摘　要

据我们所知, 不同聚合算子的迁移性质的重要性源于它在不同领域的作用, 例如图像处理、决策过程和信息聚合等. 研究者对这一性质的兴趣不仅来自于它的上述应用属性, 而且从理论的角度来看, 它对于通过两个给定三角模之间的凸组合构造新的三角模也是有用的和必要的. 那么, 作为对这一主题的理论补充, 我们将研究 2 -一致模的迁移性. 具体地, 我们研究了 2 -一致模在半-t-算子上的迁移性.

在本文中, 我们分析并刻画了五类 2 -一致模, C^k, C_k^0, C_k^1, C_1^0, C_0^1, 在半-t-算子上的 α-迁移性质的所有解. 并给出了使 α-迁移方程适用于 2 -一致模在半-t-算子上所有可能组合的充分必要条件. 所得结果表明: 对于 $G \in C^k$, 2 -一致模 G 在半-t-算子 $F_{\mu,\nu}$ 上的 α-迁移性与 $F_{\mu,\nu}$ 的 α-截线或者 $F_{\mu,\nu}$ 的基础三角模、三角余模的序和表达式有着密切的联系. 但对于其它四类, 2 -一致模 G 在半-t-算子 $F_{\mu,\nu}$ 上的迁移性完全由 $F_{\mu,\nu}$ 的 α-截线决定.

关键词: 迁移性; 2 -一致模; 一致模; 半-t-算子; 三角模; 三角余模.

Abstract

As far as we know, the significance of the migrativity property of different aggregation operators stems from its role in different fields, for example, image processing, decision making processes and aggregation of information. The interest of this property not only comes from its applications as mentioned above, but also from the theoretical point of view because it is useful and essential for strcturing a new t-norm by convex combinations between two given ones. In other words, as a supplement of this topic from the theoretical point of view, we will study the migrativity of 2-uninorms. Specifically, we investigate the migrativity property of 2-uninorms over semi-t-operators.

In this paper, we analyze and characterize all solutions about α-migrativity properties of the five subclasses of 2-uninorms, i.e. C^k, C^0_k, C^1_k, C^0_1, C^1_0, over semi-t-operators. We give the the sufficient and necessary conditions that make these α-migrativity equations hold for all possible combinations of 2-uninorms over semi-t-operators. The results obtained show that for $G \in C^k$, the α-migrativity of G over semi-t-operator $F_{\mu,\nu}$ is closely related to the α-section of $F_{\mu,\nu}$ or the ordinal sum representation of t-norm and t-conorm corresponding to $F_{\mu,\nu}$. But for the other four categories, the α-migrativity over semi-t-operator $F_{\mu,\nu}$ is fully determined by the α-section of $F_{\mu,\nu}$.

Keywords: Migrativity; 2-uninorms; Uninorms; Semi-t-operators; Triangular norms; Triangular conorms.

目　录

摘　要 **I**

Abstract **III**

第一章　引言 **1**

第二章　预备知识 **3**

2.1　伪三角模、伪三角余模 3

2.2　半-t-算子 3

2.3　2 -一致模 4

2.4　2 -一致模在半-t-算子上的迁移性 6

第三章　当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$ 时, 2-一致模在半-t-算子上的迁移性 **7**

3.1　$G \in C^k$ 7

3.2　$G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 9

第四章　当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\nu < \mu$ 时, 2-一致模在半-t-算子上的迁移性 **11**

4.1　$G \in C^k$ 11

4.2　$G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 17

第五章　总结以及未来的工作 **21**

参考文献 **22**

致　谢 **27**

硕士期间公开发表论文及科研情况 **29**

第一章　引言

聚合函数通常被用在将给定数量的数据整合以及合并为具有代表性的值的过程中. 这一过程在许多领域中的一些步骤里是不可或缺的, 这也是为什么聚合函数会被视为从计算机科学、数学到社会科学和经济学等许多领域中的重要工具. 因此, 近几十年来, 人们对聚合函数的兴趣显著增加, 并且, 一些长期以来专注于研究聚合函数的专著的出版极大地支持了这种兴趣 [1, 4, 6, 11, 14, 30, 32, 34].

