

江西省南昌市南昌一中等三校重点中学 2024 届高三下学期复习检测试题一(一模)数学

试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 满足 $f\left(-\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$, 当 $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ 时, $f(x)=\ln\left(x^2-x+1\right)$,

则函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 6]$ 上的零点个数是 ()

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

2. 要得到函数 $y=\sqrt{3} \sin \left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y=\sqrt{3} \sin \left(2 x-\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标 ()

A. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

B. 伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向左平移 $\frac{5 \pi}{24}$ 个单位长度

D. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\frac{11 \pi}{24}$ 个单位长度

3. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题: 在下雨时, 用一个圆台形的天池盆接雨水. 天池盆盆口直径为二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸. 若盆中积水深九寸, 则平地降雨量是 (注: ①平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积; ②一尺等于十寸; ③台体的体积公式 $V=\frac{1}{3}\left(S_{\text{上}}+\sqrt{S_{\text{上}} S_{\text{下}}}+S_{\text{下}}\right) \cdot h$).

- A. 2 寸 B. 3 寸 C. 4 寸 D. 5 寸

4. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为矩形, $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E 在线段 BC 上, 以 AD 为直径的圆过点 E . 若 $SA=\sqrt{3} AB=3$, 则 $\triangle SED$ 的面积的最小值为 ()

- A. 9 B. 7 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

5. 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 k , 使直线 $y=k(x+3)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6. 已知 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \in [-4, 0]$, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

7. 已知 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + a}$ 是定义在 R 上的奇函数, 则不等式 $f(x-3) < f(9-x^2)$ 的解集为 ()

- A. $(-2, 6)$ B. $(-6, 2)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-3, 4)$

8. “ $a \leq 0$ ” “是函数 $f(x) = [(ax-1)x]$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 音乐, 是用声音来展现美, 给人以听觉上的享受, 熔铸人们的美学趣味. 著名数学家傅立叶研究了乐声的本质, 他证明了所有的乐声都能用数学表达式来描述, 它们是一些形如 $a \sin bx$ 的简单正弦函数的和, 其中频率最低的一项是基本音, 其余的为泛音. 由乐声的数学表达式可知, 所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍, 称为基本音的谐波. 下列函数中不能与函数 $y = 0.06 \sin 180000t$ 构成乐音的是 ()

- A. $y = 0.02 \sin 360000t$ B. $y = 0.03 \sin 180000t$ C. $y = 0.02 \sin 181800t$
D. $y = 0.05 \sin 540000t$

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = -x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$ C. $(-\infty, 7]$ D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

11. 若 $(x^2 + a)\left(\frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式中的常数项为 -12, 则实数 a 的值为 ()

- A. -2 B. -3 C. 2 D. 3

12. 已知 $a + bi$ ($a, b \in R$) 是 $\frac{1+i}{1-i}$ 的共轭复数, 则 $a + b =$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + ay - 5 = 0$ 经过抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点, 则抛物线 E 的准线与圆 C

相交所得弦长是_____.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $a_1 = 2$, $3S_n = (n+m)a_n (n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{R})$, 且 $a_n b_n = n+1$. 若任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \leq T_{2n} - T_n$ 成立, 则实数 λ 的取值范围为_____.

15. 能说明“在数列 $\{a_n\}$ 中, 若对于任意的 $m, n \in \mathbb{N}^+$, $a_{m+n} > a_m + a_n$, 则 $\{a_n\}$ 为递增数列”为假命题的一个等差数列是_____. (写出数列的通项公式)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$, $a = 8$, $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$, 则 $c =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 e^{3x}$

(1) 若 $x < 0$, 求证: $f(x) < \frac{1}{9}$;

(2) 若 $x > 0$, 恒有 $f(x) \geq (k+3)x + 2\ln x + 1$, 求实数 k 的取值范围.

18. (12 分) 若正数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 求 $\frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2}$ 的最小值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$, 其中 $m \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $m > 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的最大值.

20. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 M 的特征值及其相应的特征向量.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = |x+1| + |2x-1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 a , 且 $x+y+z=a$, 求 $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2$ 的最小值.

