专题 40 中考最值难点突破费马点问题（解析版）

模块一 典例剖析+针对训练

费马点问题解题技巧：旋转变换.

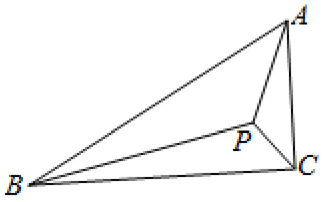
类型一 费马点模型

典例 1（2020 秋•仓山区校级期中）如图（1），P 为△ABC 所在平面上一点，且∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°，则点 P 叫做△ABC 的费马点，此时 $PA+PB+PC$ 的和最小，称为△ABC 的费马距离．

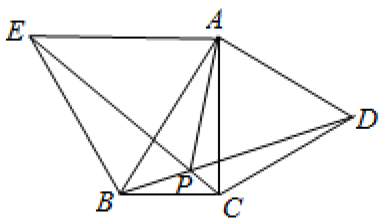
（1）若点 P 是等边三角形三条高的交点，点 P __是__ （填是或不是）该三角形的费马点．

（2）如图（2），分别以 AB、AC 为边向外作正△ABE 和正△ACD，CE 和 BD 相交于 P 点．求证：P 点为△ABC 的费马点．

（3）若图（2）中，AB＝5，AC＝4，BC＝a，BD＝b，则△ABC 的费马距离＝__b__．



(1)



(2)

思路引领：（1）依据等腰三角形三线合一的性质可知：MB 平分∠ABC，则∠ABP＝30°，同理∠BAP＝30°，则∠APB＝120°，同理可求得∠APC，∠BPC 的度数，然后可作出判断；

（2）如图 2 所示：首先证明△ACE≌△ABD，则∠1＝∠2，由∠3＝∠4 可得到∠CPD＝∠5，由∠CPD＝60°可证明∠BPC＝120°，然后证明△ADF∽△CFP，由相似三角形的性质和判定定理再证明△AFP∽△CDF，故此可得到∠APF＝∠ACD＝60°，然后可求得∠APC＝120°，接下来可求得∠APB＝120°．

（3）如图 2﹣1 中，在 PD 上取一点 T，使得 PT＝CP．利用全等三角形的性质证明 $PA+PC$＝PD 的，再证明 $PA+PB+PC$＝BD 即可．

解：（1）如图 1 所示：

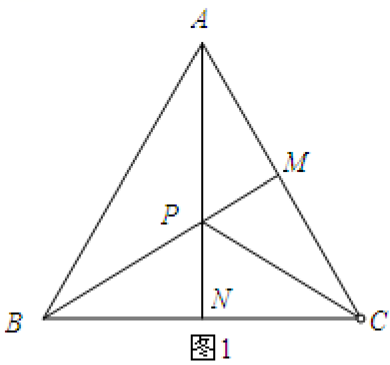


图1

∵$AB=BC$，BM 是 AC 的中线，

∴MB 平分∠ABC．

同理：AN 平分∠BAC，PC 平分∠BCA．

∵△ABC 为等边三角形，

∴∠$ABP=30°$，∠$BAP=30°$．

∴∠$APB=120°$．

同理：∠$APC=120°$，∠$BPC=120°$．

∴P 是△ABC 的费马点．

故答案为：是．

（2）设 AC 交 BD 于点 F，如图 2 所示：

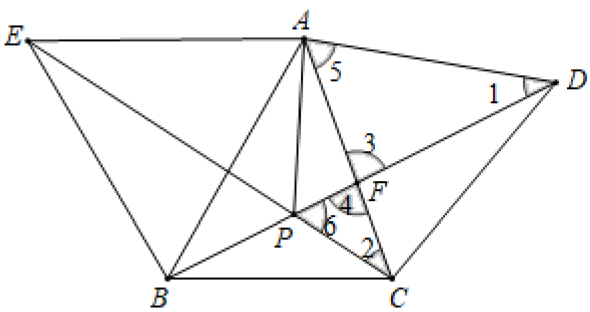


图2

∵△ABE 与△ACD 都为等边三角形，

∴∠BAE=∠$CAD=60°$，$AE=AB$，$AC=AD$，

∴∠BAE+∠BAC=∠CAD+∠BAC，即∠EAC=∠BAD，

在△ACE 和△ABD 中，

$$\begin{cases} AC=AD \\ \angle EAC=\angle BAD, \\ EA=AB \end{cases}$$

∴△ACE≌△ABD（SAS），

∴∠1=∠2，

∵∠3=∠4，

∴∠CPD=∠6=∠5=60°；．

∵△ADF∽△CPF，

∴$AF \cdot PF = DF \cdot CF$，

∵$\angle AFP = \angle CFD$，

∴$\triangle AFP \backsim \triangle CDF$.

