x+1} < 1$ , 如果  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则  $k$  的取值范围是\_\_

**【名师解析】** 设  $P = \{x \mid x \geq k\}$ ,  $Q = \left\{x \mid \frac{3}{x+1} < 1\right\} = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ , 因为  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 所以  $P \subset Q$ , 利用数轴可判断出  $k > 2$

## 二、函数

### 一、定义域

#### 【知识归纳】

定义域指的是自变量  $x$  的取值范围, 值域指的是应变量  $y$  的取值范围.

四个必须知道的定义域:  $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ ;  $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ ;  $y = \log_a x, x > 0$ ;  $y = x^0, x \neq 0$

【例 1: 基本初等函数定义域】(难度: ☆☆☆) 函数  $y = \frac{x-1}{\ln x}$  的定义域为 ( )

A.  $(0, +\infty)$  B.  $(1, +\infty)$  C.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  D.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【名师解析】 $\because$  函数  $y = \frac{x-1}{\ln x}, \therefore \begin{cases} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ , 解得  $x > 0$ , 且  $x \neq 1$ , 所以函数  $y = \frac{x-1}{\ln x}$  的定义域为  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ , 故选 D.

【例 2: 基本初等函数定义域】(难度: ☆☆☆) 下列函数的定义域与  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  相同的是 ( )

A.  $y = 2^x$  B.  $y = \lg x$  C.  $y = \sqrt{x}$  D.  $y = \frac{\sin x}{x}$

【名师解析】 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  的定义域是  $\{x|x \neq 0\}$ ,  $y = 2^x$  的定义域是  $\mathbf{R}$ ,  $y = \lg x$  的定义域是  $\{x|x > 0\}$ ,  $y = \sqrt{x}$  的定义域是  $\{x|x \geq 0\}$ ,  $y = \frac{\sin x}{x}$  的定义域是  $\{x|x \neq 0\}$ , 故选 D.

【例 3: 复合函数定义域】(难度: ★☆☆)

(1) (从一般到复合): 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 则函数  $f(2x+1)$  的定义域为

【名师解析】由题意可知  $-1 < 2x+1 < 0$ , 则  $-1 < x < -\frac{1}{2}$

(2) (从复合到一般): 已知函数  $f(2x-1)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 求  $f(x)$  的定义域.

【名师解析】由题意可得  $-1 < x < 0$ , 则  $-3 < 2x-1 < -1$ , 所以  $f(x)$  的定义域为  $(-3, -1)$

(3) (从复合到复合):  $f(3x+1)$  的定义域为  $[0, 2]$ , 求  $f(x-1)$  的定义域.

【名师解析】解: 由  $x \in [0, 2]$  得  $3x+1 \in [1, 7]$ ,  $f(x)$  定义域为  $[1, 7]$ 。由  $x-1 \in [1, 7]$  得  $x \in [2, 8]$ ,  $f(x-1)$  定义域为  $[2, 8]$

## 二、函数解析式的求法

### 1. 换元法

【例 1】(难度: ☆☆☆) 已知  $f\left(\frac{2}{x}+1\right) = \lg x$ , 则  $f(x) =$

【名师解析】令  $t = \frac{2}{x}+1 (t > 1)$ , 则  $x = \frac{2}{t-1}$ , 所以  $f(t) = \lg \frac{2}{t-1}$ , 即  $f(x) = \lg \frac{2}{x-1} (x > 1)$

【例 2】(难度: ☆☆☆) 已知单调函数  $f(x)$ , 对任意的  $x \in \mathbf{R}$  都有  $f[f(x) - 2^x] = 6$ , 求  $f(2)$

【名师解析】令  $t = f(x) - 2^x$ , 则  $f(t) = 6$ , 且  $f(x) = 2^x + t$ , 令  $x = t$ , 则  $f(t) = 2^t + t = 6$ 。因为函数单调, 故  $t = 2$ , 所以  $f(x) = 2^x + 2$ , 则  $f(2) = 4 + 2 = 6$ 。方程法

【例】(难度: ☆☆☆) 已知  $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ , 求  $f(x)$

【名师解析】由  $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x$  可得  $2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{1}{x}$ , 两式联立得  $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3}$

### 3. 待定系数法

【例 1】(难度: ☆☆☆) 已知函数  $f(x) = ax - b (a > 0)$ , 且  $f[f(x)] = 4x - 3$ , 则  $f(2) =$

【名师解析】 $f[f(x)] = a(ax - b) - b = a^2x - ab - b$ , 由  $a^2x - ab - b = 4x - 3 (a > 0)$ 。因此  $a = 2, b = 1$ , 所以  $f(x) = 2x - 1$ , 则  $f(2) = 3$

【例 2】(难度: ☆☆☆) 已知函数  $f(x)$  是二次函数,  $f(0) = 2, f(x+1) - f(x) = x - 1$ , 求  $f(x)$

【名师解析】设  $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ , 由  $f(0) = 2$  得  $c = 2$

$$f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 2 - ax^2 - bx - 2 = 2ax + a + b = x - 1$$

解得  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ , 所以  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$

## 三、值域

【例 1: 换元法+一元二次函数】(难度: ★☆☆) 函数  $f(x) = 2x - \sqrt{x-1}$  的值域是 ( )

A.  $[0, +\infty)$  B.  $\left[\frac{17}{8}, +\infty\right)$  C.  $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$  D.  $\left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$

【名师解析】 $f(x)$  的定义域为  $[1, +\infty)$ , 令  $t = \sqrt{x-1} \therefore t \geq 0$ , 则  $x = t^2 + 1$

$\therefore y = 2(t^2 + 1) - t = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \therefore t \in [0, +\infty) \therefore f(x)$  值域为  $\left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$

【例 2: 分析单调性+结合定义域】(难度: ★☆☆) 函数  $y = x^2 + \frac{1}{x} (x \leq -\frac{1}{2})$  的值域是 ( )

A.  $(-\infty, \frac{7}{4}]$  B.  $(0, \frac{7}{4}]$  C.  $(-\infty, \frac{7}{4}]$  D.  $[-\frac{7}{4}, +\infty)$

【名师解析】函数  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$  为单调递减函数, 当  $x = -\frac{1}{2}$  时  $y_{\min} = -\frac{7}{4}$ , 无最大值, 所以值域为  $[-\frac{7}{4}, +\infty)$ , 故选 D.

【例 3: 分式型+判别式法】(难度: ★☆☆) 函数  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  的值域为 ( )

A.  $[\frac{1}{3}, 1) \cup (1, 3]$  B.  $[\frac{1}{3}, 3]$  C.  $(\frac{1}{3}, 3)$  D.  $[\frac{3}{4}, +\infty)$

【名师解析】 $\because y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $\therefore$  方程  $(y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0$  有解, 当  $y=1$  时,  $x=0$ , 故  $y$  可取 1, 当  $y \neq 1$  时,  $\Delta = (y+1)^2 - 4(y-1)(y-1) \geq 0$ , 即  $3y^2 - 10y + 3 \leq 0$ , 解得  $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$ ,  $\therefore$  函数的值域为  $[\frac{1}{3}, 3]$ , 故选 B.

【例 4: 基本不等式】(难度: ★☆☆) 设  $x > -1$ , 求函数  $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$  的最小值为\_\_

【名师解析】 $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1} + 5$ , 得  $y \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} + 5 = 9$ , 等号成立条件为  $x+1 = \frac{4}{x+1} \Rightarrow x=1$ , 所以最小值为 9. 四、单调性

【知识归纳】

设  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subseteq D$

若对  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ , 有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则  $f(x)$  在  $I$  上单调递增,  $I$  为单调递增区间。

若对  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ , 有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则  $f(x)$  在  $I$  上单调递减,  $I$  为单调递减区间。

【例 1: 单调的分段函数】(难度: ★★☆☆) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ (4 - \frac{a}{2})x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(1, 8)$  B.  $(1, +\infty)$  C.  $(4, 8)$  D.  $[4, 8)$

【名师解析】 $\because f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ (4 - \frac{a}{2})x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数,  $\therefore \begin{cases} a > 1 \\ 4 - \frac{a}{2} > 0 \\ a \geq 4 - \frac{a}{2} + 2 \end{cases}$ , 得

$a \in [4, 8)$

【例 2: 复合函数的单调性】(难度: ★☆☆) 函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$  的单调递增区间是 ( )

A.  $(0, +\infty)$  B.  $(-\infty, 0)$  C.  $(2, +\infty)$  D.  $(-\infty, -2)$

【名师解析】先分析  $f(x)$  的定义域:  $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ , 再观察解析式可得  $f(x)$  可视为函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} t, t = x^2 - 4$  的复合函数, 根据复合函数单调性同增异减的特点, 可分别分析两个函数的单调性, 对于  $y = \log_{\frac{1}{2}} t$  而言,  $y$  对  $t$  是减函数。所以如要求得增区间, 则  $t = x^2 - 4$  中  $t$  对  $x$  也应为减函数。结合定义域可得  $f(x)$  的单调增区间为  $(-\infty, -2)$  五、奇偶性

### 【知识归纳】

若函数具有奇偶性,则其定义域必然是对称的.

奇函数:关于原点  $(0,0)$  对称,  $f(x) = -f(-x)$ ; 偶函数:关于  $y$  轴对称,  $f(x) = f(-x)$

奇函数两个常见经典模型:  $y = \log_a(\sqrt{x^2+1} - x)$ ,  $y = \frac{a^x-1}{a^x+1}$

【例 1: 奇偶性求值】(难度: ☆☆☆)  $f(x)$  为奇函数,  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ,  $f(-1) =$  ( )

【名师解析】  $f(-1) = -f(1) = -[1+1] = -2$ .

【例 2: 利用奇偶性求解析式】(难度: ★☆☆) 已知  $f(x)$  是奇函数, 当  $x > 0$  时  $f(x) = -x(1+x)$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x)$  等于 ( )

【名师解析】当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 则  $f(-x) = x(1-x)$ . 又  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以当  $x < 0$  时  $f(x) = -f(-x) = -x(1-x)$ .

【例 3: 偶函数的经典题型】(难度: ★★六) 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $y = f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上递减, 且  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , 则满足  $f\left(\log_{\frac{1}{4}}x\right) < 0$  的  $x$  的集合为 ( )

【名师解析】由偶函数  $y = f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上递减, 且  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  得, 函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 且  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $\therefore$  由  $f\left(\log_{\frac{1}{4}}x\right) < 0$  得,  $\log_{\frac{1}{4}}x > \frac{1}{2}$  或  $\log_{\frac{1}{4}}x < -\frac{1}{2}$ , 解得  $0 < x < \frac{1}{2}$  或  $x > 2$ .