22. (10 分) 在极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbb{R})$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立平面直

角坐标系, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \alpha, \\ y = 1 + \cos 2\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$, 求直线 l 与曲线 C 的交点 P 的直角坐标.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，满足 $f\left(-\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$ ，可得函数 $f(x)$ 的周期为 3，再由奇函数的性质结

合已知可得 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=f(-1)=f(0)=f(1)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ ，利用周期性可得函数 $f(x)$ 在区间 $[0,6]$ 上的零点个数。

【详解】

$\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，满足 $f\left(-\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$ ， $\therefore f\left(-\frac{3}{2}+x+\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+x+\frac{3}{2}\right)$ ，可得

$$f(x+3)=f(x),$$

函数 $f(x)$ 的周期为 3，

$\because$ 当 $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ 时， $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ ，

令 $f(x) = 0$ ，则 $x^2 - x + 1 = 1$ ，解得 $x = 0$ 或 1，

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，

$\therefore$ 在区间 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 上，有 $f(-1) = -f(1) = 0$ ， $f(0) = 0$ 。

由 $f\left(-\frac{3}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$ ，取 $x=0$ ，得 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$ ，得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ ，

$\therefore f\left(-\frac{3}{2}\right)=f(-1)=f(0)=f(1)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ 。

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数，

$\therefore$ 方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,6]$ 上的解有 $0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, \frac{9}{2}, 5, 6$ 。共 9 个，

故选 D。

【点睛】

本题考查根的存在性及根的个数判断，考查抽象函数周期性的应用，考查逻辑思维能力与推理论证能力，属于中档题.

2、B

【解析】

分析：根据三角函数的图象关系进行判断即可。

详解：将函数 $y = \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），

得到 $y = \sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2} \times 2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $y = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ ，

故选 B.

点睛：本题主要考查三角函数的图象变换，结合 ω 和 φ 的关系是解决本题的关键。

3、B

【解析】

试题分析：根据题意可得平地降雨量 $= \frac{\frac{1}{3} \times 9 \times (10^2 \pi + \sqrt{10^2 \pi \times 6^2 \pi} + 6^2 \pi)}{14^2 \pi} = 3$ ，故选 B.

考点：1.实际应用问题；2.圆台的体积.

4、C

【解析】

根据线面垂直的性质以及线面垂直的判定，根据勾股定理，得到 BE, EC 之间的等量关系，再用 BE, EC 表示出 $n SED$ 的面积，利用均值不等式即可容易求得.

【详解】

设 $BE = x$ ， $EC = y$ ，则 $BC = AD = x + y$.

因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $ED \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $SA \perp ED$.

又 $AE \perp ED$ ， $SA \cap AE = A$ ，所以 $ED \perp$ 平面 SAE ，则 $ED \perp SE$.

易知 $AE = \sqrt{x^2 + 3}$ ， $ED = \sqrt{y^2 + 3}$.

在 $Rt\triangle AED$ 中， $AE^2 + ED^2 = AD^2$ ，

即 $x^2 + 3 + y^2 + 3 = (x + y)^2$ ，化简得 $xy = 3$.

在 $Rt\triangle SED$ 中， $SE = \sqrt{x^2 + 12}$ ， $ED = \sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{\frac{9}{x^2} + 3}$.

$$\text{所以 } S_{\triangle SED} = \frac{1}{2} SE \cdot ED = \frac{1}{2} \sqrt{3x^2 + \frac{108}{x^2} + 45}.$$

$$\text{因为 } 3x^2 + \frac{108}{x^2} \geq 2\sqrt{3x^2 \cdot \frac{108}{x^2}} = 36,$$

$$\text{当且仅当 } x = \sqrt{6}, y = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时等号成立, 所以 } S_{\triangle SED} \geq \frac{1}{2} \sqrt{36 + 45} = \frac{9}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查空间几何体的线面位置关系及基本不等式的应用，考查空间想象能力以及数形结合思想，涉及线面垂直的判定和性质，属中档题.

5、C

【解析】

根据直线与圆相交，可求出 k 的取值范围，根据几何概型可求出相交的概率.