最近, Akella 将一致模和零模结合在一起, 引入了一类新的聚合函数, 2 -一致模 [2]. 这一概念与三角模的序和具有相同的思想. 在这种情况下, 以全局单位元被两个局部单位元 e_1 和 e_2 取代的方式推广了一致模. 此后, 许多学者致力于研究 2 -一致模的结构特征. 特别地, 在附加一些适当的连续性条件下, 部分 2 -一致模类已经被刻画. 2018 年, Zong 等人对所有五类相互独立的 2 -一致模的结构进行了刻画 [34]. 最引人注目的是, 在系统的分析过程中, 通过分解为序和的形式, 得到了具有连续基础算子的 2 -一致模类 [18–21]. 近几年, 在删除 t-算子的交换性的假设下, 通过推广 t-算子和零模, Dryga 引入了半-t-算子的概念 [8]. 这些算子不仅从理论角度来看很有研究价值并且非常重要, 而且从应用角度来看更是一样的. 因为它们在许多领域, 如模糊量词、模糊逻辑框架、神经网络或专家系统中也发挥着重要的作用 [23, 24]. 同时, 基于半-t-算子在不同领域中的重要作用, 对它进行的完整刻画在文献 [8] 中得到呈现.

除上述结构刻画外, 还从应用角度考虑了聚合函数的另一个研究方向. 其中迁移性就是重要的应用性质之一. 对这一性质的研究旨在找到不同类型的聚合算子迁移性的所有解 [5, 10, 17, 22, 29, 31, 33], 如三角模、三角余模、一致模、零模、2 -一致模和半-t-算子等等. 同时, 不同聚合算子的迁移性的重要性源于它在不同领域中的作用, 例如图像处理、决策过程和信息聚合等.

据我们所知, 三角模的 α-迁移性质的概念首先作为一个开放问题被提出, 即, 迁移性方程是否存在严格单调的三角模解 [15, 16]. 之后, 为了能够通过具有此性质的三角模和乘积三角模 T_D 的凸组合来构造新的三角模, Durante 和 Sarkoci [7] 正式证实了它.

对于任意 $\alpha \in [0,1]$ 和三角模 T, 这个性质可以表示成函数方程

$$T(\alpha x, y) = T(x, \alpha y) \qquad\qquad x, y \in [0,1]. \tag{1.0.1}$$

这个性质的价值不仅来自于上面提到的应用性, 还来自理论方面, 因为它对于通过两个给定三角模之间的凸组合构造新的三角模是很有价值的和必要

的 [7, 27, 28]. 最近, 随着聚合函数在理论上的显著发展, 研究人员还通过用更一般的聚合算子替换三角模 T_D 和乘积 αx 来拓展这一性质 (等式.(1.0.1)). 在这个意义上, 关于聚合函数的 α-迁移性质最一般的函数方程被描述为

$$C(D(\alpha, x), y) = C(x, D(\alpha, y)), \tag{1.0.2}$$

其中 C 和 D 是两个聚合函数, 并且, 称之为 C 的 (α, D)-迁移性或者 C 在 D 上的 α-迁移性. 此后, 聚合函数的 α-迁移性质引起了许多学者的广泛关注. 其中令人印象深刻和有影响力的结果之一是 Li 等人所得到的 [13]. 他们的结果表明, 具有连续基础算子的两个一致模的迁移性质主要由两个可表示一致模或者 α-截线的迁移性质所决定的. 又因为我们将在这项工作中讨论 2-一致模, 所以在这里, 我们只回顾与 2-一致模相关的迁移性的一些结果. 事实上, 据我们所知, 目前该领域只研究了涉及零模和 2-一致模的迁移性方程. 具体来说, 2019 年, Wang 等人在文献 [33] 中分析并研究了零模和 2-一致模之间的迁移性. 基于零模和 2- 一致模的吸收元是否相同, 作者给出了 2-一致模和零模之间所有可能组合的迁移方程的解.

考虑到迁移性的广泛应用以及上述所提到的聚合算子的重要性, 本文的目标就是填补上述所提到的空缺. 换句话说, 作为从理论角度上对这一主题的补充, 我们将继续研究 2-一致模的迁移性. 特别地, 我们研究了 2-一致模在半-t-算子上的迁移性. 得到了 2-一致模在半-t-算子上的所有可能组合的迁移性方程成立的充分必要条件. 有趣的是, 在研究过程中, 我们发现对于 2-一致模 $G \in C^k$, G 在半-t-算子 $F_{\mu,\nu}$ 上的 α- 迁移性与 $F_{\mu,\nu}$ 的 α-截线或者 $F_{\mu,\nu}$ 的基础三角模、基础三角余模的序和表达式有着密切的联系. 但对于其它四类, 它们在半-t-算子 $F_{\mu,\nu}$ 上的 α-迁移性完全由 $F_{\mu,\nu}$ 的 α- 截线决定. 由于半-t- 算子是零模的推广, 在这个意义上, 本文得到的结果推广了 Wang 的结论 [33].

