第 01 讲 探索勾股定理

模块导航

模块一　思维导图串知识

模块二　基础知识全梳理（吃透教材）

模块三　核心考点举一反三

模块四　小试牛刀过关测

素养目标

1．掌握勾股定理，了解利用拼图验证勾股定理的方法；

2．会借助勾股定理确定数轴上表示无理数的点，理解实数与数轴上的点一一对应关系；

3．能够从实际问题中抽象出直角三角形，并能运用勾股定理进行有关的计算和证明。

模块一 思维导图串知识

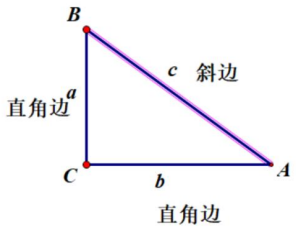


模块二 基础知识全梳理

知识点 01 勾股定理

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

如图：直角三角形 ABC 的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.



注意：（1）勾股定理揭示了一个直角三角形三边之间的数量关系.

（2）利用勾股定理，当设定一条直角边长为未知数后，根据题目已知的线段长可以建立方程求解，这样就将数与形有机地结合起来，达到了解决问题的目的.

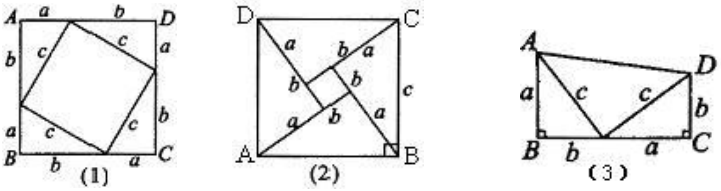
（3）理解勾股定理的一些变式：$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$，$c^2=(a+b)^2-2ab$.

运用：1. 已知直角三角形的任意两条边长，求第三边；

2.用于解决带有平方关系的证明问题；

3.利用勾股定理，作出长为$\sqrt{n}$的线段

知识点 02 勾股定理证明



（1）邹元治证法（内弦图）：将四个全等的直角三角形拼成如图**（1）**所示的正方形.

图**（1）**中$S_{正方形ABCD}=(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，所以$a^2+b^2=c^2$.

（2）赵爽弦图（外弦图）：将四个全等的直角三角形拼成如图**（2）**所示的正方形.

图**（2）**中$S_{正方形ABCD}=c^2=(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab$，所以$c^2=a^2+b^2$.

（3）总统证法：如图**（3）**所示，将两个直角三角形拼成直角梯形.

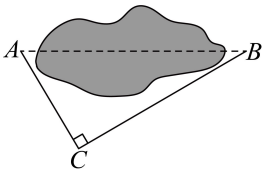
$S_{梯形ABCD}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，所以$a^2+b^2=c^2$.

模块三 核心考点举一反三

考点一：已知直角三角形的两边，求第三边长

例 1.（22-23 八年级上·福建泉州·期末）一直角三角形的两直角边长分别为 5 和 12，则斜边的长是_____.

【变式 1-1】（23-24 八年级下·吉林松原·期中）如图，原来从 A 村到 B 村，需要沿路 $A\to C\to B$（$\angle C=90°$）绕过两地间的一片湖，在 A、B 间建好桥后，就可直接从 A 村到 B 村．若 $AC=5\text{km},BC=12\text{km}$，那么建好桥后从 A 村到 B 村比原来减少的路程为_____km.



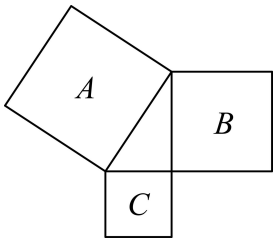
【变式 1-2】（23-24 八年级下·河南新乡·期中）在直角 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$，则 BC 的长为_____

【变式 1-3】（23-24 七年级下·安徽马鞍山·期中）若一个直角三角形的两边长为 9 和 12，则这个三角形的斜边长为_____.

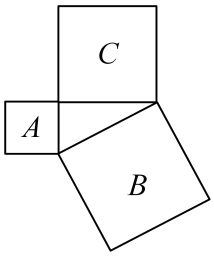
考点二：以直角三角形三边为边长的图形面积

例 2.（23-24 八年级下·湖南湘西·期中）如图所示，如果正方形 A 的面积为 625，正方形 B 的面积为

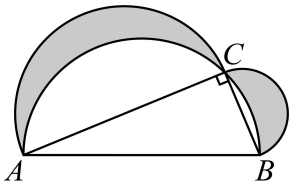
400，则正方形 C 的边长为_____.



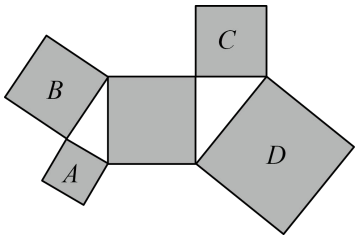
【变式 2-1】（23-24 七年级下·黑龙江大庆·期中）如图，正方形 A,B,C 的边长分别为直角三角形的三边长，若正方形 A,B 的边长分别为 4 和 8，则正方形 C 的面积为_____.



【变式 2-2】（23-24 八年级下·黑龙江大庆·期中）如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，分别以 AB、BC、AC 为直径作半圆，图中阴影部分图形称为“希波克拉底月牙”. 当 $AB=13$，$BC=5$ 时，则阴影部分的面积为____.

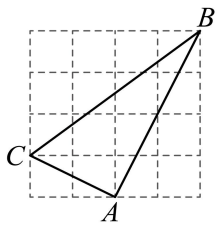


【变式 2-3】（2024·四川成都·二模）如图，所有阴影部分的四边形都是正方形，所有三角形都是直角三角形，若正方形 A、B、D 的面积依次为 5、13、30，则正方形 C 的面积为_____.

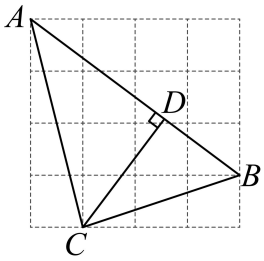


考点三：等面积法求直接斜边上的高问题

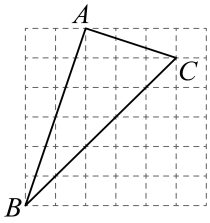
例 3.（23-24 八年级下·湖北武汉·期中）在如图的网格中，小正方形的边长均为 1，A、B、C 三点均在正方形格点上，则点 A 到直线 BC 的距离是_____.



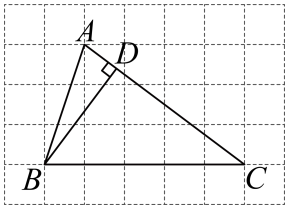
【变式 3-1】（23-24 八年级下·黑龙江哈尔滨·阶段练习）如图，$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 在边长为1的正方形网格的格点上，$CD\perp AB$ 于点 D．则 CD 的长为_____.