单士普

【例 4: 奇函数的经典题型】(难度: ★★六) 已知函数  $f(x)$  为奇函数, 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 1) \leq 0$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

【名师解析】 $\because f(x)$  为奇函数,  $\therefore$

$$f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow f(k \cdot 3^x) \leq -f(3^x - 9^x - 1) \Leftrightarrow f(k \cdot 3^x) \leq f(9^x - 3^x + 1).$$

$\because f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数,  $\therefore k \cdot 3^x \leq 9^x - 3^x + 1$ .

$$\therefore k \leq 3^x + \frac{1}{3^x} - 1. \because 3^x + \frac{1}{3^x} - 1 \geq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} - 1 = 2 - 1 = 1, \therefore k \leq 1.$$

六、周期性

### 【知识归纳】

定义: 若  $f(x+a) = f(x+b)$ , 可得  $f(x)$  为周期函数, 其周期  $T = |b-a|$

例 1:  $f(x+a) = -f(x) \Rightarrow f(x)$  的周期  $T = 2a$

证明: 构造  $f(x+2a) = -f(x+a)$ , 所以  $f(x+2a) = -f(x+a) = -(-f(x)) = f(x)$ , 即周期  $T = 2a$ .

例 2:  $f(x+a) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x)$  的周期  $T = 2a$

证明:  $f(x+2a) = \frac{1}{f(x+a)} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x)$

例 3:  $f(x) + f(x+a) = k$  ( $k$  为常数)  $\Rightarrow f(x)$  的周期  $T = 2a$

证明:  $f(x) + f(x+a) = k, f(x+a) + f(x+2a) = k$ , 两式相减可得  $f(x+2a) = f(x)$

【例 1: 利用周期性求值】(难度: ★☆☆) 设  $f(x)$  为定义在  $R$  上的奇函数,  $f(x+2) = -f(x)$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x$ , 则  $f(7.5) =$

【名师解析】由  $f(x+2) = -f(x)$  可得:  $f(x)$  的周期  $T = 4$ ,  $\therefore$  考虑将  $f(7.5)$  用  $0 \leq x \leq 1$  中的函数值进行表示:  $f(7.5) = f(3.5) = f(-0.5)$ , 此时周期性已经无法再进行调整, 考虑利用奇偶性进行微调:  $f(-0.5) = -f(0.5) = -\frac{1}{2}$ , 所以  $f(7.5) = -\frac{1}{2}$

【例 2: 求值】(难度: ★★六) 定义在  $R$  上的  $f(x)$  满足  $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x), & x \leq 0 \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(2009)$  的值为 ( )

【名师解析】由所求  $f(2009)$  可联想到判断  $f(x)$  是否具有周期性,  $x > 0$  时,  $f(x) = f(x-1) - f(x-2)$ , 则有  $f(x-1) = f(x-2) - f(x-3)$ , 两式相加可得:  $f(x) = -f(x-3)$ , 则  $f(x) = -f(x-3) = f(x-6)$ , 即  $f(x)$  在  $x > 0$  时周期是 6, 故

$f(2009) = f(5) = -f(2)$ , 而  $f(2) = f(1) - f(0) = f(0) - f(-1) - f(0) = f(-1) = 1$

## 七、对称性

### 【知识归纳】

#### (一) 对称性定义

轴对称:  $f(a-x) = f(a+x) \Leftrightarrow f(x)$  关于  $x = a$  轴对称

点对称:  $f(a-x) = -f(b+x) \Leftrightarrow f(x)$  关于  $(\frac{a+b}{2}, 0)$  轴对称

#### (二) 双对称出周期

若  $f(x)$  的图像关于  $x = a, x = b$  轴对称, 则  $f(x)$  是周期函数, 周期  $T = 2(b-a)$

若  $f(x)$  的图像关于  $(a, 0), (b, 0)$  中心对称, 则  $f(x)$  是周期函数, 周期  $T = 2(b-a)$

若  $f(x)$  的图像关于  $x = a$  轴对称,且关于  $(b, 0)$  中心对称,则  $f(x)$  是周期函数,周期  $T = 4(b - a)$

【例 1: 利用对称性求函数性质】(难度: ★★★) 函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ ,若  $f(x + 1)$  与  $f(x - 1)$  都是奇函数,则 ( )

A.  $f(x)$  是偶函数 B.  $f(x)$  是奇函数

C.  $f(x) = f(x + 2)$  D.  $f(x + 3)$  是奇函数

【名师解析】从已知条件入手可先看  $f(x)$  的性质,由  $f(x + 1), f(x - 1)$  为奇函数分别可得到:  $f(x + 1) = -f(-x + 1), f(x - 1) = -f(-x - 1)$ ,所以  $f(x)$  关于  $(1, 0), (-1, 0)$  中心对称,双对称出周期可求得  $T = 2 \cdot [1 - (-1)] = 4$ ,所以 C 不正确,且由已知条件无法推出一定符合 A, B。对于 D 选项,因为  $T = 4$ ,所以  $f(x + 5) = f(x + 1) = -f(-x + 1)$ ,进而可推出  $f(x)$  关于  $(3, 0)$  中心对称,所以  $f(x + 3)$  为  $f(x)$  图像向左平移 3 个单位,即关于  $(0, 0)$  对称,所以  $f(x + 3)$  为奇函数, D 正确

【例 2: 利用对称性求值】(难度: ★★ ☆)  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数,且对任意实数  $x$ ,恒有  $f(x + 2) = -f(x)$ ,当  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = 2x - x^2$ ,求  $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2012)$ 。

【名师解析】 $f(1) = 1, f(2) = -f(0) = 0, f(3) = f(-1) = -f(1) = -1, f(4) = f(0) = 0 \therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$ ,故  $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2012) = f(0) + 503 \times 0 = 0$ 。

## 八、基本初等函数

指数函数: $y = a^x$		
	$a > 1$	$0 < a < 1$
定义域	$R$	
值域	$(0, +\infty)$	
恒过定点	$(0, 1)$	
单调性	单调递增	单调递减
抽象函数表达式	$f(x + y) = f(x)f(y)f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$	
运算公式	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, (a^x)^y = a^{xy}, (ab)^x = a^x b^x$	
对数函数: $y = \log_a x$		
	$a > 1$	$0 < a < 1$
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$R$	

指数函数: $y = a^x$	
恒过定点	(1,0)
单调性	单调递增                      单调递减
抽象函数表达式	$f(xy) = f(x) + f(y), f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
运算公式	$a^{\log_a N} = N, \log_a a^b = b; \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a M + \log_a N = \log_a MN, \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ $\log_a m^b = b \log_a m, \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

## 九、数形结合与零点问题

【例 1: 此类问题找定值】(难度: ★★ 六) 函数  $f(x) = |\lg x|$ , 若  $0 < a < b$ , 且  $f(a) = f(b)$ , 则  $a + 2b$  的取值范围是 ( )

- A.  $(2\sqrt{2}, +\infty)$  B.  $[2\sqrt{2}, +\infty)$  C.  $(3, +\infty)$  D.  $[3, +\infty)$

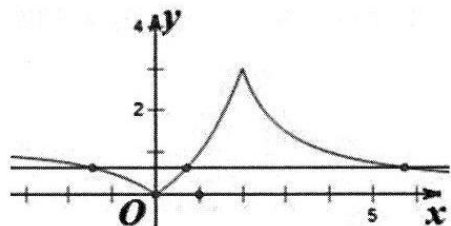
【名师解析】先做出  $f(x)$  的图像, 通过图像可知, 如果  $f(a) = f(b)$ , 则  $0 < a < 1 < b$ ,

设  $f(a) = f(b) = t$ , 即  $\begin{cases} |\lg a| = t \\ |\lg b| = t \end{cases} (t > 0)$ , 由  $a, b$  范围可得:  $\lg a < 0, \lg b > 0$ , 从而

$$\begin{cases} \lg a = -t \\ \lg b = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e^{-t} \\ b = e^t \end{cases}, \text{ 所以 } a + 2b = \frac{1}{e^t} + 2e^t, \text{ 而 } e^t > 0, \text{ 所以 } 2e^t + \frac{1}{e^t} \in (3, +\infty)$$

【例 2: 数形结合与零点问题】(难度: ★★ 六) 函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2 \\ \frac{3}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$  若方程  $f(x) - a = 0$  有三个不同的实数根, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

【名师解析】 $\because f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2 \\ \frac{3}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ ,  $\therefore$  如图,  $\because f(x) - a = 0$  有三个不同的实数根 即  $y = f(x)$  图象与  $y = a$  有三个不同交点。当



$0 < a < 1$  时, 函数  $y = f(x)$  图象与  $y = a$  有三个不同的交点,

$f(x) - a = 0$  有三个不同实数根, 所以  $a$  取值范围是  $(0, 1)$

**【例 3: 复合函数的零点问题】** (难度: ★★☆☆) 若函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  有极值点  $x_1, x_2$ , 且  $f(x_1) = x_1$ , 则关于  $x$  的方程  $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$  的不同实根的个数是 ( )

**【名师解析】**  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$  由极值点可得:  $x_1, x_2$  为  $3x^2 + 2ax + b = 0$  ① 的两根, 方程①与  $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$  结构完全相同, 得  $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$  的两根为  $f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$ , 其中  $f_1(x_1) = x_1$ , 若  $x_1 < x_2$ , 可判断出  $x_1$  是极大值点,  $x_2$  是极小值点。且  $f_2(x) = x_2 > x_1 = f(x_1)$ , 所以  $y = f_1(x)$  与  $f(x)$  有两个交点, 而  $f_2(x)$  与  $f(x)$  有一个交点, 共计 3 个; 若  $x_1 > x_2$ , 可判断出  $x_1$  是极小值点,  $x_2$  是极大值点。且  $f_2(x) = x_2 < x_1 = f(x_1)$ , 所以  $y = f_1(x)$  与  $f(x)$  有两个交点, 而  $f_2(x)$  与  $f(x)$  有一个交点, 共计 3 个。综上共有 3 个交点十、好题归纳

**【例 1: 恒成立与存在性问题】** (难度: ★☆☆) 设函数  $f(x) = x^2 - 2x, g(x) = ax + 2 (a \in \mathbf{R})$ , 对于  $\forall x_1 \in [-1, 2]$ , 总存在  $x_2 \in [-1, 2]$ , 使  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围。

**【名师解析】** 由题意, 函数  $f(x) = x^2 - 2x$  在  $x \in [-1, 2]$  上的值域是函数  $g(x) = ax + 2$  在  $x \in [-1, 2]$  上值域的子集。易知  $a \neq 0$ 。函数  $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$  在  $x \in [-1, 2]$  上的值域是  $[-1, 3]$ 。当  $a > 0$  时, 函数  $g(x) = ax + 2$  在  $x \in [-1, 2]$  上的值域为  $[2 - a, 2a + 2]$ ,  $a$  满足  $\begin{cases} 2 - a \leq -1 \\ 2a + 2 \geq 3 \end{cases}$ , 解得  $a \geq 3$ 。当  $a < 0$  时, 函数  $g(x) = ax + 2$  在  $x \in [-1, 2]$  上的值域为  $[2a + 2, 2 - a]$ ,  $a$  满足  $\begin{cases} 2 - a \geq 3 \\ 2a + 2 \leq -1 \end{cases}$ , 解得  $a \leq -\frac{3}{2}$ 。综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $a \leq -\frac{3}{2}$  或  $a \geq 3$ 。

**【例 2: 数形结合】** (难度: ★★☆☆) 函数  $f(x) = |x^2 + 3x|, x \in \mathbf{R}$ , 若方程  $f(x) - a|x - 1| = 0$  恰有 4 个互异的实数根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_