接下来, 我们将特别地添加一个预备知识章节, 以在本文引言之后回顾一致模、2-一致模、零模以及半-t-算子等聚合算子的结构, 该部分的内容将贯穿全文. 在第三章节, 我们详细讨论了在 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$ 的情况下, 2-一致模在半-t-算子上的迁移性. 在第四章节中, 我们继续讨论了在另一种情况下, 即, 当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\nu < \mu$ 时, 2-一致模在半-t- 算子上的迁移性. 在最后的第五章节, 我们总结了本文的研究成果并且描述了接下来要做的工作.

第二章　预备知识

我们假设读者已经熟悉了与三角模、三角余模以及一致模等聚合函数有关的基本事实和结论. 同时, 也可以在文献 [1, 3, 9, 12, 13] 中找到跟它们有关的定义、符号和结论. 所以在本章节中, 我们将仅仅给出半-t-算子和 2 -一致模的一些基本符号、事实和已有的结论.

§2.1　伪三角模、伪三角余模

定义2.1.1 ([8, 12]). (i) 一个二元聚合函数 T: $[0,1]^2 \to [0,1]$, 称它为伪三角模, 若它是递增的、结合的以及具有单位元 1.

(ii) 一个二元聚合函数 S: $[0,1]^2 \to [0,1]$, 称它为伪三角余模, 若它是递增的、结合的以及具有单位元 0.

很明显, 如果将三角模 (三角余模) 的交换性删除, 通过上面的定义, 我们会得到伪三角模 (伪三角余模).

§2.2　半-t-算子

定义2.2.1 ([8]). 一个二元聚合函数 F: $[0,1]^2 \to [0,1]$, 称它为半-t-算子, 若它是递增的、结合的以及满足 $F(0,0)=0, F(1,1)=1$, 并且 F^0, F^1, F_0, F_0 都是连续的, 其中 $F^0(x)=F(x,0)$, $F^1(x)=F(x,1)$, $F_0(x)=F(0,x)$, $F_1(x)=(1,x)$.

在本文中, 我们将利用 $F_{\mu,\nu}$ 来表示满足 $F(0,1)=\mu$ 和 $F(1,0)=\nu$ 的半-t-算子类.

定理2.2.2 ([8]). 考虑 F: $[0,1]^2 \to [0,1]$, $F(0,1)=\mu$ 且 $F(1,0)=\nu$. 那么 $F \in F_{\mu,\nu}$ 当且仅当存在一个伪三角模 T 和一个伪三角余模 S 使得

当$\mu \le \nu$时,

$$F(x,y)=\begin{cases} \mu S(\frac{x}{\mu},\frac{y}{\mu}) & 若\ x,y\in[0,\mu], \\ \nu+(1-\nu)T(\frac{x-\nu}{1-\nu},\frac{y-\nu}{1-\nu}) & 若\ x,y\in[\nu,1], \\ \mu & 若\ x\le\mu\le y, \\ \nu & 若\ y\le\nu\le x, \\ x & 若\ \mu\le x\le\nu, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

当 $\nu \le \mu$ 时,

$$F(x,y)=\begin{cases} \nu S(\frac{x}{\nu},\frac{y}{\nu}) & 若\ x,y\in[0,\nu], \\ \mu+(1-\mu)T(\frac{x-\mu}{1-\mu},\frac{y-\mu}{1-\mu}) & 若\ x,y\in[\mu,1], \\ \mu & 若\ x\le\mu\le y, \\ \nu & 若\ y\le\nu\le x, \\ y & 若\ \nu\le y\le\mu. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

如果一个半-t-算子 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足交换性, 那么就有 $\mu = \nu$. 通过上面的等式 (2.2.1) 和等式 (2.2.2), 我们发现这就意味着 F 变成了一个具有零元 μ 的零模. 因此可知零模是半-t-算子的一个子类. 接下来, 让我们一起来回顾一下 2-一致模的定义.

§2.3 2-一致模

定义2.3.1 ([2]). 考虑 $0 \leq e_1 \leq k \leq e_2 \leq 1$, 其中 $k \in [0,1]$, $e_1 \in [0,k]$ 且 $e_2 \in [k,1]$. 一个二元算子 G: $[0,1]^2 \to [0,1]$, 称它为 2-一致模, 当它是交换的、结合的、关于每个变元单调递增的, 并且满足 $G(e_1,y) = y$ 对于任意 $y \in [0,k]$ 且 $G(e_2,y) = y$ 对于任意 $y \in [k,1]$.

很明显, e_1 是 G 在 $[0,k]$ 上的单位元且 e_2 是 G 在 $[k,1]$ 上的单位元. 因此, 对于任意 $k \in (0,1)$, 很容易得到该算子在 $[0,k]^2$ 或者 $[k,1]^2$ 范围中可以被看成一致模. 在这篇文章中, 我们将记 2-一致模 G 在 $[0,k]^2$ 上的基础一致模为 U_1, 类似地, 它在 $[k,1]^2$ 上的基础一致模将被记成 U_2. 与此同时, 我们将用 U^2 去记所有的 2-一致模类.