【变式 3-2】（23-24 八年级下·浙江金华·阶段练习）如图，在 6×6 的正方形网格中，每个小正方形的边长均为 1，点 A，B，C 都在格点上，求 BC 边上的高长＝_____.

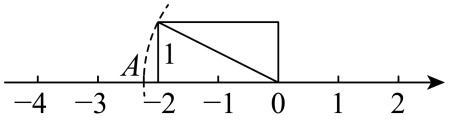


【变式 3-3】（23-24 七年级上·山东泰安·期末）如图所示，$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 在边长为 1 的正方形网格的格点上，$BD\perp AC$ 于点 D，则 BD 的长为_____.



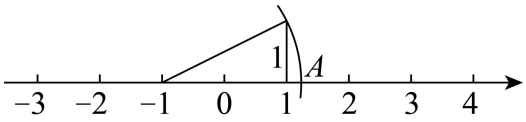
考点四：勾股定理与无理数

例 4.（23-24 八年级下·河南濮阳·期中）如图，点 A 表示的实数是（　　）



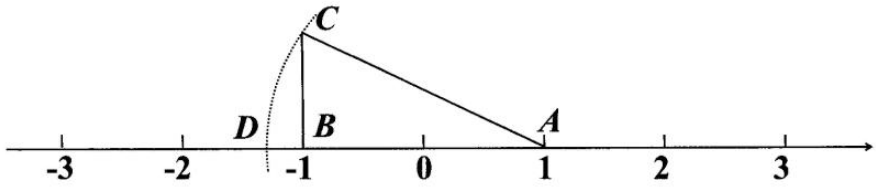
A．$-\sqrt{6}$　　B．$-\sqrt{5}$　　C．1　　D．$1-\sqrt{5}$

【变式 4-1】（23-24 八年级下·湖北黄冈·期中）如图所示：数轴上点 A 所表示的数为 a，则 a 的值是（　　）



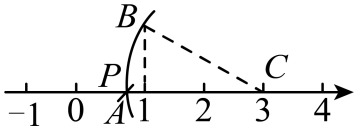
A．$\sqrt{5}+1$　　B．$\sqrt{5}-1$　　C．$-\sqrt{5}+1$　　D．$-\sqrt{5}-1$

【变式 4-2】（23-24 七年级下·山东济宁·期中）如图，数轴上点 A 表示的数是 1，点 B 表示的数是 -1，$CB\perp AB$ 于点 B，且 $BC=1$，以点 A 为圆心，AC 的长为半径画弧，交数轴的负半轴于点 D，则点 D 表示的数是（　　）



A．$\sqrt{3}-1$　　B．$1-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}-1$　　D．$1-\sqrt{5}$

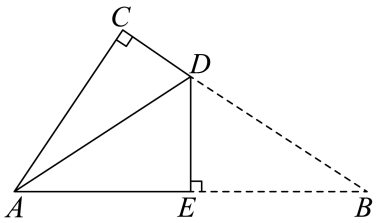
【变式 4-3】（23-24 八年级下·河南信阳·阶段练习）如图的数轴上，点 A，C 对应的实数分别为 1，3，线段 $AB\perp AC$ 于点 A，且 AB 长为 1 个单位长度，若以点 C 为圆心，BC 长为半径的弧交数轴于 0 和 1 之间的点 P，则点 P 表示的实数为（　）



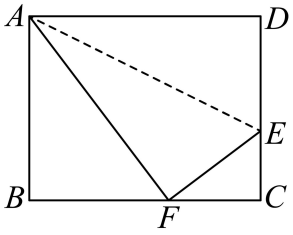
A．$\sqrt{5}-3$　　B．$3-\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{10}-3$　　D．$3-\sqrt{10}$

考点五：勾股定理与折叠问题

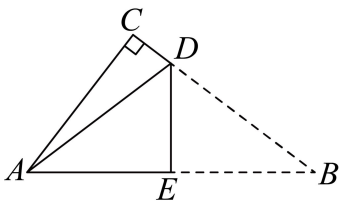
例 5.（23-24 八年级下·黑龙江哈尔滨·阶段练习）如图是一张直角三角形纸片，两直角边 $AC=6$，$BC=8$，将 $\triangle ABC$ 折叠，顶点 B 与点 A 重合，折痕为 DE，则 DE 的长为_____.



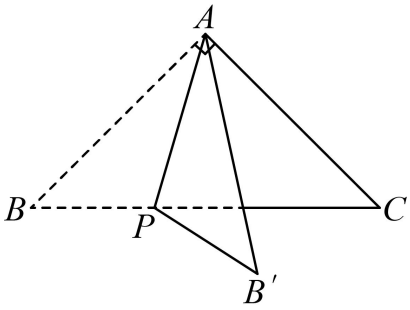
【变式 5-1】（23-24 八年级下·内蒙古通辽·阶段练习）如图已知长方形 $ABCD$ 中 $AB=8\text{cm}$，$BC=10\text{cm}$，在边 CD 上取一点 E，将 $\triangle ADE$ 折叠使点 D 恰好落在 BC 边上的点 F，则 CE 的长为_____.



【变式 5-2】（23-24 八年级下·甘肃平凉·期中）如图所示为一张直角三角形纸片，直角边 $AC=6\text{cm}$，$BC=8\text{cm}$，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，折痕为 DE，则 DB 的长为_____cm.



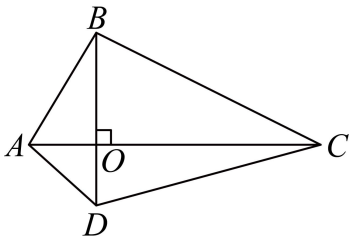
【变式 5-3】（2024 九年级下·江苏徐州·专题练习）如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=\sqrt{2}$，点 P 是边 BC 上任意一点，连接 AP，将 $\triangle ABP$ 沿 AP 翻折，点 B 的对应点为 B'，当 $\triangle APB'$ 有一边与 BC 垂直时，BP 的长为 _____.



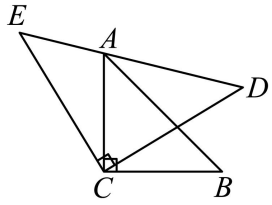
考点六：利用勾股定理求两条线段的平方和（差）

例 6.（23-24 八年级上·江苏盐城·阶段练习）Rt△ABC 中，斜边 $AB=1$，则 $AB^2+BC^2+AC^2$ 的值是_____.