**【名师解析】** 方程为  $|x^2 + 3x| = a|x - 1|, x = 1$  不是方程的解, 所以  $x \neq 1$  时,  $a = \frac{|x^2 + 3x|}{|x - 1|}$ ,

即  $a = \left| x - 1 + \frac{4}{x - 1} + 5 \right|, t = x - 1, y = a$  与  $y = \left| t + \frac{4}{t} + 5 \right|$  有 4 个交点, 得  $a \in (0, 1) \cup (9, +\infty)$

**【例 3: 利用性质作图】** (难度: ★★★★★) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1, & x < 0 \\ \log_a x (a > 0, a \neq 1), & x > 0 \end{cases}$  的图像上关于  $y$  轴对称的点至少有 3 对, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

**【名师解析】** 转化为方程  $f(x_0) = f(-x_0)$  至少有三个解。即  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) - 1 = \log_a x$  有三个根, 所以问题转化为  $g(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) - 1$  与  $h(x) = \log_a x$  有三个交点, 先做  $y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) - 1$

的图像,观察知  $y = \log_a x$  与其有三个交点,则  $0 < a < 1$ ,观察图像得  $g(5) < h(5)$ ,所以  $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) - 1 < \log_a 5 \Rightarrow -2 < \log_a 5 \Rightarrow \log_a \frac{1}{a^2} < \log_a 5 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > 5$ ,所以  $a < \frac{\sqrt{5}}{5}$

### 三、三角函数

#### 【知识归纳】

(1) 同角公式

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(2) 两角和差的正余弦, 正切公式:

$$\textcircled{1} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad \textcircled{2} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\textcircled{3} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \textcircled{4} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\textcircled{5} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \textcircled{6} \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

(3) 倍半角公式:

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\textcircled{2} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\textcircled{3} \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

(4) 辅助角公式:  $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi)$ , 其中  $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

(5) 三角函数的基本性质

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
定义域	$R$	$R$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$R$
对称轴	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$	$x = k\pi$	1
对称中心	$(k\pi, 0)$	$(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{k\pi}{2}, 0)$
单调递增区间	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$	$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
单调递减区间	$[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$	$[2k\pi, 2k\pi + \pi]$	1
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	$T = \frac{2\pi}{ w }$	$T = \frac{2\pi}{ w }$	$T = \frac{\pi}{ w }$

【例 1: 坐标运算】(难度: ☆☆☆) 已知角  $\alpha$  的终边过点  $(12, -5)$ , 则  $\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$  等于 ( )

【名师解析】由点的坐标有:  $r = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ , 结合三角函数的定义可知  $\sin\alpha = \frac{-5}{r} = -\frac{5}{13}$ ,  $\cos\alpha = \frac{12}{r} = \frac{12}{13}$ , 则  $\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{5}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{13} = \frac{1}{13}$ .

【例 2: 图像移动】(难度: ☆☆☆) 把函数  $y = \sin x$  的图像上所有的点横坐标都缩小到原来的一半, 纵坐标保持不变, 再把图像向右平移  $\frac{3\pi}{4}$  个单位, 这是对应于这个图像的解析式是 ( )

A.  $y = \cos 2x$  B.  $y = -\cos 2x$  C.  $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{4})$  D.  $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{8})$

【名师解析】 $y = \sin x \xrightarrow{\text{横坐标} \times \frac{1}{2}} y = \sin 2x \xrightarrow{\text{向右平移} \frac{3\pi}{4}} y = \sin 2(x - \frac{3\pi}{4})$ , 经过化简可

得:  $y = \sin 2(x - \frac{3\pi}{4}) = \sin(2x - \frac{3\pi}{2}) = \cos 2x$ .

【例 3: 单调性与区域内值域问题】(难度: ★☆☆) 在已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  (其中  $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象与  $x$  轴的交点中, 相邻两个交点之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 且图象上一个最低点为  $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$

- (1) 求  $f(x)$  解析式;
- (2) 当  $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$  时, 求  $f(x)$  值域;
- (3) 求  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上单调区间.

【名师解析】(1) 由最低点为  $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$  得  $A = 2$ . 由  $x$  轴上相邻两个交点之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 得  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $T = \pi$ ,  $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ . 由点  $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$  在图象上得  $2\sin(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi) = -2$ , 即  $\sin(\frac{4\pi}{3} + \varphi) = -1$ , 故  $\frac{4\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ,  $\therefore \varphi = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ , 又  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$ . 故  $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ . (2)  $\because x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$

当  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x)$  取得最大值 2; 当  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ , 即  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x)$  取得最小值 -1, 故  $f(x)$  的值域为  $[-1, 2]$ .

(3) 由  $y = \sin x$  的单调性知  $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ , 即  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$  单调递增, 所以  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{6}]$  上单调递增, 结合该函数的最小正周期, 在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减.

【例 4:  $\omega$  的取值范围】(难度: ★★☆☆) 已知函数  $f(x) = 2\sin ax$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$  上递增, 则正实数  $\omega$  的最大值为 ( ).

A. 2 B.  $\frac{3}{2}$  C.  $\frac{3}{4}$  D.  $\frac{2}{3}$

【名师解析】令  $-\frac{\pi}{2} \leq \omega x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\because \omega > 0$ ,  $\therefore -\frac{\pi}{2\omega} \leq x \leq \frac{\pi}{2\omega}$ ,  $\therefore [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}] \subseteq [-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$ ,  $\therefore$

$\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2\omega} \\ -\frac{\pi}{3} \geq -\frac{\pi}{2\omega} \end{cases}$  解得  $0 < \omega \leq \frac{3}{2}$ , 故选 B.

【例 5: 诱导公式应用】(难度: ☆☆☆)  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ , 则  $\cos(\alpha - \beta) = ( )$

A.  $\frac{59}{72}$  B.  $-\frac{59}{72}$  C.  $\frac{13}{36}$  D.  $-\frac{13}{36}$

【名师解析】 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ ,

分别平方可得  $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{4}$ ,

$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{9}$ , 两式相加可得  $2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{13}{36}$ ,

即  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{59}{72}$ , 则  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{59}{72}$ , 故选 B.

【例 6: 化为正切】(难度: ☆☆☆) 已知  $\tan \theta = 2$ , 则  $\sin \theta \cos \theta = \underline{\hspace{1cm}}$ .

【名师解析】由  $\tan \theta = 2$ , 则  $\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{1}{\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}} = \frac{2}{5}$ , 故答案为  $\frac{2}{5}$ .

【例 7: 三角函数综合性质应用】(难度: ★☆☆) 给出下列命题:

(1) 函数  $y = \sin|x|$  不是周期函数; (2) 函数  $y = \tan x$  在定义域内为增函数;

(3) 函数  $y = \left| \cos 2x + \frac{1}{2} \right|$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$ ;

(4) 函数  $y = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  的一个对称中心为  $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ .

其中正确命题的序号是\_\_.

【名师解析】(1) 由于函数  $y = \sin|x|$  是偶函数, 作出  $y$  轴右侧的图象, 再关于  $y$  轴对称即得左侧图象, 观察图象可知没有周期性出现, 即不是周期函数; (2) 错, 正切函数在定义域内不单调, 整个图象具有周期性, 因此不单调; (3) 由周期函数的定义  $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \left| -\cos 2x + \frac{1}{2} \right| \neq f(x)$ ,  $\therefore \frac{\pi}{2}$  不是函数的周期; (4) 由于  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ , 故根据对称中心的意义可知  $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$  是函数的一个对称中心, 故只有 (1) (4) 是正确的.

## 四、解三角形

【知识归纳】

正弦定理:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , 其中  $R$  为  $\triangle ABC$  外接圆的半径

余弦定理:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ;  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

三角形面积公式:  $S = \frac{1}{2}a \cdot h$  ( $a$  为三角形的底,  $h$  为对应的高);

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r \quad (r \text{ 为三角形内切圆半径})$$

【例 1: 判断三角形的形状】(难度: ☆☆☆) 在  $\triangle ABC$  中,  $B = 60^\circ$ ,  $b^2 = ac$ , 则  $\triangle ABC$  一定是 ( )

- A. 钝角三角形 B. 锐角三角形  
C. 直角三角形 D. 等边三角形

【名师解析】 $\because b^2 = ac, B = 60^\circ$ , 由余弦定理可得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B = a^2 + c^2 - ac$ ,

$\therefore ac = a^2 + c^2 - ac, \therefore (a - c)^2 = 0$ , 故  $a = c$ , 故  $\triangle ABC$  一定是等边三角形, 故选 D.

【例 2: 解的个数】(难度: ☆☆☆) 在  $\triangle ABC$  中,  $b = 6, c = 10, B = \frac{\pi}{6}$ , 判断三角形解的情况.

【名师解析】由余弦定理得  $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 + 100 - 36}{2 \cdot 10 \cdot a} \Rightarrow a^2 - 10\sqrt{3}a + 64 = 0$ , 由  $\Delta > 0$  可得其有两个解。

【例 3: 正余弦定理的综合应用】(难度: ☆☆☆) 已知锐角  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 且  $\sqrt{3}a = 2b\sin A$

(1) 求  $B$  的大小;

(2) 若  $a^2 + c^2 = 7$ , 且  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 求  $b$  的值.

【名师解析】(1) 因为  $\cos B = \frac{4}{5}$ , 所以  $\sin B = \frac{3}{5}$ . 由正弦定理得  $\frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sin B}$ , 即  $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{5}}$ . 解得  $a = \frac{5}{3}\sqrt{2}$ . (2) 由题得  $\frac{1}{2}ac\sin B = 3$ , 即  $\frac{3}{10}ac = 3$ , 所以  $ac = 10$ . 由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$ , 得  $4 = a^2 + c^2 - \frac{8}{5}ac = a^2 + c^2 - 16$ , 即  $a^2 + c^2 = 20$ . 那么  $(a-c)^2 = a^2 + c^2 - 2ac = 0$ , 由此得  $a = c$ , 所以  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

【例 4: 余弦定理+基本不等式】(难度: ★★ 六) 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 向量  $\mathbf{x} = (2a + c, b)$ , 向量  $\mathbf{y} = (\cos B, \cos C)$ , 且  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

(1) 求  $B$  的大小;

(2) 若  $b = \sqrt{3}$ , 求  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$  的最小值.

【名师解析】(1)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (2a + c)\cos B + b\cos C = 0$ , 得  $2\sin A\cos B + \sin C\cos B + \sin B\cos C = 0$ ,  $\therefore 2\sin A\cos B + \sin(B + C) = 0$ ,  $\therefore \sin A(2\cos B + 1) = 0$ .  $\therefore A, B \in (0, \pi)$ ,  $\therefore \sin A \neq 0$ ,  $\cos B = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore B = \frac{2}{3}\pi$ . (2) 由余弦定理知  $3 = a^2 + c^2 - 2accos\frac{2}{3}\pi = c^2 + a^2 + ac \geq 2ac + ac = 3ac \Rightarrow ac \leq 1$ .  $\therefore |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|^2 = c^2 + a^2 + 2accos\frac{2}{3}\pi = c^2 + a^2 - ac \geq 2ac - ac = ac \leq 1$ .  $\therefore |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$  的最小值为 1, 当且仅当  $a = c = 1$  时取“=”.

