

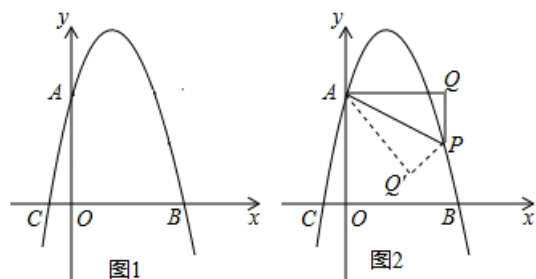
2024 年中考数学二轮专题 压轴题培优练习 10

1.如图 1，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 交 y 轴于点 $A(0, 4)$ ，交 x 轴于点 $B(4, 0)$ ，点 P 是抛物线上一动点，过点 P 作 x 轴的垂线 PQ ，过点 A 作 $AQ \perp PQ$ 于点 Q ，连接 AP 。

(1)填空：抛物线的解析式为_____，点 C 的坐标_____；

(2)点 P 在抛物线上运动，若 $\triangle AQP \sim \triangle AOC$ ，求点 P 的坐标；

(3)如图 2，当点 P 位于抛物线的对称轴的右侧，若将 $\triangle APQ$ 沿 AP 对折，点 Q 的对应点为点 Q' ，请直接写出当点 Q' 落在坐标轴上时点 P 的坐标。



2.已知二次函数 $y = a(x-1)(x-1-a)$ (a 为常数，且 $a \neq 0$)。

(1)求证：该函数的图象与 x 轴总有两个公共点；

(2)若点 $(0, y_1)$ ， $(3, y_2)$ 在函数图象上，比较 y_1 与 y_2 的大小；

(3)当 $0 < x < 3$ 时， $y < 2$ ，直接写出 a 的取值范围。

3.在平面直角坐标系中，已知A、B是抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 上两个不同的点，其中A在第二象限，B在第一象限.

(1)如图 1 所示，当直线AB与x轴平行， $\angle AOB=90^\circ$ ，且 $AB=2$ 时，求此抛物线的解析式和A、B两点的横坐标的乘积；

(2)如图 2 所示，在(1)所求得抛物线上，当直线AB与x轴不平行， $\angle AOB$ 仍为 90° 时，求证：A、B两点横坐标的乘积是一个定值；

(3)在(2)的条件下，如果直线AB与x轴、y轴分别交于点P、D，且点B的横坐标为

$\frac{1}{2}$. 那么在x轴上是否存在一点Q，使 $\triangle QDP$ 为等腰三角形？若存在，请直接写出点Q

的坐标；若不存在，请说明理由.

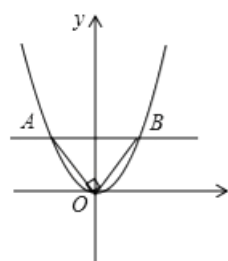


图1

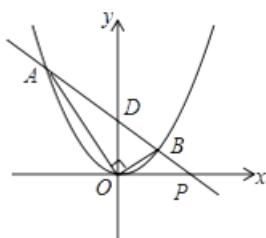


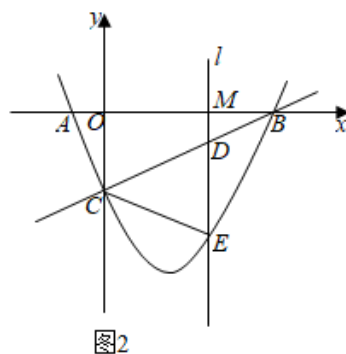
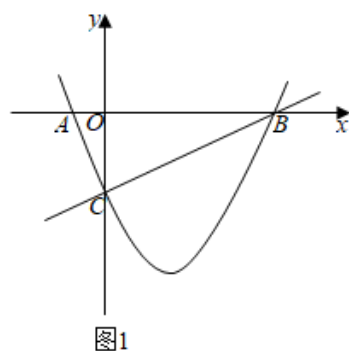
图2

4.如图 1，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $B(6, 0)$ 和点 $C(0, -3)$.

(1)求抛物线的解析式；

(2)点 P 是直线 BC 下方抛物线上一动点，其横坐标为 m ，连接 PB 、 PC ，当 $\triangle PBC$ 的面积为 $\frac{15}{2}$ 时，求 m 值；

(3)如图 2，点 M 是线段 OB 上的一个动点，过点 M 作 x 轴的垂线 l 分别与直线 BC 和抛物线交于 D 、 E 两点，是否存在以 C 、 D 、 E 为顶点的三角形与 $\triangle BDM$ 相似，若存在，请直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.