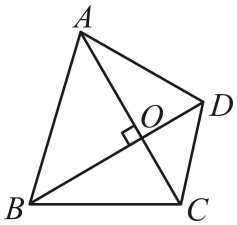
【变式 6-1】（23-24 八年级下·河南郑州·期中）对角线互相垂直的四边形叫做“垂美”四边形，现有如图所示的“垂美”四边形 $ABCD$，对角线 AC，BD 交于点 O，若 $AD=3$，$BC=8$，则 $AB^2+CD^2=$_____.



【变式 6-2】（22-23 八年级下·山西大同·期末）如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，$CA=CB=\frac{5}{2}$，$CE=CD=3$，$\triangle ABC$ 的顶点 A 在 $\triangle ECD$ 的斜边 DE 上，则 AE^2+AD^2 的值为_____.

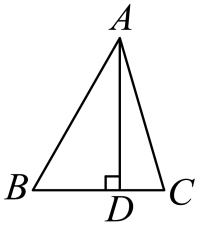


【变式 6-3】（23-24 八年级上·辽宁沈阳·阶段练习）如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O．若 $AC\perp BD$，$AB=4$，$CD=\sqrt{5}$，则 $BC^2+AD^2=$_____.



考点七：利用勾股定理证明线段平方关系

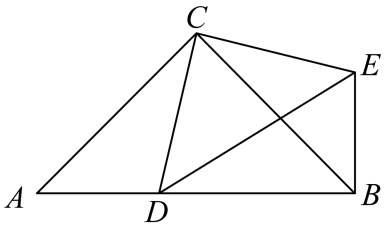
例 7.（23-24 八年级下·安徽蚌埠·期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$.



(1)求证：$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$；

(2)当 $AB = 8$，$BC = 6$，$AC = 2\sqrt{13}$ 时，求 AD 的值.

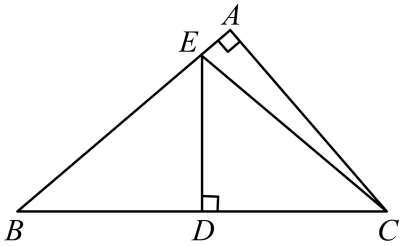
【变式 7-1】（23-24 八年级上·江西吉安·期末）如图，已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 都是等腰直角三角形，其中 $\angle ACB = \angle DCE = 90°$，$D$ 为 AB 边上一点.



(1)试判断 AD 与 BE 的大小关系，并说明理由；

(2)试说明 AD^2, BD^2, DE^2 三者之间的关系.

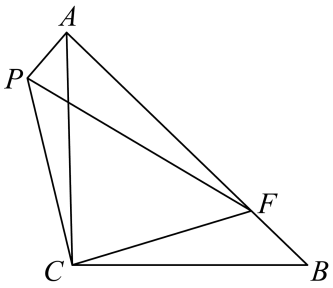
【变式 7-2】（23-24 九年级上·安徽·开学考试）如图，在 Rt△ABC 中，已知 $\angle A = 90°$，D 是斜边 BC 的中点，$DE \perp BC$ 交 AB 于点 E，连接 CE.



(1)求证：$BE^2 - AE^2 = AC^2$；

(2)若 $AC = 6$，$BD = 5$，求 △ACE 的周长.

【变式 7-3】（23-24 八年级上·辽宁沈阳·阶段练习）如图，在等腰 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，点 F 是直线 AB 上一个动点，作等腰 Rt△FCP，且 $\angle PCF=90°$，连接 AP．



(1)找出图中全等三角形_____.

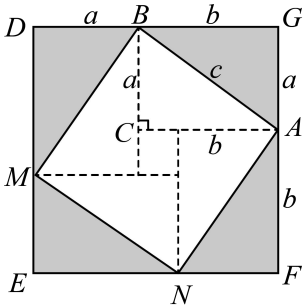
(2)如图求证：$FB^2+AF^2=PF^2$；

(3)若 $AF=\sqrt{2}$，则 $PF=$_____.

考点八：勾股定理的证明方法

例 8.（23-24 八年级下·辽宁葫芦岛·期中）勾股定理是平面几何中一个极为重要的定理，世界上各个文明古国都对勾股定理的发现和研究作出过贡献．特别是定理的证明，据说方法有 400 余种．其中我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出了证明．请你用下面弦图（由四个全等的直角三角形围成的）证明勾股定理：

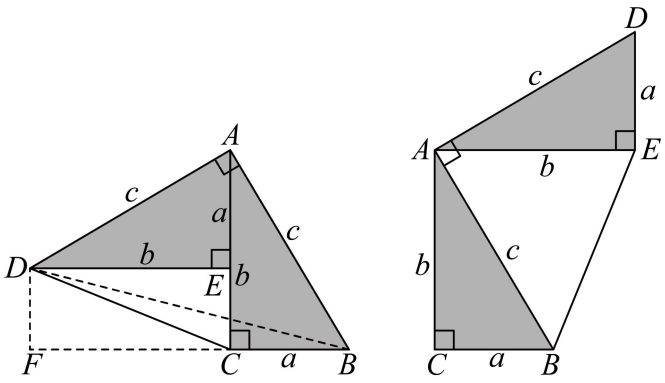
如果直角三角形 ABC 的两条直角边长分别为 a,b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．



【变式 8-1】（23-24 七年级下·全国·假期作业）勾股定理神秘而美妙，它的证法多样，且巧妙各有不同，其中的“面积法”给了小聪以灵感．他惊喜地发现：当两个全等的直角三角形如图（1）或图（2）摆放时，都可以用“面积法”来证明勾股定理．

下面是小聪利用图（1）证明勾股定理的过程：

将两个全等的直角三角形按如图（1）所示摆放，其中 $\angle DAB=90°$．求证：$a^2+b^2=c^2$．

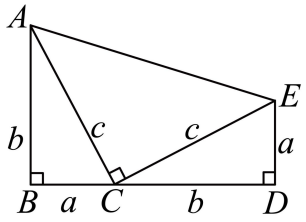


图(1)

图(2)

【变式 8-2】（23-24 八年级下·河南平顶山·期中）数与形是数学中的两个最古老，也是最基本的研究对象．数与形也是有联系的，这种联系称为“数形结合”．利用“数形结合”思想可以直观地帮助我们解决一些数学验证或运算．

(1)我国是最早了解勾股定理的国家之一，该定理阐明了直角三角形的三边关系．请你利用如图对勾股定理（即下列命题）进行验证，从中体会“数形结合”的思想：



已知：如图，在 Rt△ABC 和 Rt△CDE 中，$\angle B=\angle D=\angle ACE=90°$，（点 B，C，D 在一条直线上），$AB=CD=b$，$BC=DE=a$，$AC=EC=c$．

证明：$a^2+b^2=c^2$；

(2)请利用“数形结合”思想，画图并推算出 $(a+b+c)^2$ 的结果．

【变式 8-3】（23-24 八年级下·广西南宁·期中）我国是最早了解勾股定理的国家之一，汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅如图 1 所示“赵爽弦图”（边长为 c 的大正方形中放四个全等的直角三角形，两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c）.