引理2.3.2 ([2]). 考虑 $0 \leq e_1 \leq k \leq e_2 \leq 1$ 且 $G \in U^2$, 那么 $G(0,1) \in \{0,k,1\}$.

基于这个事实, 可以得到 U^2 的 3 个子类, 记作 C^0, C^k, C^1. 那么, 接下来, 我们给出所有 2-一致模类的结构.

定理2.3.3 ([2]). 考虑 $G \in U^2$. 如果 $G(x,1)$ 除了点 e_1 和 e_2 外都是连续的, 那么 $G(0,1) = 0$ 且 $G(1,k) = k$ 当且仅当 $0 < e_1 \leq k < e_2 \leq 1$ 并且存在着 2 个三角模 T^d, T^c 和 2 个三角余模 S^d, S^c 使得

$$G(x,y) = \begin{cases} T^d & \text{若 } (x,y) \in [0,e_1]^2, \\ S^d & \text{若 } (x,y) \in [e_1,k]^2, \\ T^c & \text{若 } (x,y) \in [k,e_2]^2, \\ S^c & \text{若 } (x,y) \in [e_2,1]^2, \\ k & \text{若 } (x,y) \in [e_1,k) \times (k,1] \cup (k,1] \times [e_1,k), \\ \min(x,y) & \text{其它}. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

我们将这类 2-一致模记作 C_k^0.

定理2.3.4 ([2]). 考虑 $G \in U^2$. 如果 $G(x,1)$ 除了点 e_1 外都是连续的且 $G(x,e_1)$ 除了点 e_2 外都是连续的, 那么 $G(0,1) = 0$ 和 $G(1,k) = 1$ 当且仅当 $0 < e_1 \leq k \leq e_2 < 1$ 并且存在着 2 个三角模 T^d, T^c 和 2 个三角余模 S^d, S^c 使得

$$G(x,y)=\begin{cases} T^d & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1]^2,\\ S^d & \text{若 } (x,y)\in[e_1,k]^2,\\ T^c & \text{若 } (x,y)\in[k,e_2]^2,\\ S^c & \text{若 } (x,y)\in[e_2,1]^2,\\ \min(x,y) & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1)\times(e_1,1]\cup(e_1,1]\times[0,e_1),\\ \max(x,y) & \text{若 } (x,y)\in[e_1,e_2)\times(e_2,1]\cup(e_2,1]\times[e_1,e_2),\\ k & \text{若 } (x,y)\in[e_1,k)\times(k,e_2]\cup(k,e_2]\times[e_1,k). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

我们用 C_1^0 来记这类 2-一致模.

定理2.3.5 ([2]). 考虑 $G\in U^2$. 如果 $G(x,0)$ 是除了点 e_1 以及 e_2 外都是连续的, 那么 $G(0,1)=1$ 和 $G(0,k)=k$ 当且仅当 $0\le e_1<k\le e_2<1$ 并且存在着 2 个三角模 T^d, T^c 和 2 个三角余模 S^d, S^c 使得

$$G(x,y)=\begin{cases} T^d & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1]^2,\\ S^d & \text{若 } (x,y)\in[e_1,k]^2,\\ T^c & \text{若 } (x,y)\in[k,e_2]^2,\\ S^c & \text{若 } (x,y)\in[e_2,1]^2,\\ k & \text{若 } (x,y)\in[0,k)\times(k,e_2]\cup(k,e_2]\times[0,k),\\ \max(x,y) & \text{其它}. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

我们将这类 2-一致模记作 C_k^1.

定理2.3.6 ([2]). 考虑 $G\in U^2$. 如果 $G(x,0)$ 是除了点 e_2 外都是连续的且 $G(x,e_2)$ 除了点 e_1 外都是连续的, 那么 $G(0,1)=1$ 和 $G(0,k)=0$ 当且仅当 $0<e_1\le k\le e_2<1$ 并且存在着 2 个三角模 T^d, T^c 和 2 个三角余模 S^d, S^c 使得

$$G(x,y)=\begin{cases} T^d & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1]^2,\\ S^d & \text{若 } (x,y)\in[e_1,k]^2,\\ T^c & \text{若 } (x,y)\in[k,e_2]^2,\\ S^c & \text{若 } (x,y)\in[e_2,1]^2,\\ \min(x,y) & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1)\times(e_1,e_2]\cup(e_1,e_2]\times[0,e_1),\\ \max(x,y) & \text{若 } (x,y)\in[0,e_2)\times(e_2,1]\cup(e_2,1]\times[0,e_2),\\ k & \text{若 } (x,y)\in[e_1,k)\times(k,e_2]\cup(k,e_2]\times[e_1,k). \end{cases} \tag{2.3.4}$$

我们将用 C_0^1 来记这类 2-一致模.