【详解】

因为圆心 (0,0)，半径 $r=1$ ，直线与圆相交，所以

$$d = \frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}} \leq 1, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq k \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{所以相交的概率 } P = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

本题主要考查了直线与圆的位置关系，几何概型，属于中档题.

6、D

【解析】

$$\text{设 } \vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}, \text{ 可得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{m} - 2\vec{a}^2 \in [-4, 0], \text{ 构造 } (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{m})^2 \leq 2 + \frac{1}{16}\vec{m}^2, \text{ 结合 } |\vec{m}| = 2, \text{ 可得}$$

$$\left| \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{m} \right| \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right], \text{ 根据向量减法的模长不等式可得解.}$$

【详解】

$$\text{设 } \vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}, \text{ 则 } |\vec{m}| = 2,$$

$$\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{a}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{m} - 2\vec{a}^2 \in [-4, 0],$$

$$\therefore \left(a - \frac{1}{4}m\right)^2 = a^2 - \frac{1}{2}a \cdot m + \frac{1}{16}m^2 \leq 2 + \frac{1}{16}m^2$$

$$|\dot{m}|^2 = \dot{m}^2 = 4, \text{ 所以可得: } \frac{\dot{m}^2}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\text{配方可得 } \frac{1}{2} = \frac{1}{8}m^2 \leq 2\left(a - \frac{1}{4}m\right)^2 \leq 4 + \frac{1}{8}m^2 = \frac{9}{2},$$

$$\text{所以 } \left|a - \frac{1}{4}m\right| \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$$

$$\text{又 } \left|a - \frac{1}{4}m\right| \leq \left|a - \frac{1}{4}m\right| \leq \left|a\right| + \left|\frac{1}{4}m\right|$$

$$\text{则 } |a| \in [0, 2].$$

故选: D.

【点睛】

本题考查了向量的运算综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

7、C

【解析】

由奇函数的性质可得 $a=1$, 进而可知 $f(x)$ 在 R 上为增函数, 转化条件得 $x-3 < 9-x^2$, 解一元二次不等式即可得解.

【详解】

因为 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + a}$ 是定义在 R 上的奇函数, 所以 $f(1) + f(-1) = 0$,

$$\text{即 } \frac{e-1}{e+a} + \frac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+a} = 0, \text{ 解得 } a=1, \text{ 即 } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1},$$

易知 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

又 $f(x-3) < f(9-x^2)$, 所以 $x-3 < 9-x^2$, 解得 $-4 < x < 3$.

故选: C.

【点睛】

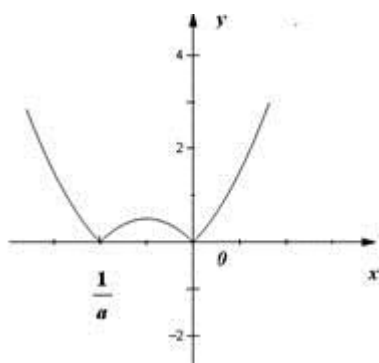
本题考查了函数单调性和奇偶性的应用, 考查了一元二次不等式的解法, 属于中档题.

8、C

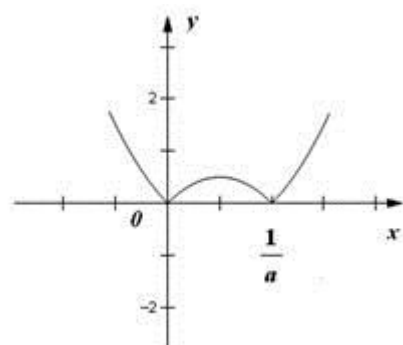
【解析】

$$f(x) = |(ax-1)x| = |ax^2 - x|, \text{ 令 } ax^2 - x = 0, \text{ 解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{a}$$

当 $a \leq 0$ ， $f(x)$ 的图像如下图



当 $a > 0$ ， $f(x)$ 的图像如下图



由上两图可知，是充要条件

【考点定位】考查充分条件和必要条件的概念，以及函数图像的画法.

9、C

【解析】

由基本音的谐波的定义可得 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 利用 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 可得 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 即可判断选项.