【例 5: 经典题型】(难度: ★★ ☆) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $\angle ABC$  的平分线交  $AC$  于点  $D$ , 且  $BD = 1$ , 则  $4a + c$  的最小值为\_\_.

【名师解析】由题意可知,  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ , 由角平分线性质的和三角形面积公式得  $\frac{1}{2}ac\sin 120^\circ = \frac{1}{2}c \times 1 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2}a \times 1 \times \sin 60^\circ$ , 化简得  $ac = a + c$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$ , 因此  $4a + c = (4a + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} = 9$ , 当且仅当  $c = 2a = 3$  时取等号, 则  $4a + c$  的最小值为 9.

【例 6】(难度: ★★ ☆)  $\triangle ABC$  中,  $D$  是边  $AC$  上的点,  $AB = AD$ ,  $2AB = \sqrt{3}BD$ ,  $BC = 2BD$ , 则  $\sin C$  的值为\_\_.

【名师解析】由  $2AB = \sqrt{3}BD$  可设  $BD = 2k$  则  $AB = \sqrt{3}k \therefore AD = \sqrt{3}k, BC = 4k \therefore$  在

$$\triangle ADB \text{ 中, } \cos ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + (2k)^2 - (\sqrt{3}k)^2}{2\sqrt{3}k \cdot 2k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \cos BDC = -\cos ADB = -\frac{\sqrt{3}}{3} \therefore \sin BDC = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . 在  $\triangle BDC$  中, 由正弦定理可得:

$$\frac{BD}{\sin C} = \frac{BC}{\sin BDC} \Rightarrow \sin C = \frac{BD \cdot \sin BDC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

【例 7: 经典题型】(难度: ★★六) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边,  $a = 2$  且  $(b + 2)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为\_\_

【名师解析】  $(b + 2)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C \Rightarrow (b + 2)(a - b) = (c - b)c$

$$\Leftrightarrow ab - b^2 + 2a - 2b = c^2 - bc \Leftrightarrow -b^2 + 4 = c^2 - bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = 4$$

$$\because 4 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \therefore \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3} \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

$$\because b^2 + c^2 - bc = 4 \text{ 且 } b^2 + c^2 \geq 2bc \therefore 2bc - bc \leq 4 \text{ 即 } bc \leq 4 \therefore S_{\triangle ABC} \leq \sqrt{3}$$

## 五、数列

【知识归纳】

等差数列的通项公式:  $a_n = a_1 + (n - 1)d$

等差数列前  $n$  项和公式:  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

等差数列的中项性质:  $a_m + a_n = a_p + a_q \Leftrightarrow m + n = p + q$

等比数列的通项公式:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

等比数列前  $n$  项和公式: 则  $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} (q \neq 1)$

等比数列的中项性质:  $m + n = p + q \Leftrightarrow a_m a_n = a_p a_q$

【例 1: 等差数列基本运算】(难度: ☆☆☆) 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_3 + a_7 = a_5$ , 则数列  $\{a_n\}$  前 9 项的和  $S_9$  等于 ( )

【名师解析】  $\because \{a_n\}$  为等差数列,  $\therefore a_3 + a_7 = 2a_5$ , 又已知  $a_3 + a_7 = a_5$ ,  $\therefore a_5 = 0$ , 则  $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9 \times 2a_5}{2} = 0$

【例 2: 等比数列基本运算】(难度: ☆☆☆) 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 = 7$ , 前 3 项之和  $S_3 = 21$ , 则公比  $q = ( )$

【名师解析】 由已知得  $\begin{cases} a_1 q^2 = 7 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 21 \end{cases}$ , 消去  $a_1$  得  $\frac{1+q+q^2}{q^2} = 3$ ,  $\therefore 2q^2 - q - 1 = 0$ ,  $\therefore q = 1$  或  $q = -\frac{1}{2}$

【例 3: 等差数列的比值问题】(难度: ★☆☆) 已知两个等差数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 若  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{7n+2}{n+3}$ , 则  $\frac{a_5}{b_5} =$

【名师解析】 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n, T_n$ , 公差分别为  $d_1, d_2$ , 则

$$\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{(2n-1)a_1 + \frac{1}{2}(2n-1)(2n-1-1)d_1}{(2n-1)b_1 + \frac{1}{2}(2n-1)(2n-1-1)d_2} = \frac{a_1 + (n-1)d_1}{b_1 + (n-1)d_2} = \frac{a_n}{b_n} \therefore \frac{a_5}{b_5} = \frac{S_9}{T_9}$$

$$= \frac{7 \times 9 + 2}{9 + 3} = \frac{65}{12}.$$

【例 4: 数列的最值问题类型一】(难度: ★☆☆) 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 且  $a_4 = 1, S_{15} = 75$ , 求  $S_n$  取得最小值时, 求  $n$  的值.

【名师解析】方法一:  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n^2-5n}{2}$ , 当  $n = 2$  或  $3$  时,  $S_n$  取得最小值. 方法二:  $a_n = a_1 + (n-1)d = n-3, \therefore a_1 < a_2 < a_3 = 0 < a_4 < \dots$ , 故  $n = 2$  或  $3$  时,  $S_n$  取得最小值.

【例 5: 数列的最值问题类型二】(难度: ★六☆) 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_{13} > 0, S_{14} < 0$ , 则  $S_n$  取最大值时  $n$  的值为 ( )

【名师解析】根据  $S_{13} > 0, S_{14} < 0$ , 可以确定  $a_1 + a_{13} = 2a_7 > 0, a_1 + a_{14} = a_7 + a_8 < 0$ , 所以可以得到  $a_7 > 0, a_8 < 0$ , 所以则  $S_n$  取最大值时  $n$  的值为 7

【例 6: 求通项之阶差法】(难度: ★☆☆) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = 2n^2 + n + 1, n \in \mathbf{N}^*$ , 求  $a_n =$

【名师解析】根据递推公式, 可得  $S_{n-1} = 2(n-1)^2 + (n-1) + 1$ , 由通项公式与求和公式的关系, 可得  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 代入化简得  $a_n = 2n^2 + n + 1 - 2(n-1)^2 - (n-1) - 1 = 4n - 1$ , 经检验, 当  $n = 1$  时,  $S_1 = 4, a_1 = 3$ , 所以  $S_1 \neq a_1$ , 所以  $a_n =$

$$\begin{cases} 4, & n = 1 \\ 4n - 1, & n \geq 2 \end{cases}$$

【例 7: 求通向之构造法】(难度: ★☆☆) 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 2$ , 且  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(n \in \mathbf{N}^*)$ , 则数列  $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$  的前 10 项的和为\_\_

【名师解析】由  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$ , 得  $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1), \therefore \{a_n - 1\}$  为等比数列,  $a_n - 1 = (a_1 - 1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \frac{1}{a_n-1} = 2^{n-1}, S_{10} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023$ , 故答案为 1023.

【例 8: 求通向之倒数法】(难度: ★☆☆) 由  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n+1}$  给出的数列  $\{a_n\}$  的第 34 项为 ( )

【名师解析】由  $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n+1}$  两边取倒数, 得  $\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}, \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  是首项为 1, 公差为 3 的等差数列,  $\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$ , 即  $a_n = \frac{1}{3n-2}, \therefore a_{34} = \frac{1}{3 \times 34 - 2} = \frac{1}{100}$

【例 9: 求和之错位相减法】(难度: ★☆☆) 单调递增的等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, a_1 = 1$ , 且  $a_2, a_4, a_5 + 3$  依次成等比数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = a_n \cdot 2^{a_n-1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

【名师解析】(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ . 由题意可知  $a_4^2 = a_2(a_5 + 3)$ ,  $\therefore (1 + 3d)^2 = (1 + d)(4 + 4d)$ , 解得  $d = 1$  或  $d = -\frac{3}{5}$ ,  $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  单调递增,  $\therefore d = 1$ ,  $\therefore a_n = 1 + n - 1 = n$ .

(2) 由 (1) 可得  $b_n = n \cdot 2^{n-1}$ .  $\therefore S_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$ , ①  $\therefore 2S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$ , ②。①-②得

$$\begin{aligned} -S_n &= 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{1-2^n}{1-2} - n \cdot 2^n = -1 + (1-n) \cdot 2^n, \therefore S_n \\ &= (n-1) \cdot 2^n + 1. \end{aligned}$$

【例 10: 求和之裂项相消法】(难度: ★☆☆) 设正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $2\sqrt{S_n} = a_n + 1, (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$  的取值范围.

【名师解析】(1) ①  $n = 1$  时, 由  $2\sqrt{S_1} = a_1 + 1$ , 得  $a_1 = 1$ , ②  $n \geq 2$  时, 由已知, 得  $4S_n = (a_n + 1)^2$ ,  $\therefore 4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2$ , 两式作差, 得  $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$ , 又  $\because \{a_n\}$  是正项数列,  $\therefore a_n - a_{n-1} = 2$ ,  $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列.  $\therefore a_n = 2n - 1, (n \in \mathbf{N}^*)$ .

$$(2) \because b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2}.$$

又因为数列  $\{T_n\}$  是递增数列, 当  $n = 1$  时  $T_n$  最小,  $T_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\therefore T_n \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$ .

## 六、不等式

### 一、比较大小

(一) 作差法

【例】(难度: ☆☆☆) 设  $a = \sin 33^\circ, b = \cos 55^\circ, c = \tan 35^\circ$ , 则 ( )

A.  $a > b > c$  B.  $b > c > a$  C.  $c > b > a$  D.  $c > a > b$

【名师解析】 $\because b = \sin 35^\circ, \therefore b > a; \because b - c = \cos 55^\circ - \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \frac{\sin 35^\circ (\cos 35^\circ - 1)}{\cos 35^\circ} < 0.$   
 $\therefore b < c, \therefore c > b > a$ , 故选 C

## (二) 作商法

【例】(难度:★★六) 设  $x, y, z$  为正数, 且  $2^x = 3^y = 5^z$ , 则

A.  $2x < 3y < 5z$  B.  $5z < 2x < 3y$  C.  $3y < 5z < 2x$  D.  $3y < 2x < 5z$

【名师解析】设  $2^x = 3^y = 5^z = k$ , 因为  $x, y, z$  为正数, 所以  $k > 1$ , 则  $x = \log_2 k, y = \log_3 k, z = \log_5 k$ , 所以  $\frac{2x}{3y} = \frac{2\lg k}{\lg 2} \times \frac{\lg 3}{3\lg k} = \frac{\lg 9}{\lg 8} > 1$ , 则  $2x > 3y$ , 排除 A、B; 只需比较  $2x$  与  $5z$ ,  $\frac{2x}{5z} = \frac{2\lg k}{\lg 2} \times \frac{\lg 5}{5\lg k} = \frac{\lg 25}{\lg 32} < 1$ , 则  $2x < 5z$ , 选 D.