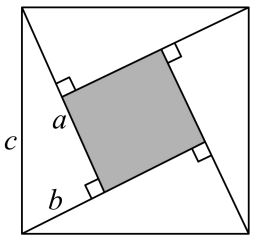


图1

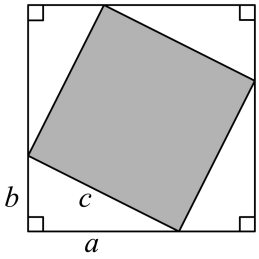


图2

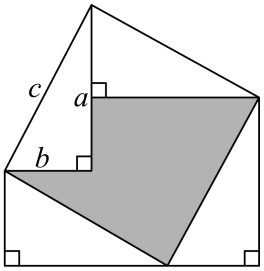


图3

(1)如图 1，请用两种不同方法表示图中空白部分面积.

方法 1：$S_{阴影}=$_____；

方法 2：$S_{阴影}=$_____；

根据以上信息，可以得到等式：_____；

(2)小亮将“弦图”中的 4 个三角形进行了运动变换，得到图 2，请利用图 2 证明勾股定理；

(3)如图 3，将图 2 的 2 个三角形进行了运动变换，若 $a=6$，$b=3$，求阴影部分的面积.

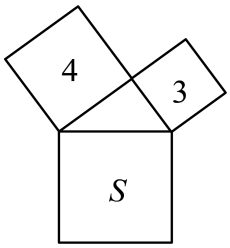
模块四 小试牛刀过关测

一、单选题

1.（2024·福建宁德·二模）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$BC=12$，则 AB 的长是（　）

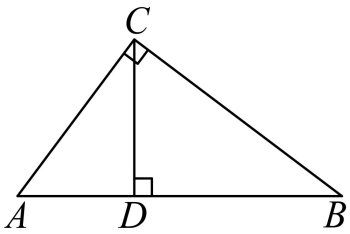
A．$\sqrt{119}$　　B．11　　C．13　　D．17

2.（23-24 八年级下·黑龙江·期中）如图是以直角三角形各边为边在三角形外部画正方形得到的．每个正方形中的数字及字母 S 表示所在正方形的面积，其中 S 的值为（　）



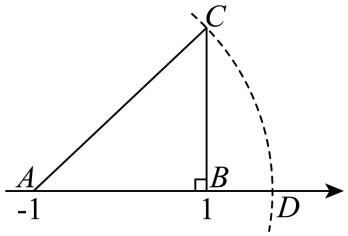
A．6　　B．5　　C．8　　D．7

3．（23-24 八年级下·安徽芜湖·阶段练习）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B=90°$，$AC=6$，$BC=8$，$CD\perp AB$，则 $AD=$（　）



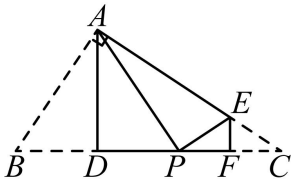
A．$\frac{12}{5}$　　B．$\frac{18}{5}$　　C．$\frac{24}{5}$　　D．$\frac{32}{5}$

4．（23-24 八年级下·广东珠海·期中）如图，数轴上的点 A 表示的数是 -1，点 B 表示的数是 1，$CB\perp AB$ 于点 B，且 $BC=2$，以点 A 为圆心，AC 为半径画弧交数轴于点 D，则点 D 表示的数为（　）



A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$-1+2\sqrt{2}$　　D．$1+2\sqrt{2}$

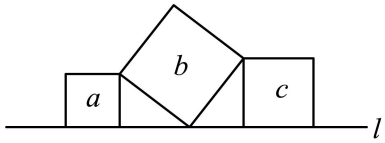
5．（2024·山东烟台·二模）如图，三角形纸片 ABC 中，$\angle BAC=90°, AB=2, AC=3$，沿 AD 和 EF 将纸片折叠，使点 B 和点 C 都落在边 BC 上的点 P 处，则 AE 的长是（　　）



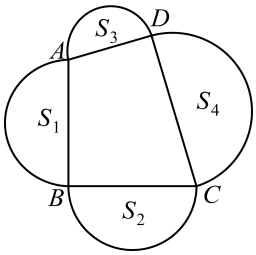
A．$\frac{13}{6}$　　B．$\frac{5}{6}$　　C．$\frac{7}{6}$　　D．$\frac{6}{5}$

二、填空题

6．（23-24 八年级下·北京海淀·期中）如图，直线 l 上有三个正方形 a、b、c，若 a、b 的面积分别为 2 和 5，则 c 的面积为_____.

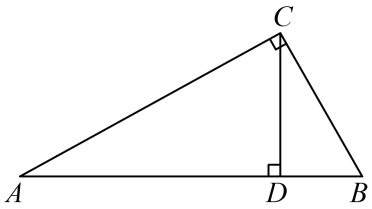


7．（23-24 八年级下·内蒙古呼和浩特·期中）如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，分别以 AB，BC，CD，DA 为直径作半圆，已知各半圆面积为 $S_1=S_2=5$，$S_4=7$，则 $S_3=$_____.

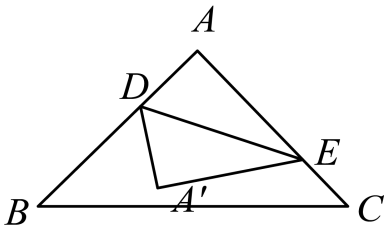


8．（2024·四川内江·二模）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，a，b，c 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，若 $(a-b+c)(a-b-c)=-12$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

9．（2024 八年级下·全国·专题练习）定义：我们把三角形某边上高的长度与这边中点到高的距离的比值称为三角形某边的“中偏度值”. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，CD 是 AB 边上的高，则 $\triangle ABC$ 中 AB 边的“中偏度值”为_____.

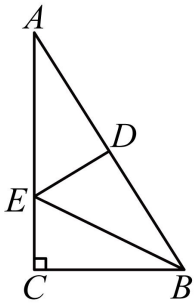


10．（23-24 八年级下·重庆·期中）如图，已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AB=AC=4$，点 E 为 AC 上一点，且 $CE=1$，点 D 为边 AB 上一点，连接 DE，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠得到 $\triangle A'DE$，若 EA' 的延长线恰好经过点 B，则 $AD=$_____.