∴$\angle APF = \angle ACD = 60°$，

∴$\angle APC = \angle CPD + \angle APF = 120°$，

∴$\angle BPC = 120°$，

∴$\angle APB = 360° - \angle BPC - \angle APC = 120°$，

∴P 点为$\triangle ABC$ 的费马点.

（3）如图 2－1 中，在 PD 上取一点 T，使得 $PT = CP$.

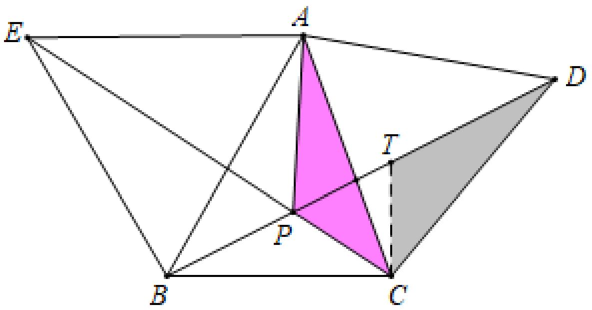


图2-1

∵$\angle CPT = 60°$，$PT = CP$，

∴$\triangle CPT$ 是等边三角形，

∴$CP = PT$，$\angle PCT = 60°$，

∵$CA = CD$，$\angle ACD = 60°$，

∴$\angle ACD = \angle PCT$，

∴$\angle ACP = \angle DCT$，

∴$\triangle ACP \cong \triangle DCT$（$SAS$），

∴$PA = DT$，

∵$PD = PT + DT$，

∴$PD = PA + PC$，

∴$PA + PB + PC = PB + PD = BD = b$，

故答案为：B.

总结提升：本题属于三角形专题，主要考查的是相似三角形的综合应用，解答本题主要应用了等边三角形的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的性质和判定、相似三角形的性质和判定等知识，证得∠5＝∠6、△*AFP*∽△*CDF* 是解答本题的关键．

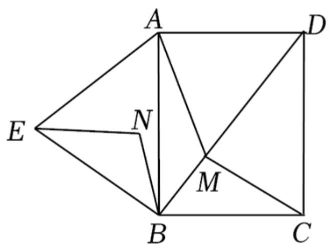
针对训练

1．（2021 春•滨海县期中）如图，四边形 *ABCD* 是正方形，△*ABE* 是等边三角形，*M* 为对角线 *BD*（不含 *B* 点）上任意一点，将 *BM* 绕点 *B* 逆时针旋转 60° 得到 *BN*，连接 *EN*、*AM*、*CM*．

（1）求证：△*AMB*≌△*ENB*；

（2）当 *M* 点在何处时，2*AM* 的值最小，并说明理由；

（3）当 *M* 点在何处时，2*AM*+*BM* 的值最小，并说明理由．



思路引领：（1）由旋转的性质可得 *MB*＝*NB*，∠*MBN*＝60° ＝∠*ABE*，由"*SAS*"可证△*AMB*≌△*ENB*；

（2）由"*SAS*"可证△*ABM*≌△*CBM*，可得 *AM*＝*CM*，即 *AM*+*CM*＝2*AM*，根据"两点之间线段最短"，可得：当 *M* 点落在 *BD* 的中点时，2*AM* 的值最小；

（3）根据"两点之间线段最短"，当 *M* 点位于 *BD* 与 *CE* 的交点处时，2*AM*+*BM* 的值最小．

（1）证明：∵△*ABE* 是等边三角形，

∴*BA*＝*BE*，∠*ABE*＝60°．

∵将 *BM* 绕点 *B* 逆时针旋转 60° 得到 *BN*，

∴∠*MBN*＝60° ＝∠*ABE*，*BM*＝*BN*，

∴∠*MBN*﹣∠*ABN*＝∠*ABE*﹣∠*ABN*．

即∠*MBA*＝∠*NBE*．

在△*AMB* 和△*ENB* 中，

$$\begin{cases} AB = BE \\ \angle ABM = \angle NBE, \\ BM = BN \end{cases}$$

∴△*AMB*≌△*ENB*（*SAS*）；

（2）解：当 *M* 点落在 *BD* 的中点时，2*AM* 的值最小，

∵四边形 *ABCD* 是正方形，