定理2.3.7 ([2]). 考虑 $G\in U^2$. 如果 $G(x,0)$ 除了点 e_1 外都是连续的且 $G(x,1)$ 除了点 e_2 外都是连续的, 那么 $G(0,1)=k$ 当且仅当 $0\le e_1<k<e_2\le 1$ 并且存在着 2 个三角模 T^d, T^c 和 2 个三角余模 S^d, S^c 使得

$$G(x,y)=\begin{cases} T^d & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1]^2,\\ S^d & \text{若 } (x,y)\in[e_1,k]^2,\\ T^c & \text{若 } (x,y)\in[k,e_2]^2,\\ S^c & \text{若 } (x,y)\in[e_2,1]^2,\\ \max(x,y) & \text{若 } (x,y)\in[0,e_1)\times(e_1,k]\cup(e_1,k]\times[0,e_1),\\ \min(x,y) & \text{若 } (x,y)\in[k,e_2)\times(e_2,1]\cup(e_2,1]\times[k,e_2),\\ k & \text{若 } (x,y)\in[0,k)\times(k,1]\cup(k,1]\times[0,k). \end{cases} \tag{2.3.5}$$

我们将用 C^k 来记这类 2-一致模.

在本文中, 我们将 2 -一致模 G 的基础三角模和基础三角余模分别表示为 T^d, T^c 和 S^d, S^c, 并且将 $F_{\mu,\nu}$ 的基础三角模和基础三角余模分别表示为 T_F 和 S_F.

§2.4 2-一致模在半-t-算子上的迁移性

现在, 让我们定义 2 -一致模在半-t-算子上的 α-迁移性.

定义2.4.1. *考虑 $\alpha \in (0,1)$, $G \in U^2$ 且 $F \in F_{\mu,\nu}$. 一个 2-一致模 G 被称为关于 F 是 α-迁移的(或者称 G 是 (α, F)- 迁移的), 如果满足*

$$G(F(\alpha, x), y) = G(x, F(\alpha, y)) \qquad x, y \in [0,1]. \tag{2.4.1}$$

接下来, 我们详细研究了 2 -一致模在半-t-算子上的迁移性. 由于当 $\mu = \nu$ 时, $F_{\mu,\nu}$ 退化为零模, 所以, 在这里我们假设 $F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu \neq \nu$ 并且 $\mu, \nu \notin \{0,1\}$. 同时, 为了突出 2 -一致模的结构特点并将其与其它聚合算子区分开来, 我们规定了 $G \in U^2$ 满足 $0 < e_1 < k < e_2 < 1$. 那么为了分析和研究 2 -一致模在半-t-算子上的迁移性质, 根据定理 2.2.2, 可知有两种情况需要考虑: a) 当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$ 时; b) 当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\nu < \mu$ 时.

第三章　当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$ 时，2-一致模在半-t-算子上的迁移性

在本章节中, 我们主要研究当 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$ 时, 2 -一致模 G 在半-t-算子 F 上的迁移性, 其中 $G \in C^k \cup C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$. 此外, 在接下来的证明中, $G \in C^k \cup C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 将被分为两个子类：1）C^k; 2）$C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$. 现在, 让我们讨论第一类.

§3.1　$G \in C^k$

在这里, 通过 α 和 μ, ν 之间的序关系, 我们将讨论分为以下几种情况: (a) $\alpha \in (0, \mu)$; (b) $\alpha \in [\mu, \nu]$; (c) $\alpha \in (\nu, 1)$. 现在, 我们开始讨论情况 (a) $\alpha \in (0, \mu)$.

定理3.1.1. *考虑 $G \in C^k$ 且 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$. 如果 $\alpha \in (0, \mu)$, 那么如下叙述成立.*

(i) *如果 $\mu \le e_1 < k$, 那么 G 不是 (α, F)-迁移的.*

(ii) *如果 $e_1 < \mu \le k$, 那么 G 是 (α, F)-迁移的当且仅当 $\mu = k$ 并且 U_1 是 $(\frac{\alpha}{k}, S_F)$-迁移的.*

(iii) *如果 $e_1 < k < \mu$, 那么 G 是 (α, F)-迁移的当且仅当*

$$F(\alpha, y) = \begin{cases} G(F(\alpha, e_1), y) & y \in [0, k], \\ G(\mu, y) & y \in [k, 1]. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

证明. 我们将从以下几种情况进行证明:

- 如果 $\mu \le e_1 < k$. 那么 $\alpha = G(\alpha, e_1) = G(F(\alpha, 0), e_1) = G(0, F(\alpha, e_1)) = G(0, \mu) = 0$, 这和 $\alpha \neq 0$ 相矛盾.
- 如果 $e_1 < \mu \le k$. 那么通过 $\mu \le k$, 我们可以得到 $\alpha \in (0, k)$. 基于这样的事实, 有 $k = G(\alpha, 1) = G(F(\alpha, 0), 1) = G(0, F(\alpha, 1)) = G(0, \mu) = \max\{0, \mu\} = \mu$. 这意味着, 当 $\alpha \in (0, \mu)$ 且 $e_1 < \mu \le k$ 时, 由于 G 是 (α, F)-迁移的, 可得 $\mu = k$. 此外, 对于 $(x, y) \in [0, k]^2$, 由于 G 是 (α, F)-迁移的, 我们有

$$\begin{aligned} kU_1(S_F(\frac{\alpha}{k}, \frac{x}{k}), \frac{y}{k}) &= kU_1(\frac{kS_F(\frac{\alpha}{k}, \frac{x}{k})}{k}, \frac{y}{k}) \\ &= G(F(\alpha, x), y) \\ &= G(x, F(\alpha, y)) \\ &= kU_1(\frac{x}{k}, \frac{kS_F(\frac{\alpha}{k}, \frac{y}{k})}{k}) \\ &= kU_1(\frac{x}{k}, S_F(\frac{\alpha}{k}, \frac{y}{k})). \end{aligned}$$

接下来, 设 $x^1=\frac{x}{k}$ 且 $y^1=\frac{y}{k}$, 显然 $(x^1,y^1)\in[0,1]^2$. 因此, 有 $U_1(S_F(\frac{\alpha}{k},x^1),y^1)=U_1(x^1,S_F(\frac{\alpha}{k},y^1))$ 对于任意 $(x^1,y^1)\in[0,1]^2$, 所以 U_1 是 $(\frac{\alpha}{k},S_F)$- 迁移的.

相反, 当 $\mu=k$ 并且 U_1 是 $(\frac{\alpha}{k},S_F)$-迁移的, 通过简单的计算, 我们可以得到 G 是 (α,F)-迁移的.

- 如果 $e_1<k<\mu$. 首先, 我们证明 $e_2>\mu$. 否则, $e_2\leq\mu$. 此时通过 $F(\alpha,e_2)\geq e_2$, 可得 $1=G(F(\alpha,e_2),1)=G(e_2,F(\alpha,1))=G(e_2,\mu)=\mu$. 由于 $\mu\neq1$, 所以有 $e_2>\mu$. 在这种情况中, 对于任意 $y\in[k,1]$, 通过 $F(\alpha,y)\geq F(\alpha,k)\geq k$, 有 $G(\mu,y)=G(F(\alpha,e_2),y)=G(e_2,F(\alpha,y))=F(\alpha,y)$. 假设 $y=k$, 很明显 $F(\alpha,k)=G(\mu,k)=k$. 因此, 当 $y\in[0,k]$, 由于 $F(\alpha,y)\leq F(\alpha,k)=k$, 容易得到 $G(F(\alpha,e_1),y)=G(e_1,F(\alpha,y))=F(\alpha,y)$.

  相反, 当
  $$F(\alpha,y)=\begin{cases}G(F(\alpha,e_1),y) & y\in[0,k],\\ G(\mu,y) & y\in[k,1].\end{cases}\tag{3.1.2}$$
  我们的讨论将被分为以下几种情况:

  – 假设 $(x,y)\in[0,k]^2$, 那么可得 $G(F(\alpha,x),y)=G(G(F(\alpha,e_1),x),y)=G(G(x,F(\alpha,e_1)),y)=G(x,G(F(\alpha,e_1),y))=G(x,F(\alpha,y))$.

  – 假设 $(x,y)\in[k,1]^2$, 则 $G(F(\alpha,x),y)=G(G(\mu,x),y)=G(G(x,\mu),y)=G(x,G(\mu,y))=G(x,F(\alpha,y))$.

  – 假设 $(x,y)\in[0,k]\times[k,1]$, 那么 $G(F(\alpha,x),y)=G(G(F(\alpha,e_1),x),y)=G(x,G(F(\alpha,e_1),y))$ 以及 $G(x,F(\alpha,y))=G(x,G(\mu,y))=G(y,G(\mu,x))$. 注意到 $G(F(\alpha,e_1),y)\geq G(F(\alpha,e_1),k)=k$. 那么由于 $G\in C^k$ 的结构, 可得 $G(x,G(F(\alpha,e_1),y))=k=G(y,G(\mu,x))=G(y,k)=k$.