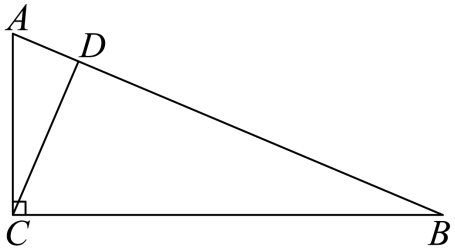


三、解答题

11．（23-24 八年级下·安徽阜阳·阶段练习）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC>BC$，把 $\triangle ABC$ 沿直线 DE 折叠，使点 A 与点 B 重合，若 $\triangle BCE$ 的周长为 28，$AB=20$，求 $\triangle ABC$ 的面积.



12．（23-24 八年级下·甘肃陇南·期中）已知：在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$AC=5$，$BC=12$．求：

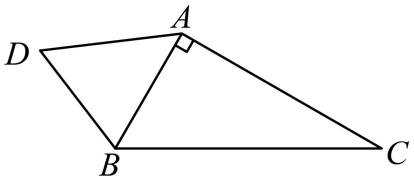


(1)求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2)求线段 AB 的长；

(3)求高 CD 的长．

13．（23-24 七年级下·黑龙江大庆·期中）如图，$\angle BAC=90°, BC=28, AC=14\sqrt{3}$，$BD=13, AD=15$．

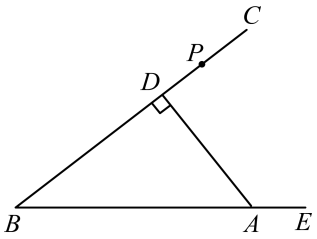


(1)求 AB 的长度；

(2)作 $DH\perp AB$，并求 $\triangle ADB$ 的面积．

14．（23-24 八年级下·河北邢台·期中）如图，已知 BE 为火车道，BC 为公路，A 为火车站（点 A 在射线 BE

上），P 为村庄（点 P 在射线 BC 上），且 $BA=BP$．公路 AD 与公路 BC 垂直，垂足为 D，经测量 $AD=12\text{km}$，$PD=4\text{km}$．



(1)原来 P 村村民需沿 $PD\to DA$ 才能到达火车站，现修通公路 AP，求 P 村村民沿公路 PA 到达火车站，比原来少走多少路；

(2)求 BA 的长；

(3)若在 BC，上修建一个仓库 F，使火车站 A 到仓库 F 的距离为15km，求 BF 的长．

15．（23-24 八年级下·河南新乡·期中）【背景介绍】勾股定理是几何学中的明珠，充满着魅力，如图 1 是著名的赵爽弦图，由四个全等的直角三角形拼成，用它可以证明勾股定理，思路是大正方形的面积有两种求法，一种是等于另一种是等于四个直角三角形与一个小正方形的面积之和，即 $\frac{1}{2}ab\times4+\left(b-a\right)^2$，从而得到等式 $c^2=\frac{1}{2}ab\times4+\left(b-a\right)^2$，化简使得结论 $a^2+b^2=c^2$．这里用两种求法来表示同一个量从而得到等式可方程的方法，我们称之为“双求法”.

【方法运用】千百年来，人们对勾股定理的证明趋之若鹜，其中有著名的数学家，也有业余数学爱好者．向常春在 2010 年构造发现了一个新的证法：把两个全等的 Rt△ABC 和 Rt▽DEA 如图 2 放置，其三边长分别为 a，b，c，$\angle BAC=\angle DEA=90°$，显然 $BC\perp AD$．

（1）请用 a，b，c 分别表示出四边形 $ABDC$，梯形 $AEDC$,△EBD 的面积，再探究这三个图形面积之间的关系，证明勾股定理：$a^2+b^2=c^2$（提示：对角线互相垂直的四边形的面积等于对角线乘积的一半）；

【方法迁移】

（2）如图 3，在△ABC 中，AD 是 BC 边上的高，$AB=4$，$AC=5$，$BC=6$，求 AD 的值．

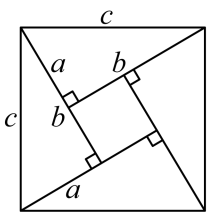


图1

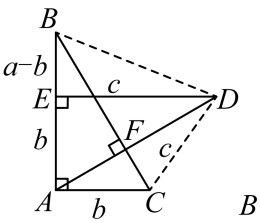


图2

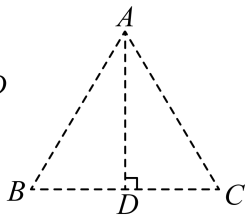


图3

第 01 讲 探索勾股定理

模块导航

模块一　思维导图串知识

模块二　基础知识全梳理（吃透教材）

模块三　核心考点举一反三

模块四　小试牛刀过关测

素养目标

1．掌握勾股定理，了解利用拼图验证勾股定理的方法；

2．会借助勾股定理确定数轴上表示无理数的点，理解实数与数轴上的点一一对应关系；

3．能够从实际问题中抽象出直角三角形，并能运用勾股定理进行有关的计算和证明。

模块一 思维导图串知识

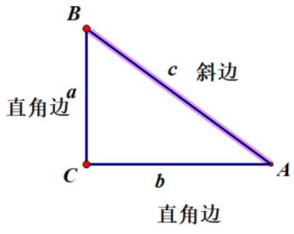


模块二 基础知识全梳理

知识点 01 勾股定理

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

如图：直角三角形 ABC 的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.



注意：（1）勾股定理揭示了一个直角三角形三边之间的数量关系.

（2）利用勾股定理，当设定一条直角边长为未知数后，根据题目已知的线段长可以建立方程求解，这样就将数与形有机地结合起来，达到了解决问题的目的.

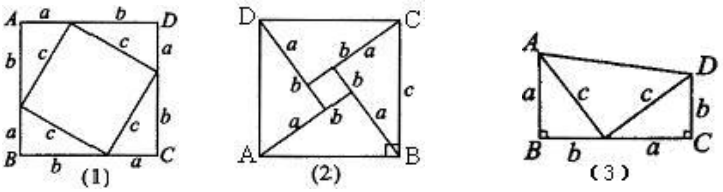
（3）理解勾股定理的一些变式：$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$，$c^2=(a+b)^2-2ab$.

运用：1. 已知直角三角形的任意两条边长，求第三边；

2.用于解决带有平方关系的证明问题；

3.利用勾股定理，作出长为$\sqrt{n}$的线段

知识点 02 勾股定理证明



（1）邹元治证法（内弦图）：将四个全等的直角三角形拼成如图（1）所示的正方形.

图（1）中$S_{正方形ABCD}=(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，所以$a^2+b^2=c^2$.