【详解】

由题, 所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍, 称为基本音的谐波,

由 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, 可知若 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则必有 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

故选:C

【点睛】

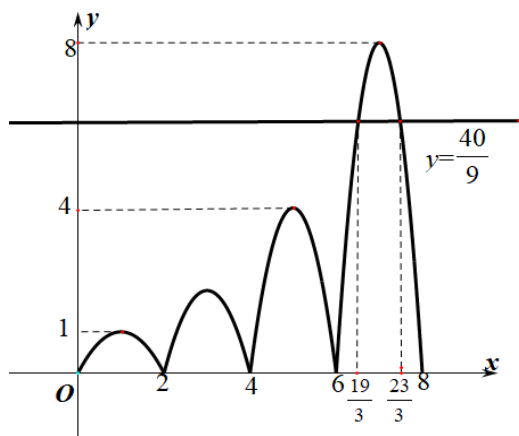
本题考查三角函数的周期与频率, 考查理解分析能力.

10、B

【解析】

求出 $f(x)$ 在 $x \in (2n, 2n+2]$ 的解析式, 作出函数图象, 数形结合即可得到答案.

【详解】



当 $x \in (2n, 2n+2]$ 时, $x-2n \in (0, 2]$, $f(x) = 2^n f(x-2n) = -2^n(x-2n)(x-2n-2)$,

$f(x)_{\max} = 2^n$, 又 $4 < \frac{40}{9} < 8$, 所以 m 至少小于 7, 此时 $f(x) = -2^3(x-6)(x-8)$,

令 $f(x) = \frac{40}{9}$, 得 $-2^3(x-6)(x-8) = \frac{40}{9}$, 解得 $x = \frac{19}{3}$ 或 $x = \frac{23}{3}$, 结合图象, 故 $m \leq \frac{19}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查不等式恒成立求参数的范围, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

11、C

【解析】

先研究 $\left(\frac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式的通项, 再分 (x^2+a) 中, 取 x^2 和 a 两种情况求解.

【详解】

因为 $\left(\frac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r C_5^r x^{r-5}$,

所以 $(x^2+a)\left(\frac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式中的常数项为: $x^2(-1)^3 C_5^3 x^{-2} + a C_5^0 (-1) = -10 - a = -12$,

解得 $a = 2$,

故选: C.

【点睛】

本题主要考查二项式定理的通项公式, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题.

12、A

【解析】

先利用复数的除法运算法则求出 $\frac{1+i}{1-i}$ 的值, 再利用共轭复数的定义求出 $a+bi$, 从而确定 a, b 的值, 求出 $a+b$.

【详解】

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

$$\therefore a+bi = -i,$$

$$\therefore a=0, b=-1,$$

$$\therefore a+b = -1,$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了复数代数形式的乘除运算，考查了共轭复数的概念，是基础题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13、 $4\sqrt{6}$

【解析】

求出抛物线的焦点坐标，代入圆的方程，求出 a 的值，再求出准线方程，利用点到直线的距离公式，求出弦心距，利用勾股定理可以求出弦长的一半，进而求出弦长.

【详解】

抛物线 E: $x^2 = 4y$ 的准线为 $y = -1$ ，焦点为 $(0, 1)$ ，把焦点的坐标代入圆的方程中，得 $a = 4$ ，所以圆心的坐标为 $(-4, -2)$ ，半径为 5，则圆心到准线的距离为 1，

$$\text{所以弦长} = 2\sqrt{5^2 - 1^2} = 4\sqrt{6}.$$

【点睛】

本题考查了抛物线的准线、圆的弦长公式.

14、 $\lambda \leq \frac{1}{2}$

【解析】

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，可得到 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$ ，再用累乘法求出 a_n ，再求出 b_n ，根据定义求出 T_n ，再借助单调性求解.

【详解】

解：当 $n = 1$ 时， $3S_1 = (1+m)a_1 = 3a_1$ ，则 $m = 2$ ， $3S_n = (n+2)a_n$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $3S_{n-1} = (n+1)a_{n-1}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/315132024321012000>