## (三) 中间值法

【例 1】(难度:☆☆☆) 设  $a = \log_3 \pi, b = \log_2 \sqrt{3}, c = \log_3 \sqrt{2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

【名师解析】可先进行 0,1 分堆, 可判断出  $a > 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$ , 从而  $a$  肯定最大, 只需比较  $b, c$  即可, 观察到  $b, c$  有相同的结构: 真数均带有根号, 抓住这个特点, 利用对数公式进行变换:  $b = \log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3, c = \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2$ , 从而可比较出  $\log_3 2 < 1 < \log_2 3$ , 所以  $c < b$ .

【例 2】(难度:☆☆☆)  $a = \log_3 7, b = 2^{1.1}, c = 0.8^{3.1}$ , 则 ( )

A.  $b < a < c$  B.  $a < c < b$  C.  $c < b < a$  D.  $c < a < b$

【名师解析】首先进行 0,1 分组, 可得  $c < 1 < a, b$ , 下面比较  $a, b$  的大小, 可以考虑以 2 作为中间量,  $b = 2^{1.1} > 2, a = \log_3 7 < \log_3 9 = 2$ , 所以  $a < 2 < b$ , 从而  $c < a < b$  (四) 函数模型法

【例】(难度:☆☆☆) 已知  $a = 2^{\frac{4}{3}}, b = 4^{\frac{2}{5}}, c = 25^{\frac{1}{3}}$ , 试比较其大小

【名师解析】因为  $a = 2^{\frac{4}{3}} = 16^{\frac{1}{3}}, b = 4^{\frac{2}{5}} = 16^{\frac{1}{5}}, c = 25^{\frac{1}{3}}$ , 且幂函数  $y = x^{\frac{1}{3}}$  在  $R$  上单调递增, 指数函数  $y = 16^x$  在  $R$  上单调递增, 所以  $b < a < c$

## 二、线性规划

【例 1: 题型一】(难度:☆☆☆) 已知不等式组 
$$\begin{cases} x - y + 6 \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases},$$

(1) 求  $z_1 = 2x - 3y$  的最大值;

(2) 求  $z_2 = \frac{y+3}{x+1}$  的取值范围.

【名师解析】(1) 由  $z_1 = 2x - 3y$ , 得  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z_1$ , 由图可知当直线  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z_1$  过点  $C(3, -3)$

时, 截距最小, 即  $z_1 = 2x - 3y$  最大, 此时  $z_1 = 2 \times 3 + 3 \times 3 = 15$ ;

(2)  $z_2 = \frac{y+3}{x+1}$  可以看作  $(-1, -3)$  和  $(x, y)$  两点间的斜率, 故其范围是  $(-\infty, 3] \cup [0, +\infty)$ .

【例 2: 题型二】(难度: ☆☆☆)  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} x - y + 1 \leq 0 \\ y \leq 1 \\ x > -1 \end{cases}$ , 则  $(x-2)^2 + y^2$  最小值为 ( )

【名师解析】由约束条件画出可行域, 可知当过  $A(0, 1)$  点时, 目标函数取最小值 5

【例 3: 线性规划与面积】(难度: ☆☆☆) 在平面直角坐标系中, 求不等式组  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$  表示的平面区域的面积为\_\_

【名师解析】不等式组  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$  表示一个等腰直角三角形 ABC 及其内部, 其中  $A(2, 0), B(2, 4), C(0, 2)$ , 所以平面区域的面积为  $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ .

【例 4: 含参的线性规划】(难度: x☆☆) 变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \\ mx - y \leq 0 \end{cases}$ , 若  $z = 2x - y$  的最大值为 2, 则实数  $m$  等于 ( )

【名师解析】作出图像, 直线  $y = mx$  为绕原点旋转的直线, 从图像可观察到可行域为一个封闭三角形, 目标函数  $y = 2x - z$ , 若  $z$  最大则动直线的纵截距最小, 可观察到 A 为最优解。  $A: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2}{2m-1}, \frac{2m}{2m-1}\right)$ , 则有  $z = 2 \cdot \frac{2}{2m-1} - \frac{2m}{2m-1} = 2$ , 解得:  $m = 1$

### 三、分式型与一元二次不等式

【例 1: 经典题型】(难度: ★☆☆) 已知不等式  $ax^2 + bx + 2 > 0$  的解集为  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$ , 则  $a + b$  的值为 ( )

【名师解析】  $ax^2 + bx + 2 > 0$  的解集为  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$ ,  $ax^2 + bx + 2 = 0$  的两根为  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ , 由韦达定理得  $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{b}{a}, \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{a}$  解方程得到  $a = -12, b = -2$

【例 2: 含参的不等式问题】(难度: ★☆☆) 若不等式  $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 > 0$  的解集是  $\mathbf{R}$ , 则  $m$  的范围是 ( )

【名师解析】由题意得不等式  $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 > 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立. ①当  $m=1$  时, 不等式为  $2 > 0$ , 不等式恒成立. 符合题意. ②当  $m \neq 1$  时, 由不等式恒成立得  $\begin{cases} m-1 > 0 \\ (m-1)^2 - 8(m-1) < 0 \end{cases}$ , 解得  $1 < m < 9$ . 综上  $1 \leq m < 9$ , 所以实数  $m$  的范围是  $[1, 9)$

【例 3: 恒成立问题】(难度: ★☆☆) 已知函数  $f(x) = ax^2 + x - a, a \in \mathbf{R}$ , 若不等式  $f(x) > 2a - 2$  对一切实数  $x$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

【名师解析】由  $f(x) > 2a - 2$ , 得  $ax^2 + x + 2 - 3a > 0$ , 若  $a = 0$ , 不等式  $x + 2 > 0$  不对一切实数  $x$  恒成立, 舍去, 若  $a \neq 0$ , 由题意得  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 1 - 4a(2 - 3a) < 0 \end{cases}$ , 解得:  $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{2}$ , 故  $a$  的范围是  $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ .

【例 4: 解含参的不等式】(难度: ★☆☆) 解关于  $x$  的不等式  $x^2 - (a+1)x + a \geq 0, (a \in \mathbf{R})$ .

【名师解析】关于  $x$  的不等式  $x^2 - (a+1)x + a \geq 0$  化为  $(x-1)(x-a) \geq 0$ , 不等式对应方程的实数根为  $a$  和  $1$ ; 当  $a > 1$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, 1] \cup [a, +\infty)$ ; 当  $a = 1$  时, 不等式的解集为  $\mathbf{R}$ , 当  $a < 1$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, a] \cup [1, +\infty)$ .

【例 5: 经典题型】(难度: ★☆☆) 已知不等式  $\log_2(ax^2 - 2x + 5) > 1$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_

【名师解析】所给条件等价于  $\begin{cases} ax^2 - 2x + 5 > 2 \\ ax^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases}$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 即  $ax^2 - 2x + 3 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ ,

由此可得:  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4 - 12a < 0 \end{cases}$  解得:  $\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$  (四、基本不等式)

【知识归纳】

$a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b > 0)$ , 当  $a = b$  时取等号.

【例 1: 经典代一法】(难度: ☆☆☆) 已知  $x > 0, y > 0, 2x + 3y = 1$ , 求  $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$  的最小值

【名师解析】  $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y}\right)(2x + 3y) = 6 + \frac{9y}{x} + \frac{4x}{y} + 6 \geq 24$

【例 2: 经典配凑系数法】(难度: ☆☆☆) 已知  $x > 0, y > 0, 2x + y + xy = 4$ , 求  $2x + y$  的最小值

【名师解析】  $xy = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2x+y}{2} \right)^2 = \frac{(2x+y)^2}{8}$

所以  $2x + y + xy = 4 \Rightarrow (2x + y) + \frac{(2x+y)^2}{8} \geq 4$  即  $(2x + y)^2 + 8(2x + y) - 32 \geq 0$ , 可解得  $2x + y \geq 4\sqrt{3} - 4$ , 即  $(2x + y)_{\min} = 4\sqrt{3} - 4$

【例 3: 经典配凑法】(难度: ☆☆☆) 设  $x > -1$ , 求函数  $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$  的最小值为\_\_

【名师解析】 考虑将分式进行分离常数,  $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} + 5$ , 使用均值不等式可得:  $y \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} + 5 = 9$ , 等号成立条件为  $x+1 = \frac{4}{x+1} \Rightarrow x = 1$ , 所以最小值为 9

【例 4: 不等式与比大小】(难度: ★☆☆) 若  $f(x) = x^{-2}, m = f\left(\frac{2}{a+b}\right), n = f\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right), r = f\left(\frac{a+b}{2ab}\right)$ , ( $a, b$  为正数), 则  $m, n, r$  的大小关系是 ( )

【名师解析】  $\because a > 0, b > 0, a + b \geq 2\sqrt{ab}, \therefore \frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ , 又由  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  得,  $\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{\sqrt{ab}}{ab}$ , 即  $\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}, \therefore$  有  $0 < \frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab}, \therefore f(x) = x^{-2}$  在  $x > 0$  时为减函数,  $\therefore f\left(\frac{2}{a+b}\right) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2ab}\right)$ , 即  $m \geq n \geq r$

## 七、直线与圆

### 一、直线问题

【知识归纳】

直线方程: 已知直线  $l$  的斜率  $k$ , 直线上一点  $P(x_0, y_0)$ , 则直线  $l$  的方程为  $y - y_0 = k(x - x_0)$

斜率公式: 已知直线上任意两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , 即直线斜率,  $k = \tan \alpha$

平行关系:  $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$ , 若两直线平行则  $k_1 = k_2, b_1 \neq b_2 \Rightarrow l_1 // l_2$

垂直关系:  $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$ , 若两直线垂直则  $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

两点距离公式: 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

点线距离公式: 设  $P(x_0, y_0)$ ,  $l: Ax + By + C = 0$ , 则点  $P$  到直线  $l$  距离  $d_{P-l} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

平行线间公式:  $l_1: Ax + By + C_1 = 0, l_2: Ax + By + C_2 = 0$ , 则  $l_1, l_2$  的距离为  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

【例 1: 倾斜角与斜率】(难度: ☆☆☆) 直线  $\sin\alpha \cdot x + y + 2 = 0$  的倾斜角的取值范围是 ( )

A.  $[0, \pi)$  B.  $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$  C.  $[0, \frac{\pi}{4}]$  D.  $[0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

【名师解析】要求倾斜角 (设为  $\theta$ ), 可将直线转化为斜截式得:  $y = -\sin\alpha \cdot x - 2$ , 所以, 即  $\tan\theta \in [-1, 1]$ , 结合正切的定义以及倾斜角的范围可得:  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

【例 2: 平行与垂直】(难度: ☆☆☆) 若  $l_1: x + (m + 1)y + (m - 2) = 0, l_2: mx + 2y + 8 = 0$  的图象是两条平行直线, 则  $m$  的值是 ( )

A.  $m = 1$  或  $m = -2$  B.  $m = 1$  C.  $m = -2$  D.  $m$  的值不存在

【名师解析】由平行线可得:  $m(m + 1) = 2$  可解得:  $m = 1$  或  $m = -2$ , 检验是否存在重合情况, 将  $m = 1$  代入直线可得:  $l_1: x + 2y - 1 = 0, l_2: x + 2y + 8 = 0$ , 符合题意, 将  $m = -2$  代入直线可得:  $l_1: x - y - 4 = 0, l_2: -2x + 2y + 8 = 0$ , 则  $l_1, l_2$  重合, 不符题意, 所以舍去。综上可得:  $m = 1$