（2）赵爽弦图（外弦图）：将四个全等的直角三角形拼成如图（2）所示的正方形.

图（2）中$S_{正方形ABCD}=c^2=(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab$，所以$c^2=a^2+b^2$.

（3）总统证法：如图（3）所示，将两个直角三角形拼成直角梯形.

$S_{梯形ABCD}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，所以$a^2+b^2=c^2$.

模块三 核心考点举一反三

考点一：已知直角三角形的两边，求第三边长

例 1.（22-23 八年级上·福建泉州·期末）一直角三角形的两直角边长分别为 5 和 12，则斜边的长是_____.

【答案】13

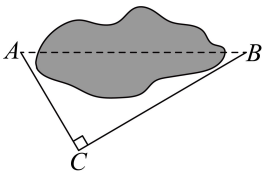
【分析】本题主要考查了勾股定理，根据直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方进行求解即可.

【详解】解：∵一直角三角形的两直角边长分别为 5 和 12，

∴该直角三角形的斜边长为$\sqrt{5^2+12^2}=13$，

故答案为：13.

【变式 1-1】（23-24 八年级下·吉林松原·期中）如图，原来从 A 村到 B 村，需要沿路 $A\to C\to B$（$\angle C=90°$）绕过两地间的一片湖，在 A、B 间建好桥后，就可直接从 A 村到 B 村．若 $AC=5\text{km}, BC=12\text{km}$，那么建好桥后从 A 村到 B 村比原来减少的路程为_____km.



【答案】4

【分析】本题考查了勾股定理的应用，熟记勾股定理是解题的关键.

根据勾股定理求出 AB 的长，再和以前的距离作比较即可得出答案.

【详解】解：由勾股定理得，

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13(\text{km})$

∴建好桥后从 A 村到 B 村比原来减少的路程为 $(5+12)-13=4(\text{km})$，

故答案为 4.

【变式 1-2】（23-24 八年级下·河南新乡·期中）在直角 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$，则 BC 的长为_____

【答案】10 或 $2\sqrt{7}$

【分析】本题考查了勾股定理．分 $AB=8$ 是直角边或 $AB=8$ 是斜边两种情况讨论，利用勾股定理求解即可.

【详解】解：当 $AB=8$ 是直角边时，

则 $BC=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

当 $AB=8$ 是斜边时，

则 $BC=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$，

故答案为：10 或 $2\sqrt{7}$.

【变式 1-3】（23-24 七年级下·安徽马鞍山·期中）若一个直角三角形的两边长为 9 和 12，则这个三角形的斜边长为_____.

【答案】12 或 15

【分析】本题考查了勾股定理．注意 12 可能是直角边，也可能是斜边，所以得分两种情况讨论.

【详解】解：当 9 和 12 都是直角边时，

斜边 $=\sqrt{9^2+12^2}=15$；

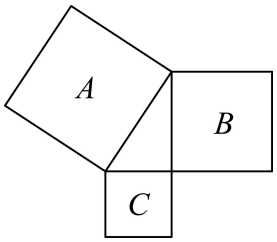
当 9 是直角边，12 是斜边时，

斜边为 12.

故答案为：12 或 15.

考点二：以直角三角形三边为边长的图形面积

例 2.（23-24 八年级下·湖南湘西·期中）如图所示，如果正方形 A 的面积为 625，正方形 B 的面积为 400，则正方形 C 的边长为_____.



【答案】15

【分析】设 A 的边长为 a，B 的边长为 b，C 的边长为 c，根据题意，得 $a^2=625$，$b^2=400$，$c^2=a^2-b^2$，计算即可．

本题考查了勾股定理，正确理解定理是解题的关键．

【详解】解：设 A 的边长为 a，B 的边长为 b，C 的边长为 c，

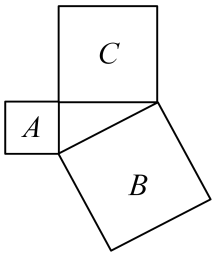
根据题意，得 $a^2=625$，$b^2=400$，$c^2=a^2-b^2$，

$c^2=625-400=225$．

解得 $c=15$．

故答案为：15．

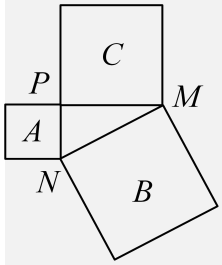
【变式 2-1】（23-24 七年级下·黑龙江大庆·期中）如图，正方形 A,B,C 的边长分别为直角三角形的三边长，若正方形 A,B 的边长分别为 4 和 8，则正方形 C 的面积为_____．



【答案】48

【分析】本题考查勾股定理的应用．由正方形 A,B 的边长分别为 4 和 8 可得中间的直角三角形的一直角边和斜边分别是 4 和 8，再用勾股定理可求另一直角边，即可得出答案．

【详解】解：如图，



∵正方形 A,B 的边长分别为 4 和 8，

∴ $PN=4, MN=8$

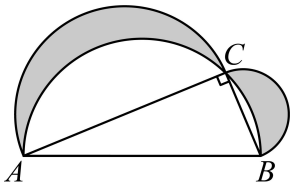
∵ $\triangle PMN$ 是直角三角形，

∴ $PM^2=MN^2-PN^2=64-16=48$

∴正方形 C 的面积 $=PM^2=48$．

故答案为：48．

【变式 2-2】（23-24 八年级下·黑龙江大庆·期中）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，分别以 AB、BC、AC 为直径作半圆，图中阴影部分图形称为“希波克拉底月牙”．当 $AB=13$，$BC=5$ 时，则阴影部分的面积为____．



【答案】30

【分析】本题考查了勾股定理，掌握勾股定理是解题的关键.

首先根据勾股定理求出 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=13$，然后根据阴影部分面积等于以 AC,BC 为直径的 2 个半圆的面积加上 $S_{\triangle ABC}$ 减去 AB 为半径的半圆面积即 $S_{\triangle ABC}$，然后代数求解即可.

【详解】解：∵在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$

∵ $AB=13$，$BC=5$

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=13$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}}=\frac{1}{2}AC\cdot BC+\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}BC\right)^2-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BC+\frac{1}{2}\pi\times\frac{1}{4}\left(AC^2+BC^2-AB^2\right)$$

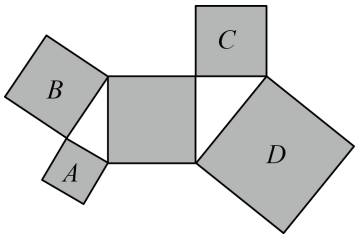
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BC$$

$$=\frac{1}{2}\times12\times5$$

$=30$.

故答案为：30.