  – 假设 $(y,x)\in[0,k]\times[k,1]$, 那么, 此时将有 $G(F(\alpha,x),y)=G(G(\mu,x),y)=G(x,G(\mu,y))$ 且 $G(x,F(\alpha,y))=G(x,G(F(\alpha,e_1),y))=G(y,G(F(\alpha,e_1),x))$. 通过 $G\in C^k$ 的结构, 可得 $G(F(\alpha,e_1),x)\geq G(F(\alpha,e_1),k)=k$, 进一步地, 容易发现 $G(x,G(\mu,y))=G(x,k)=k=G(y,G(F(\alpha,e_1),x))$.

□

注记3.1.2. 对于上面的定理 *3.1.1 (ii)*, 一致模在三角余模上的迁移性已经在文献 *[25, 26]* 中被 Mas 等人研究了.

类似于定理 3.1.1, 对于情况 (c) $\alpha\in(\nu,1)$, 我们可以得到下面的定理.

定理3.1.3. 考虑 $G\in C^k$ 且 $F\in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu<\nu$. 如果 $\alpha\in(\nu,1)$, 那么如下的叙述成立.

(i) 如果 $k<e_2\leq\nu$, 那么 G 不是 (α,F)-迁移的.

(ii) 如果 $k\leq\nu<e_2$, 那么 G 是 (α,F)-迁移的当且仅当 $\nu=k$ 并且 U_2 是 $(\frac{\alpha-k}{1-k},T_F)$-迁移的.

(iii) 如果 $\nu<k<e_2$, 那么 G 是 (α,F)-迁移的当且仅当
$$F(\alpha,y)=\begin{cases}G(\nu,y) & y\in[0,k],\\ G(F(\alpha,e_2),y) & y\in[k,1].\end{cases}\tag{3.1.3}$$

注记3.1.4. *对于上面的定理 3.1.3 (ii), 一致模在三角模上的迁移性已经在文献 [25, 26] 中得到了研究.*

最后, 我们来讨论 $\alpha \in [\mu, \nu]$ 的情况.

定理3.1.5. *考虑 $G \in C^k$ 且 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$. 如果 $\alpha \in [\mu, \nu]$, 那么 G 是 (α, F)-迁移的当且仅当 $\alpha = k$.*

证明. 首先, 让我们断言 $\alpha > k$ 是不成立的. 否则, 由于 G 是 (α, F)-迁移的, 可得 $\alpha = G(\alpha, e_2) = G(F(\alpha, k), e_2) = G(k, F(\alpha, e_2)) = G(k, \alpha) = k$. 但是这与 $\alpha > k$ 的假设相违背. 此外, 我们表明 $\alpha < k$ 也是不可能的. 事实上, 通过 G 是 (α, F)- 迁移的, 可得 $\alpha = G(\alpha, e_1) = G(F(\alpha, k), e_1) = G(k, F(\alpha, e_1)) = G(k, \alpha) = k$, 这也与假设 $\alpha < k$ 相矛盾. 因此, $\alpha = k$ 是必然成立的.

相反, 当 $\alpha = k$, 我们通过一个简单的计算可以得到 G 是 (α, F)-迁移的.

□

在下面的讨论中, 我们规定 G 属于剩余的四种 2-一致模类, 即, $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$.

§3.2 $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$

在这里, 通过 α 和 μ, ν 之间的序关系, 我们将讨论分为以下几种情况: (a) $\alpha \in (0, \mu)$; (b) $\alpha \in [\mu, \nu]$; (c) $\alpha \in (\nu, 1)$. 现在, 我们开始讨论情况 (a) $\alpha \in (0, \mu)$.

定理3.2.1. *考虑 $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 且 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$. 如果 $\alpha \in (0, \mu)$, 那么如下叙述成立.*

(i) *如果 $\mu \le e_1 < k$, 那么 G 不是 (α, F)-迁移性.*

(ii) *如果 $e_1 < \mu \le k$, 那么 G 不是 (α, F)-迁移性.*

(iii) *如果 $e_1 < k < \mu$, 那么 G 是 (α, F)-迁移的当且仅当 $e_2 > \mu$ 并且*

$$F(\alpha, y) = \begin{cases} G(F(\alpha, e_1), y) & y \in [0, k], \\ G(\mu, y) & y \in [k, 1]. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

证明. 让我们逐一证明这些结论.