【例 3: 反射与对称】(难度: ★☆☆) 已知直线通过点  $M(-3, 4)$ , 被直线  $l: x - y + 3 = 0$  反射, 反射光线通过点  $N(2, 6)$ , 则反射光线所在直线的方程是\_\_。

【名师解析】设  $M$  的对称点  $M'(x_0, y_0)$ , 则有  $MM' \perp l$ , 且  $MM'$  的中点  $(\frac{x_0 - 3}{2}, \frac{y_0 + 4}{2})$  在

$$l \text{ 上} \therefore \begin{cases} \frac{y_0 - 4}{x_0 + 3} = -1 \\ \frac{x_0 - 3}{2} - \frac{y_0 + 4}{2} + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \therefore M'(1, 0) \therefore k_{M'N} = 6 \therefore M'N: y = 6(x -$$

1)

即  $6x - y - 6 = 0$

## 二、直线与圆

【知识归纳】

(1) 标准方程: 设圆心的坐标  $C(a, b)$ , 半径为  $r$ , 则圆的标准方程为:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

(2) 直线与圆的位置关系: 通过判断圆心到直线距离与半径的大小得到直线与圆位置关系, 设圆的半径为  $r$ , 圆心到直线的距离为  $d$ , 则: ①当  $r > d$  时, 直线与圆相交; ②当  $r = d$  时, 直线与圆相切; ③当  $r < d$  时, 直线与圆相离

(3) 弦长公式: 弦长计算公式:  $|AB| = 2|AM| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

(4) 切线公式: ① 圆  $x^2 + y^2 = r^2$  上点  $P(x_0, y_0)$  处的切线方程为  $x_0x + y_0y = r^2$

② 圆  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  上点  $P(x_0, y_0)$  处的切线方程为

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$$

(5) 最值问题:

① 已知圆  $C$  及圆外一定点  $P$ , 设圆  $C$  的半径为  $r$  则圆上点到  $P$  点距离的最小值为  $|PM| = |PC| - r$ , 最大值为  $|PN| = |PC| + r$  (即连结  $PC$  并延长,  $M$  为  $PC$  与圆的交点,  $N$  为  $PC$  延长线与圆的交点)

② 已知圆  $C$  及圆内一定点  $P$ , 则过  $P$  点的所有弦中最长的为直径, 最短的为与该直径垂直的弦  $MN$

③ 已知圆  $C$  和圆外的一条直线  $l$ , 则圆上点到直线距离的最小值为  $|PM| = d_{C-l} - r$ , 距离的最大值为  $|PN| = d_{C-l} + r$  (过圆心  $C$  作  $l$  的垂线, 垂足为  $P$ ,  $CP$  与圆  $C$  交于  $M$ , 其反向延长线交圆  $C$  于  $N$ )

④ 已知圆  $C$  和圆外的一条直线  $l$ , 则过直线  $l$  上的点作圆的切线, 切线长的最小值为  $|PM|$

(6) 圆与圆的位置关系: 设圆  $O_1, O_2$  的半径为  $r_1, r_2, |O_1O_2| = d$

①  $d > r_1 + r_2 \Rightarrow \odot O_1, \odot O_2$  外离; ②  $d = r_1 + r_2 \Rightarrow \odot O_1, \odot O_2$  外切

③  $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Rightarrow \odot O_1, \odot O_2$  相交; ④  $d = |r_1 - r_2| \Rightarrow \odot O_1, \odot O_2$  内切

⑤  $d < |r_1 - r_2| \Rightarrow \odot O_1, \odot O_2$  内含

【例 1: 最值问题】(难度: ★☆☆) 圆  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$  上的点到直线  $x + y - 8 = 0$  的最大距离与最小距离的差是 ( )

【名师解析】圆的方程:  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 18$ , 圆心到直线的距离为:  $\frac{|2+2-8|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} < 3\sqrt{2}$ , 故直线与圆相交, 最小距离为 0, 最大距离为  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ , 综上所述可得: 圆  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$  上的点到直线  $x + y - 8 = 0$  的最大距离与最小距离的差是  $5\sqrt{2} - 0 = 5\sqrt{2}$ .

【例 2: 弦长问题】(难度: ★☆☆) 已知圆  $C$  经过点  $A(2, -1)$  和直线  $x + y - 1 = 0$  相切, 且圆心在直线  $y = -2x$  上, 若直线  $y = 2x - 2$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 求弦  $AB$  的长.

【名师解析】圆心在直线  $y = -2x$ , 设圆心为  $C(a, -2a)$ , 圆  $C$  为  $(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = r^2 (r > 0)$ , 又圆  $C$  与  $x + y - 1 = 0$  相切, 所以  $r = \frac{|a - 2a - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 + a|}{\sqrt{2}}$ , 因为圆  $C$  过点

$A(2, -1)$ , 所以  $(2-a)^2 + (-1+2a)^2 = \frac{(1+a)^2}{2}$ , 解得  $a = 1$ , 所以圆  $C$  的方程为  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ . 设  $AB$  的中点为  $D$ , 圆心为  $C$ , 连  $CD, AD$ ,  $|CD| = \frac{|2+2-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $|AC| = \sqrt{2}$ , 由平面几何知识知  $|AB| = 2|AD| = 2\sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$ , 即弦  $AB$  的长为  $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ .

**【例 3: 切点弦问题】** (难度: ★☆☆) 已知圆  $O$  的半径为 1,  $PA, PB$  为该圆的两条切线,  $A, B$  为切点, 那么  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的最小值为 ( )

**【名师解析】** 设  $|PA| = |PB| = k$ ,  $\because |OA| = 1, OA \perp PA, \therefore |PO| = \sqrt{1+k^2}$ , 令  $\angle APO = \alpha$ ,  $\angle APB = \beta$ , 则  $\cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ , 由圆的切线性质可得,  $\cos \beta = \cos 2\alpha = \frac{k^2-1}{1+k^2}$ ,  $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k^2 \cos \beta = k^2 \times \frac{k^2-1}{1+k^2}$ , 设  $t = k^2 + 1$ , 则  $t > 1$ ,  $\therefore$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{(t-1)(t-2)}{t} = \frac{t^2-3t+2}{t} = t + \frac{2}{t} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3$ , 当且仅当  $t = \sqrt{2}$  时取等号,  $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的最小值为  $-3 + 2\sqrt{2}$

**【例 4: 点距问题】** (难度: ★☆☆) 若圆  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$  上至少有三个不同的点到直线  $l: y = kx$  的距离为  $2\sqrt{2}$ , 则直线  $l$  斜率的取值范围是\_\_

**【名师解析】** 圆方程为:  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 18$ , 即圆心为  $(2, 2)$ , 半径  $r = 3\sqrt{2}$ , 作出图像可知若至少有三个不同的点到直线  $l$  距离为  $2\sqrt{2}$ , 则圆心到直线的距离应小于等于  $\sqrt{2}$ , 所以  $d_{C-l} = \frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}} \leq \sqrt{2}$ , 即解不等式:  $(2k-2)^2 \leq 2(k^2+1)$ , 解得:  $k \in [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$

## 八、立体几何

### 【知识归纳】

#### 1. 面积与体积

(1) 圆柱的侧面积: 设圆柱底面半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则侧面积为  $S = 2\pi r \cdot h$

(2) 圆锥的侧面积: 设圆锥底面半径为  $r$ , 母线长为  $l$ , 则侧面积为  $S = \pi r l$

(3) 圆台的侧面积: 设圆台上下底面半径分别为  $r, R$ , 母线长为  $l$ , 则侧面积为  $S = \pi(R+r)l$

(4) 球的面积: 设球的半径为  $R$ , 则球的表面积为  $S = 4\pi R^2$

#### 2. 面积

(1) 柱体:  $V = S \cdot h$

(2) 锥体:  $V = \frac{1}{3}S \cdot h$

(3) 台体:  $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot h$ , 其中  $S_1$  为上底面面积,  $S_2$  为下底面面积

(4) 球:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

### 3. 平行

(1) 线面平行: 若平面外的一条直线  $l$  与平面  $\alpha$  上的一条直线平行, 则  $l // \alpha$

(2) 面面平行: 如果一个平面上的两条相交直线均与另一个平面平行, 则两个平面平行

### 4. 垂直

(1) 线面垂直: 若直线  $l$  与平面  $\alpha$  上的两条相交直线垂直, 则  $l \perp \alpha$

(2) 面面垂直: 如果一条直线与一个平面垂直, 则过这条直线的平面均与这个平面垂直

5. 利用向量证明平行与垂直 (理科或新高考)

设直线  $a, b$  对应的法向量为  $\vec{a}, \vec{b}$ , 平面  $\alpha, \beta$  对应的法向量为  $\vec{m}, \vec{n}$  (其中  $a, b$  在  $\alpha, \beta$  外)

(1) 线线平行:  $a // b \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$  (2) 线线垂直:  $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

(3) 线面平行:  $a // \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{m}$  (4) 线面垂直:  $a \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{m}$

(5) 面面平行:  $\alpha // \beta \Leftrightarrow \vec{m} // \vec{n}$  (6) 面面垂直:  $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n}$

### 6. 空间向量解空间角 (理科或新高考)

用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示直线  $a, b$  的方向向量, 用  $\vec{m}, \vec{n}$  表示平面  $\alpha, \beta$  的法向量

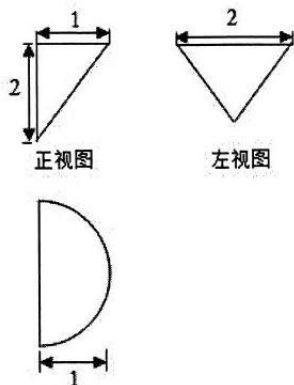
(1) 两直线所成角:  $\cos\theta = |\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

(2) 线面角:  $\sin\theta = |\cos\langle \vec{a}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{m}|}{|\vec{a}| |\vec{m}|}$

(3) 二面角:  $\cos\theta = \cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$  或  $\cos\theta = -\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$  (视平面角与法向量夹角关系而定)

(4) 点到平面距离: 设  $A$  为平面  $\alpha$  外一点,  $P$  为平面  $\alpha$  上任意一点, 则  $A$  到平面  $\alpha$  的距离为  $d_{A-\alpha} = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ , 即  $\vec{AP}$  在法向量  $\vec{n}$  上投影的绝对值

【例 1: 三视图问题】某几何体的三视图如图所示, 则它的表面积为



俯视图

( )

- A.  $2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\pi$  B.  $2 + \frac{1+2\sqrt{5}}{2}\pi$   
 C.  $2 + (1 + \sqrt{5})\pi$  D.  $2 + \frac{2+\sqrt{5}}{2}\pi$

【名师解析】由正视图与侧视图可判断出几何体为锥体,再由俯视图能够判定该几何体为圆锥的一半,且底面向上放置。所以表面积由底面半圆,侧面的一半,和轴截面的面积组成。由俯视图可得底面半圆半径  $r = 1$ ,所以底面半圆面积

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}, \text{几何体的侧面为圆锥侧面的一半,}$$

由正视图可得圆锥的母线  $l = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ,所以侧面面积  $S_2 = \frac{1}{2}\pi r l = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$ ,轴截面为三角形,

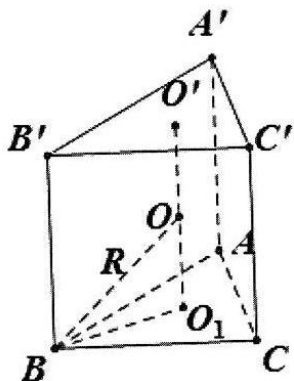
底为 2 (侧视图),高为 2 (正视图) 所以可得面积  $S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ,所以该几何体的表面积为  $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\pi + 2$ .