【变式 2-3】（2024·四川成都·二模）如图，所有阴影部分的四边形都是正方形，所有三角形都是直角三角形，若正方形 A、B、D 的面积依次为 5、13、30，则正方形 C 的面积为_____.



【答案】12

【分析】本题主要考查了正方形和勾股定理，解题关键是勾股定理的正确应用.

由所有阴影部分的四边形都是正方形，所有三角形都是直角三角形，根据勾股定理得 $S_A+S_B=S_E=S_D-S_C$，由正方形A、B、D的面积依次为5、13、30，得$5+13=30-S_C$，故正方形C的面积为12.

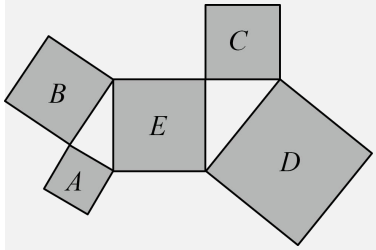
【详解】解：由所有阴影部分的四边形都是正方形，所有三角形都是直角三角形，根据勾股定理得

$S_A+S_B=S_E=S_D-S_C$，

由正方形A、B、D的面积依次为5、13、30，得$5+13=30-S_C$，

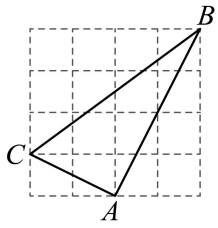
故正方形C的面积为12.

故答案为：12.



考点三：等面积法求直接斜边上的高问题

例3.（23-24八年级下·湖北武汉·期中）在如图的网格中，小正方形的边长均为1，A、B、C三点均在正方形格点上，则点A到直线BC的距离是_____.



【答案】2

【分析】本题考查了网格图的问题，解题关键是正确应用勾股定理．用割补法求出$\triangle ABC$的面积，用勾股定理求出BC的长，然后利用面积法求解即可．

【详解】解：$\triangle ABC$面积$=4\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times3\times4=5$，

由勾股定理得$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

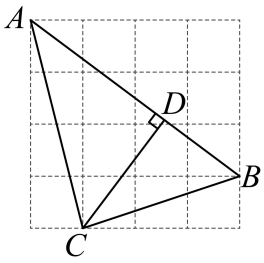
设点A到直线BC的距离是d，

得$\frac{1}{2}\times5\times d=5$，

解得$d=2$．

故答案为：2.

【变式3-1】（23-24八年级下·黑龙江哈尔滨·阶段练习）如图，$\triangle ABC$的顶点A，B，C在边长为1的正方形网格的格点上，$CD\perp AB$于点D．则CD的长为_____.



【答案】$\frac{13}{5}$

【分析】本题考查了勾股定理与网格问题，利用勾股定理求出 AB 的长，利用网格求出 $\triangle ABC$ 的面积，再根据面积法即可求出 CD 的长，利用割补法求出 $\triangle ABC$ 的面积是解题的关键.

【详解】解：由勾股定理可得，$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

由网格可得，$S_{\triangle ABC}=4\times4-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{13}{2}$，

$\because CD\perp AB$，

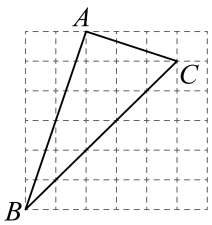
$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times5\times CD=\frac{5}{2}CD$，

$\therefore \frac{5}{2}CD=\frac{13}{2}$，

$\therefore CD=\frac{13}{5}$，

故答案为：$\frac{13}{5}$.

【变式 3-2】（23-24 八年级下·浙江金华·阶段练习）如图，在 6×6 的正方形网格中，每个小正方形的边长均为 1，点 A，B，C 都在格点上，求 BC 边上的高长＝_____.



【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】本题主要考查三角形面积公式，运用分割法求出 $\triangle ABC$ 的面积，运用勾股定理求出 BC 的长，再运用等积法即可求出 BC 边上的高

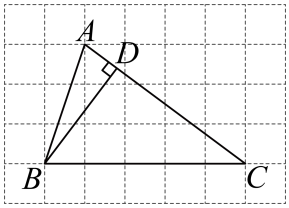
【详解】解：$S_{\triangle ABC}=5\times6-\frac{1}{2}\times2\times6-\frac{1}{2}\times5\times5-\frac{1}{2}\times1\times3=30-6-\frac{25}{2}-\frac{3}{2}=10$；

由勾股定理得，$BC=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

所以，BC 边上的高长$=\frac{2\times10}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$.

【变式 3-3】（23-24 七年级上·山东泰安·期末）如图所示，$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 在边长为 1 的正方形网格的格点上，$BD \perp AC$ 于点 D，则 BD 的长为_____.



【答案】3

【分析】本题考查的是勾股定理，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．根据题意求出 $\triangle ABC$ 的面积，根据勾股定理求出 AC，根据三角形的面积公式计算，得到答案．

【详解】解：由图形可知，$BC=5$，BC 边上的高为 3，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times 5\times 3=\frac{15}{2}$，

由勾股定理得，$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

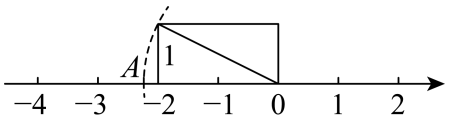
则 $\frac{1}{2}\times 5\times BD=\frac{15}{2}$，

解得，$BD=3$，

故答案为：3

考点四：勾股定理与无理数

例 4.（23-24 八年级下·河南濮阳·期中）如图，点 A 表示的实数是（　　）

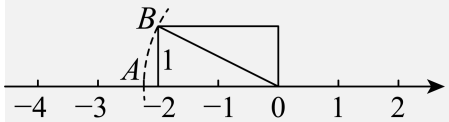


A．$-\sqrt{6}$　　B．$-\sqrt{5}$　　C．1　　D．$1-\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】本题主要考查了数轴、勾股定理等知识点，解答本题的关键是求得 OA 的长度．根据勾股定理可得 OB 的长，再求出 OA 的长，然后求得点 A 所表示的数即可．

【详解】解：如图：



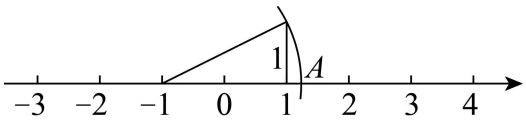
由题意得：$OB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\because OA=OB$

∴点 A 表示的实数是 $-\sqrt{5}$

故选 B.