- 假设 $\mu \le e_1 < k$. 类似于 $G \in C^k$ 在定理 3.1.1 (i) 的证明过程, 可得 $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 不是 (α, F)-迁移的.
- 假设 $e_1 < \mu \le k$ 且 G 是 (α, F)-迁移的. 我们分两个步骤讨论这种子情况:
  - 假设 $G \in C_k^0$. 考虑 $\alpha \in (0, \mu)$, 通过 $e_1 < \mu \le k$, 我们有 $G(F(\alpha, 0), 1) = G(\alpha, 1) \in \{\alpha, k\}$. 然而, 通过 C_k^0 的结构, 可以发现 $G(0, F(\alpha, 1)) = G(0, \mu) = 0$ 是成立的. 但是这就和 $\alpha \neq 0$ 以及 $k \neq 0$ 的前提相矛盾.

– 对于另外三种情况, 即, $G \in C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$. 由于 $G(x,y) = \max\{x,y\}$ 对于任意 $(x,y) \in [e_1,k] \times (e_2,1]$ 并且 $F(\alpha,e_1) \in [e_1,k]$, 很容易得到 $G(F(\alpha,e_1),1) = \max\{F(\alpha,e_1),1\} = 1$. 在另一方面, 也有 $G(e_1,F(\alpha,1)) = G(e_1,\mu) = \mu$, 这就和 $\mu \neq 1$ 相违背.

- 假设 $e_1 < k < \mu$. 类似于定理 3.1.1 (iii) 中的情况 $G \in C^k$, 对于这里的四种 2-一致模类的情况, 我们发现必要性都是成立的. 反之, 可以通过简单的计算得出充分性也是成立的.

□

与上述结果类似, 我们可以得到以下定理.

定理3.2.2. *考虑 $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 且 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$. 如果 $\alpha \in (\nu,1)$, 那么如下的叙述成立.*

(i) *如果 $k < e_2 \leq \nu$, 那么 G 不是 (α,F)-迁移的.*

(ii) *如果 $k \leq \nu < e_2$, 那么 G 不是 (α,F)-迁移的.*

(iii) *如果 $\nu < k < e_2$, 那么 G 是 (α,F)-迁移的当且仅当 $e_1 < \nu$ 并且*

$$F(\alpha,y) = \begin{cases} G(\nu,y) & y \in [0,k], \\ G(F(\alpha,e_2),y) & y \in [k,1]. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

最后, 我们将研究情况 (b) $\alpha \in [\mu,\nu]$.

定理3.2.3. *考虑 $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 且 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\mu < \nu$. 如果 $\alpha \in [\mu,\nu]$, 那么 G 不是 (α,F)-迁移的.*

证明. 假设 $G \in C_k^0 \cup C_1^0 \cup C_k^1 \cup C_0^1$ 且 G 是 (α,F)-迁移的. 那么当 $\alpha \in [\mu,\nu]$ 且满足 $\alpha \leq k$, 容易发现 $\alpha = G(\alpha,e_1) = G(F(\alpha,y),e_1) = G(y,F(\alpha,e_1)) = G(y,\alpha) = G(\alpha,y)$. 此外, 当 $\alpha \in [\mu,\nu]$ 且满足 $\alpha > k$ 时, 也有 $\alpha = G(\alpha,e_2) = G(F(\alpha,y),e_2) = G(y,F(\alpha,e_2)) = G(y,\alpha) = G(\alpha,y)$. 这两个事实意味着, 当 $\alpha \in [\mu,\nu]$ 并且 G 是 (α,F)-迁移的时候, 有 $\alpha = G(\alpha,y)$ 对于任意 $y \in [0,1]$. 接下来, 为了完成证明, 我们需要考虑以下几种情况:

- 如果 $G \in C_k^0 \cup C_1^0$. 通过 $G \in C_k^0 \cup C_1^0$ 的结构, 可得 $G(x,y) = \min\{x,y\}$ 对于任意 $(x,y) \in [0,1] \times [0,e_1)$. 也就是说, 我们有 $\alpha = G(\alpha,0) = 0$ 对于任意 $\alpha \in [0,1]$, 并且很明显对于所有 $\alpha \in [\mu,\nu]$, 这个结论是正确的, 这与 $\alpha \neq 0$ 相矛盾.

- 如果 $G \in C_k^1 \cup C_0^1$. 通过 $G \in C_k^1 \cup C_0^1$ 的结构, 可得 $G(x,y) = \max\{x,y\}$ 对于任意 $(x,y) \in [0,1] \times (e_2,1]$. 因此, 我们也有 $\alpha = G(\alpha,1) = 1$ 对于任意 $\alpha \in [0,1]$, 并且这个结论对于所有 $\alpha \in [\mu,\nu]$ 也是很明显的, 这就和 $\alpha \neq 1$ 相违背.

综上所述, 我们得到了期望的结论. □

接下来, 让我们分析和研究在 $F \in F_{\mu,\nu}$ 满足 $\nu < \mu$ 的情况下 2-一致模在半-t-算子上的迁移性.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/315032240313011033