【例 2: 平行与垂直的判定】已知  $m, n$  表示两条不同直线,  $\alpha$  表示平面,下列说法中正确的是 ( )

- A. 若  $m \perp \alpha, n \subset \alpha$ , 则  $m \perp n$  B. 若  $m // \alpha, n // \alpha$  则  $m // n$   
 C. 若  $m \perp \alpha, m \perp n$ , 则  $n // \alpha$  D. 若  $m // \alpha, m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$

【名师解析】A 选项若直线与平面垂直,则直线与这个平面上的所有直线均垂直,所以 A 正确 B 选项可用向量判断,  $m // \alpha \Rightarrow \vec{m} \perp \vec{\alpha}, n // \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{\alpha}$ ,由  $\vec{m} \perp \vec{\alpha}, \vec{n} \perp \vec{\alpha}$  无法判断出  $\vec{m}, \vec{n}$  的关系,所以不能推出  $m // n$ ; C 选项并没有说明直线  $n$  是否在平面  $\alpha$  上,所以结论不正确; D 选项也可用向量判断,  $m // \alpha \Rightarrow \vec{m} \perp \vec{\alpha}, m \perp n \Rightarrow \vec{m} \perp \vec{n}$ ,同理由  $\vec{m} \perp \vec{\alpha}, \vec{m} \perp \vec{n}$  无法判断  $\vec{n}, \vec{\alpha}$  的情况,所以无法推断出  $n \perp \alpha$ ,综上所述: A 正确

【例 3: 柱体外接球问题】设三棱柱的侧棱垂直于底面,所有棱的长都为  $a$ ,



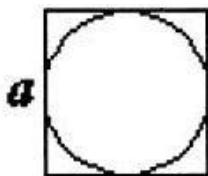
顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ( )

【名师解析】根据题意条件可知三棱柱是棱长都为  $a$  的正三棱柱, 上下底面中心连线的中点就是球心, 如图: 则其外接球的半径为  $R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sin 60^\circ}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}a$ , 球的表面积为  $S_{\text{球}} = 4\pi \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{7}{3}\pi a^2$

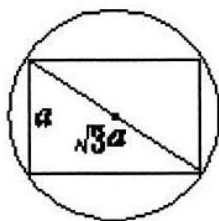
【例 4: 长方体与正方体外接球问题】正方体内切球和外接球半径的比为 ( )

A.  $1:\sqrt{2}$  B.  $1:\sqrt{3}$  C.  $\sqrt{2}:\sqrt{3}$  D.  $1:2$

【名师解析】作正方体与其内切球的截面如图甲, 设正方体棱长为  $a$ ,



甲



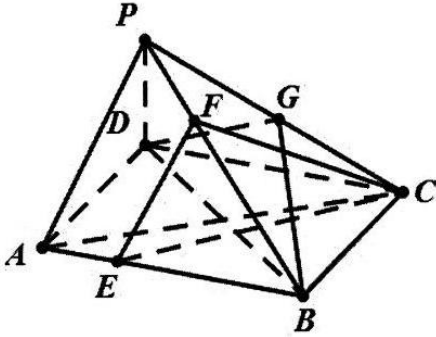
乙

则有  $2r = a$  ( $r$  为内切球半径). 作正方体与其外接球的截面如图乙, 则有  $2R = \sqrt{3}a$  ( $R$  为外接球半径), 得  $r:R = 1:\sqrt{3}$ , 故选 B.

【例 5: 三棱锥外接球顶点模型】已知  $A, B$  是球  $O$  的球面上两点,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $C$  为球面上的动点, 若三棱锥  $O-ABC$  的体积的最大值为 36, 则球  $O$  的表面积为 ( )

【名师解析】设球  $O$  的半径为  $R$ , 当动点  $C$  与平面  $AOB$  垂直时, 三棱锥  $O-ABC$  的体积达到最大值, 且  $V_{\max} = \frac{1}{6}OA \times OB \times OC = \frac{1}{6}R^3 = 36, \therefore R = 6, \therefore$  球  $O$  的表面积为  $4\pi R^2 = 144\pi$

【例 6: 平行与垂直的证明】如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$



平面  $ABCD, PA \perp PC, \angle ADC = 120^\circ$  底面  $ABCD$  为菱形,  $G$  为  $PC$  中点,  $E, F$  分别为  $AB, PB$  上一点,  $AB = 4AE = 4\sqrt{2}, PB = 4PF$

- (1) 求证:  $AC \perp DF$ ;
- (2) 求证:  $EF \parallel$  平面  $BDG$ ;

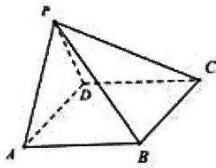
### 【名师解析】

(1) 证明:  $\because PD \perp$  平面  $ABCD, \therefore PD \perp AC, \because$  底面  $ABCD$  为菱形,  $\therefore AC \perp BD, \therefore BD \cap PD = D, \therefore AC \perp$  平面  $PBD$ , 又  $DF \subset$  平面  $PBD, \therefore AC \perp DF$ .

(2) 证明:  $\because AB = 4AE, PB = 4PF, \therefore EF \parallel PA$ , 设  $AC$  与  $BD$  的交点为  $O$ , 连接  $OG, \because ABCD$  为菱形,  $\therefore O$  为  $AC$  中点, 又  $G$  为  $PC$  中点,  $\therefore OG \parallel PA, \therefore EF \parallel OG$ , 又  $EF \not\subset$  平面  $BDG, OG \subset$  平面  $BDG, \therefore EF \parallel$  平面  $BDG$ .

【例 7: 表面积】如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ , 且  $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ .

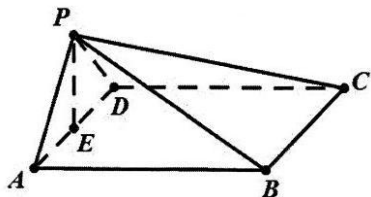
- (1) 证明: 平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ;



(2) 若  $PA = PD = AB = DC, \angle APD = 90^\circ$ , 且四棱锥  $P-ABCD$  的体积为  $\frac{8}{3}$ , 求该四棱锥的侧面积.

## 【名师解析】

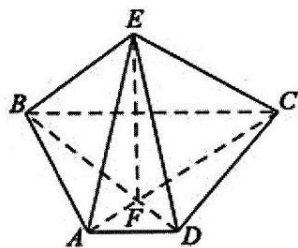
(1) 由已知  $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ , 得  $AB \perp AP, CD \perp PD$ . 由于  $AB \parallel CD$ , 故  $AB \perp PD$ , 从而  $AB \perp$  平面  $PAD$ . 又  $AB \subset$  平面  $PAB$ , 所以平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ .



(2) 在平面  $PAD$  内作  $PE \perp AD$ , 垂足为  $E$ . 由 (1) 知,  $AB \perp$  面  $PAD$ , 故  $AB \perp PE$ , 可得  $PE \perp$  平面  $ABCD$ . 设  $AB = x$ , 则由已知可得  $AD = \sqrt{2}x, PE = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ . 故四棱锥  $P-ABCD$  的体积  $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}AB \cdot AD \cdot PE = \frac{1}{3}x^3$ . 由题设得  $\frac{1}{3}x^3 = \frac{8}{3}$ , 故  $x = 2$ . 从而  $PA = PD = 2, AD = BC = 2\sqrt{2}, PB = PC = 2\sqrt{2}$ .  $P-ABCD$  侧面积为  $\frac{1}{2}PA \cdot PD + \frac{1}{2}PA \cdot AB + \frac{1}{2}PD \cdot DC + \frac{1}{2}BC^2 \sin 60^\circ = 6 + 2\sqrt{3}$ .

【例 8: 体积】已知四棱锥  $E-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是直角梯形,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 且  $AD \parallel BC, BC = 2AD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$ ,  $F$  为  $AC, BD$  的交点, 点  $E$  在平面  $ABCD$  内的投影为点  $F$ .

(1)  $AF \perp ED$ ;

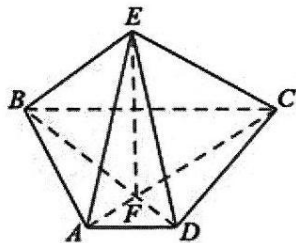


(2) 若  $AF = EF$ , 求三棱锥  $D-ABE$  的体积.

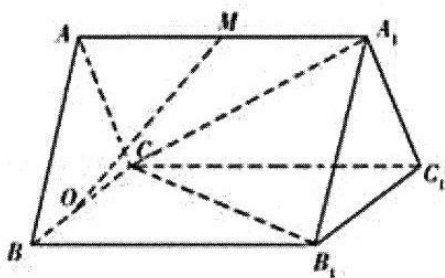
## 【名师解析】

(1) 证明: 依题意,  $\triangle AFD \sim \triangle CBF$ , 则  $\frac{AF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ , 又  $\because AB = 1, BC = \sqrt{2}$ ,  $\therefore AD = \frac{\sqrt{2}}{2}, AC = \sqrt{3}$ , 在  $\text{Rt} \triangle BDA$  中,  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $\therefore AF = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 在  $\triangle ABF$  中,  $\because AF^2 + BF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 1 = AB^2$ ,  $\therefore \angle AFB = 90^\circ$ , 即  $AC \perp BD$ ;  $\because EF \perp$  平面  $ABCD, AC \subset$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore AC \perp EF$ ; 又  $\because BD \cap EF = F, BD \subset$  平面  $BDE, EF \subset$  平面  $BDE$ ,  $\therefore AC \perp$  平面  $BDE$ ,  $\because ED \subset$  平面  $BDE$ , 故  $AC \perp ED$ , 即  $AF \perp ED$ ;

(2) 解: 依题意,  $V_{D-ABE} = V_{E-ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot EF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{36}$ .



【例 9: 点面距离】如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = AC = \sqrt{2}, BC = AA_1 = 2, O, M$  分别为  $BC, AA_1$  的中点.

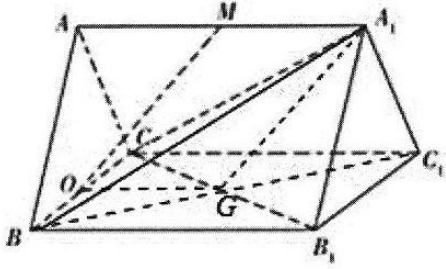


- (1) 求证:  $OM \parallel$  平面  $CB_1A_1$ ;
- (2) 求点  $M$  到平面  $CB_1A_1$  的距离.