【变式 4-1】（23-24 八年级下·湖北黄冈·期中）如图所示：数轴上点 A 所表示的数为 a，则 a 的值是（　）



A．$\sqrt{5}+1$　　B．$\sqrt{5}-1$　　C．$-\sqrt{5}+1$　　D．$-\sqrt{5}-1$

【答案】B

【分析】本题考查的是勾股定理与实数．先根据勾股定理求出三角形的斜边长，再根据两点间的距离公式即可求出 A 点的坐标．

【详解】解：图中的直角三角形的两直角边为 1 和 2，

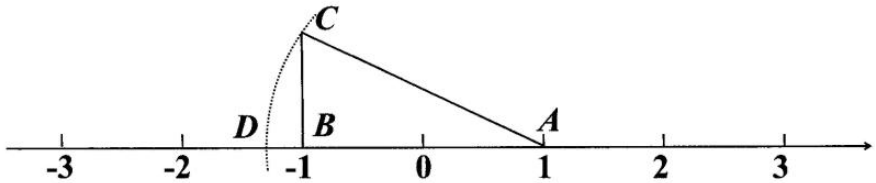
∴斜边长为：$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴ -1 到 A 的距离是 $\sqrt{5}$，

∴点 A 所表示的数为：$\sqrt{5}-1$．

故选：B．

【变式 4-2】（23-24 七年级下·山东济宁·期中）如图，数轴上点 A 表示的数是 1，点 B 表示的数是 -1，$CB\perp AB$ 于点 B，且 $BC=1$，以点 A 为圆心，AC 的长为半径画弧，交数轴的负半轴于点 D，则点 D 表示的数是（　）



A．$\sqrt{3}-1$　　B．$1-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}-1$　　D．$1-\sqrt{5}$

【答案】D

【分析】本题考查了勾股定理，数轴上点的平移，熟练掌握左减右加是解题的关键．

根据勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$，点 A 向左平移 $\sqrt{5}$ 个单位长度即可得到点 D 表示的数．

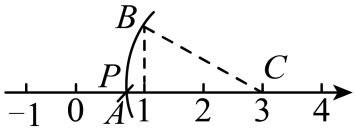
【详解】根据题意，得 $BA=2$，$BC=1$，

由勾股定理得：$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

故点 A 向左平移 $\sqrt{5}$ 个单位长度即可得到点 D 表示的数，即 $1-\sqrt{5}$．

故选：D．

【变式 4-3】（23-24 八年级下·河南信阳·阶段练习）如图的数轴上，点 A，C 对应的实数分别为 1，3，线段 $AB\perp AC$ 于点 A，且 AB 长为 1 个单位长度，若以点 C 为圆心，BC 长为半径的弧交数轴于 0 和 1 之间的点 P，则点 P 表示的实数为（　）



A．$\sqrt{5}-3$　　B．$3-\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{10}-3$　　D．$3-\sqrt{10}$

【答案】B

【分析】本题考查了实数在数轴上的表示，勾股定理；由勾股定理得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$，求出 BC，由 $PC=BC$ 即可求解；能用勾股定理求解，找出实数在数轴的点是解题的关键．

【详解】解：由题意得

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$

$=\sqrt{1^2+2^2}$

$=\sqrt{5}$，

$\therefore PC=BC=\sqrt{5}$，

$\therefore OP=OC-PC$

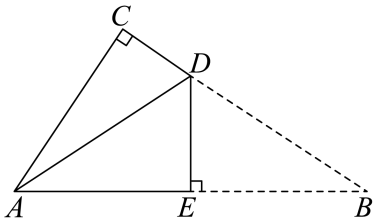
$=3-\sqrt{5}$，

$\therefore P$ 表示的实数为 $3-\sqrt{5}$；

故选：B．

考点五：勾股定理与折叠问题

例 5.（23-24 八年级下·黑龙江哈尔滨·阶段练习）如图是一张直角三角形纸片，两直角边 $AC=6$，$BC=8$，将 $\triangle ABC$ 折叠，顶点 B 与点 A 重合，折痕为 DE，则 DE 的长为_____．



【答案】$\frac{15}{4}$

【分析】本题考查了折叠的性质，勾股定理，运用勾股定理建立方程求出 BD 是关键；由折叠知 $AD=BD$，$BE=AE=\frac{1}{2}AB$，则 $CD=BC-BD$，在 Rt$\triangle ACD$ 中由勾股定理建立方程，即可求出 BD，在 Rt$\triangle BDE$ 中由勾股定理即可求得结果．

【详解】解：∵ $AC=6$，$BC=8$，$\angle C=90°$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{36+64}=10$；

由折叠知 $AD=BD$，$BE=\frac{1}{2}AB=5$，

则 $CD=BC-BD=8-BD$；

在 Rt△ACD 中，$AC^2+CD^2=AD^2$，

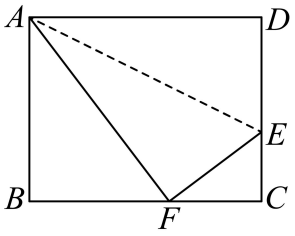
即 $6^2+(8-BD)^2=BD^2$，

解得：$BD=\frac{25}{4}$；

在 Rt△BDE 中，由勾股定理得 $DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$.

故答案为：$\frac{15}{4}$.

【变式 5-1】（23-24 八年级下·内蒙古通辽·阶段练习）如图已知长方形 $ABCD$ 中 $AB=8\text{cm}$，$BC=10\text{cm}$，在边 CD 上取一点 E，将∨ ADE 折叠使点 D 恰好落在 BC 边上的点 F，则 CE 的长为_____.



【答案】3cm/3 厘米

【分析】本题主要考查了图形的翻折变换以及勾股定理、全等三角形、方程思想等知识，关键是熟练掌握勾股定理，找准对应边．设 CE 的长为 x，由将∨ ADE 折叠使点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 可得 Rt△ADE≌Rt△AFE，所以 $AF=10\text{cm}$，$EF=DE=8-x$；在 Rt▵ABF 中由勾股定理得：$AB^2+BF^2=AF^2$，已知 AB、AF 的长可求出 BF 的长，又 $CF=BC-BF=10-BF$，在 Rt▵ECF 中由勾股定理可得：$EF^2=CE^2+CF^2$，即：$(8-x)^2=x^2+(10-BF)^2$，将求出的 BF 的值代入该方程求出 x 的值，即求出了 CE 的长.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是长方形，

∴ $AD=BC=10\text{cm}$，$CD=AB=8\text{cm}$，

根据题意得：Rt△ADE≌Rt△AFE，

∴ $\angle AFE=90°$，$AF=AD=10\text{cm}$，$EF=DE$，

设 $CE=x\text{cm}$，则 $DE=EF=CD-CE\ (8-x)\text{cm}$，

在 Rt▵ABF 中，由勾股定理得：$AB^2+BF^2=AF^2$，

即 $8^2+BF^2=10^2$，

∴ $BF=6\text{cm}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/315231141031011243