### 【名师解析】

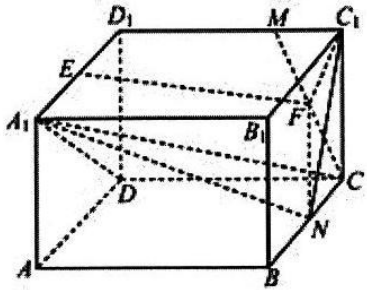
(1) 证明: 连接  $BC_1$  交  $B_1C$  于  $G$ , 则  $G$  为  $B_1C$  的中点, 连接  $OG$ , 则  $OG \parallel BB_1 \parallel A_1M$ , 又  $OG = A_1M$ ,  $\therefore$  四边形  $OGA_1M$  为平行四边形, 则  $OM \parallel A_1G$ .  $\therefore OM \not\subset$  平面  $CB_1A_1, A_1G \subset$  平面  $CB_1A_1, \therefore OM \parallel$  平面  $CB_1A_1$ ;

(2) 解:  $\because OM \parallel$  平面  $CB_1A_1, \therefore$  点  $M$  到平面  $CB_1A_1$  的距离等于点  $O$  到平面  $CB_1A_1$  的距离, 设  $B$  到平面  $CB_1A_1$  的距离为  $h$ , 由已知三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  为直三棱柱, 且  $AB = AC = \sqrt{2}, BC = AA_1 = 2$ , 可得  $A_1B_1 \perp$  平面  $AA_1C_1C$ , 则  $A_1B_1 \perp A_1C$ , 又  $A_1C = \sqrt{6}, A_1B_1 = \sqrt{2}, \therefore S_{\triangle A_1CB_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{3}, S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, A_1$  到底面的距离为 1. 由  $V_{B-CA_1B_1} = V_{A_1-BB_1C}$ , 得  $\frac{1}{3} \times \sqrt{3}h = \frac{1}{3} \times 2 \times 1$ , 得  $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  $\therefore$  点  $M$  到平面  $CB_1A_1$  的距离为  $\frac{1}{2}h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .



【例 10: 线线角】如图,在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 2BC = 2AA_1 = 4$ ,  $E$  为  $A_1D_1$  的中点,  $N$  为  $BC$  的中点,  $M$  为线段  $C_1D_1$  上一点,且满足  $\overline{MC_1} = \frac{1}{4}\overline{D_1C_1}$ ,  $F$  为  $MC$  的中点.

(1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $A_1DC$ ;

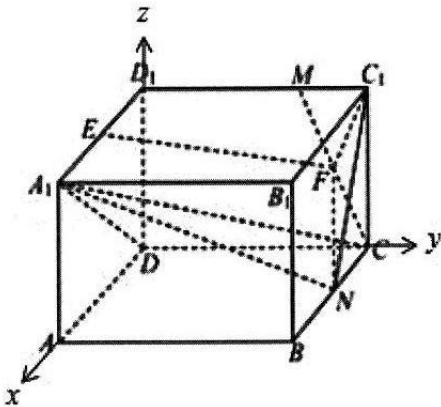


(2) 求三棱锥  $C_1 - FCN$  的体积;

(3) 求直线  $A_1D$  与直线  $CF$  所成角的余弦值.

### 【名师解析】

(1) 证明: 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,建立如图所示空间直角坐标系,由  $AB = 2BC = 2AA_1 = 4$ ,  $E$  为  $A_1D_1$  的中点,  $N$  为  $BC$  的中点,  $M$  为线



段  $C_1D_1$  上一点,且满足  $\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{D_1C_1}$ , 得  $D(0,0,0), E(1,0,2), F(0, \frac{7}{2}, 1), A_1(2,0,2), C(0,4,0), \overrightarrow{DA_1} = (2,0,2), \overrightarrow{DC} = (0, 4,0), \overrightarrow{EF} = (-1, \frac{7}{2}, -1)$ . 设平面  $A_1DC$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ . 由  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 2x + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 4y = 0 \end{cases}$ , 取  $z = -1$ , 得  $\vec{n} = (1, 0, -1)$ ,  $\because \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 0$ , 且  $EF \notin$  平面  $A_1DC$ ,  $\therefore EF //$  平面  $A_1DC$ ;

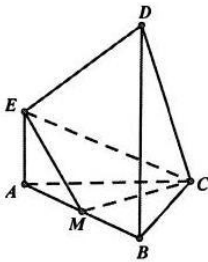
(2) 设  $F$  到平面  $CC_1N$  的距离为  $d$ , 则  $d = \frac{1}{2}$ .  $\therefore V_{C_1-FCN} = V_{F-CC_1N} = \frac{1}{3}S_{\triangle CC_1N} \cdot d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ;

(3) 解:  $\overrightarrow{DA_1} = (2,0,2)$ , 又  $\overrightarrow{CF} = (0, -\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\therefore \cos \langle \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{CF} \rangle = \frac{\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{DA_1}| \cdot |\overrightarrow{CF}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

$\therefore$  直线  $A_1D$  与直线  $CF$  所成角的余弦值  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

**【例 11: 线面角】** 在如图所示的多面体中,  $EA \perp$  平面  $ABC, DB \perp$  平面  $ABC, AC \perp BC$ , 且  $AC = BC = BD = 2AE = 2, M$  是  $AB$  中点

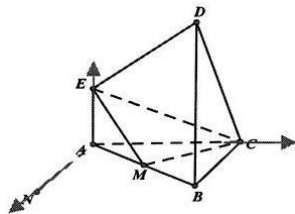
(1) 求证:  $CM \perp EM$



(2) 求平面  $EMC$  与平面  $BCD$  所成的锐二面角的余弦值

(3) 在棱  $DC$  上是否存在一点  $N$ , 使得直线  $MN$  与平面  $EMC$  所成的角为  $60^\circ$ ? 若存在, 指出点  $N$  的位置, 若不存在, 请说明理由

**【名师解析】** 过  $A$  在平面  $ABC$  上作  $BC$  的平行线  $AN \because AC \perp BC \therefore AN \perp AC \because EA \perp$  平面  $ABC \therefore AE \perp AN, AE \perp AC \therefore AE, AC, AN$  两两垂直如图建系:



$B(2,2,0), C(0,2,0), D(2,2,2), M(1,1,0), E(0,0,1)$

$$(1) \because \overrightarrow{CM} = (1, -1, 0), \overrightarrow{EM} = (1, 1, -1) \therefore \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \therefore \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{EM}$$

$$\therefore CM \perp EM$$

(2) 设平面  $EMC$  的法向量为  $\vec{n}_1 = (x, y, z)$

$$\because \overrightarrow{CM} = (1, -1, 0), \overrightarrow{EM} = (1, 1, -1) \therefore \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 2), \text{ 设平面 } BCD \text{ 的法向量为}$$

$$\vec{n}_2 = (x, y, z), \overrightarrow{BD} = (0, 0, 2), \overrightarrow{CB} = (2, 0, 0) \therefore \begin{cases} 2z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (0, 1, 0), \text{ 设平面 } EMC \text{ 与平面}$$

$$BCD \text{ 所成的锐二面角的余弦值为 } \theta, \text{ 则 } \cos\theta = |\cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(3) 设  $N(x, y, z)$   $\because N$  在  $CD$  上  $\therefore \overrightarrow{CN} = \lambda \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} = (2, 0, 2) \therefore \overrightarrow{CN} = (2\lambda, 0, 2\lambda)$

$$\therefore \lambda \overrightarrow{CD} = (2\lambda, 0, 2\lambda) \therefore \begin{cases} x = 2\lambda \\ y - 2 = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 \\ z = 2\lambda \end{cases} \therefore N(2\lambda, 2, 2\lambda) \therefore \overrightarrow{MN} = (2\lambda - 1, 1, 2\lambda)$$

$$\therefore \sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{MN}, \vec{n}_1 \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_1}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}_1|} \right| = \left| \frac{6\lambda}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{(2\lambda - 1)^2 + 1 + (2\lambda)^2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

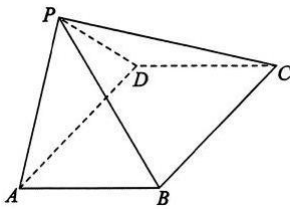
$\therefore \left| \frac{6\lambda}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8\lambda^2 - 4\lambda + 2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$  解得:  $\lambda = \frac{1}{2} \therefore \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \therefore$  存在点  $N$ , 当  $N$  为  $CD$  中点时, 直线  $MN$  与平面  $EMC$  所成的角为  $60^\circ$

## 脚踏实地，仰望星空

**【例 12: 面面角】** 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $ABCD$  为矩形, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$

(1) 求证:  $AB \perp PD$

(2) 若  $\angle BPC = 90^\circ, PB = \sqrt{2}, PC = 2$ , 问  $AB$  为何值时, 四棱锥  $P-ABCD$



的体积最大? 并求此时平面  $BPC$  与平面  $DPC$  夹角的余弦值

【名师解析】(1) 证明: 因为  $ABCD$  为矩形, 所以  $AB \perp AD$ , 又平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,

且平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD \therefore AB \perp$  平面  $PAD \therefore AB \perp PD$

(2) 过  $P$  作  $AD$  的垂线, 垂足为  $O$ , 过  $O$  作  $BC$  的垂线, 垂足为  $G$ , 连结  $PG \therefore PO \perp$  平面  $ABCD$ ,

$BC \perp$  平面  $POG, BC \perp PG$ , 在  $Rt_{\Delta}BPC, PG = \frac{2\sqrt{3}}{3}, GC = \frac{2\sqrt{6}}{3}, BG = \frac{\sqrt{6}}{3}, AB = m$ , 则

$$OP = \sqrt{PG^2 - OG^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - m^2} \therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot m \sqrt{\frac{4}{3} - m^2} = \frac{m}{3} \sqrt{8 - 6m^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{8m^2 - 6m^4}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{-6\left(m^2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}}, \text{ 当 } m^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 时, } V_{P-ABCD} \text{ 最大, 此时 } AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

如图建系, 可得:  $B\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), C\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right), D\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right), P\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\overrightarrow{PC} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \overrightarrow{BC} = (0, \sqrt{6}, 0), \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, 0\right)$ , 设平面  $BPC$  的一个法向量为

$$\vec{n}_1 = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{2\sqrt{6}}{3}y - \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0 \\ \sqrt{6}y = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \vec{n}_1 = (1, 0, 1), \text{ 设平面 } DPC$$

的

$$\text{一个法向量为 } \vec{n}_2 = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{2\sqrt{6}}{3}y - \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}x = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \vec{n}_2 =$$

$$\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

设平面  $BPC$  与平面  $DPC$  夹角为  $\theta$ , 可得  $\cos\theta = \cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

## 九、平面向量

### 【知识归纳】

1. 向量的坐标运算: 设  $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则有:

(1) 加减运算:  $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

(2) 数乘运算:  $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/315021041122012122>