5.如图，抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 的顶点为 M ，对称轴是直线 $x = 1$ ，与 x 轴的交点为

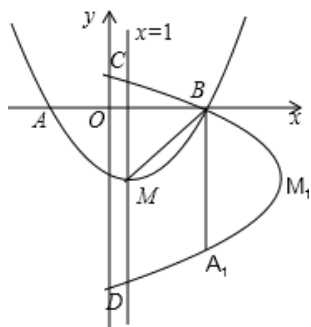
$A(-3, 0)$ 和 B ，将抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 绕点 B 逆时针方向旋转 90° ，点 M_1 、 A_1 为

点 M 、 A 旋转后的对应点，旋转后的抛物线与 y 轴相交于 C 、 D 两点.

(1)写出点 B 的坐标及求原抛物线的解析式；

(2)求证 A ， M ， A_1 三点在同一直线上；

(3)设点 P 是旋转后抛物线上 DM_1 之间的一动点，是否存在一点 P ，使四边形 PM_1MD 的面积最大？如果存在，请求出点 P 的坐标及四边形 PM_1MD 的面积；如果不存在，请说明理由.

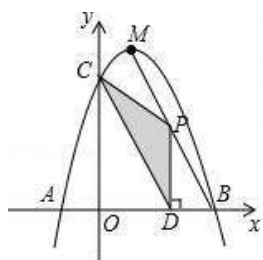


6.如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 A, B 两点，与 y 轴相交于点 C ，且点 B 与点 C 的坐标分别为 $B(3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，点 M 是抛物线的顶点.

(1)求抛物线的解析式；

(2)点 P 的线段 MB 上一个动点，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴与点 D ，若 $\triangle PCD$ 的面积为 S ，试判断 S 有无最大值？若有，求出这个最大值；

(3)在(2)的条件下，线段 MB 上是否存在点 P ， $\triangle PCD$ 为直角三角形？如果存在，请直接写出点 P 的坐标，如果不存在，请说明理由.

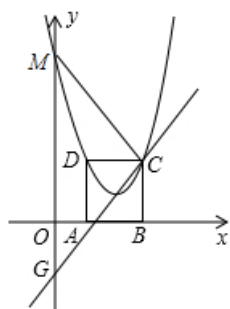


7.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，且 $AB=3$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ，直线 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ 经过点 C ，交 y 轴于点 G 。

(1)点 C 、 D 的坐标；

(2)求顶点在直线 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ 上且经过点 C 、 D 的抛物线的解析式；

(3)将(2)中的抛物线沿直线 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ 平移，平移后的抛物线交 y 轴于点 F ，顶点为点 E 。平移后是否存在这样的抛物线，使 $\triangle EFG$ 为等腰三角形？若存在，请求出此时抛物线的解析式；若不存在，请明理由。



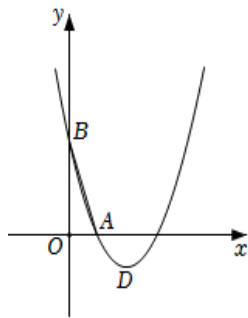
8.

如图,在平面直角坐标系中,点 A、点 B 分别在 x 的正半轴和 y 的正半轴上, $\tan \angle OAB = 3$, 抛物线 $y = x^2 + mx + 3$ 经过 A、B 两点, 顶点为 D.

(1)求抛物线的表达式;

(2)将 $\triangle OAB$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后, 点 B 落到点 C 的位置, 求四边形 ABCD 的面积;

(3)将该抛物线沿 y 轴向上或向下平移, 使其经过点 C, 若点 P 在平移后的抛物线上, 且满足 $\angle ACP = \angle ABO$, 求点 P 的坐标.



答案

1.解: (1)把 $A(0, 4)$, $B(4, 0)$ 分别代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} c=4 \\ -16+4b+c=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 3x + 4$,

当 $y=0$ 时, $-x^2 + 3x + 4 = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 4$,

$\therefore C(-1, 0)$;

故答案为 $y = -x^2 + 3x + 4$; $(-1, 0)$;

(2) $\because \triangle AQP \sim \triangle AOC$,

$$\therefore \frac{AQ}{AO} = \frac{PQ}{CO}, \therefore \frac{AQ}{PQ} = \frac{AO}{CO} = \frac{4}{1} = 4,$$

即 $AQ = 4PQ$,

设 $P(m, -m^2 + 3m + 4)$,

$\therefore m = 4|4 - (-m^2 + 3m + 4)|$, 即 $4|m^2 - 3m| = m$,

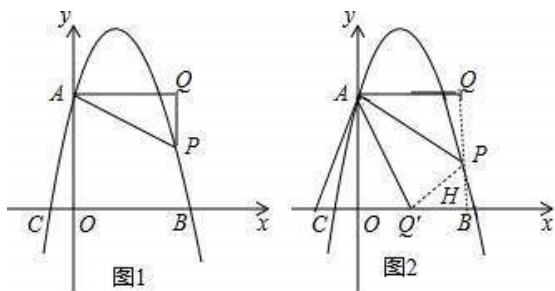
解方程 $4(m^2 - 3m) = m$ 得 $m_1 = 0$ (舍去), $m_2 = \frac{13}{4}$, 此时 P 点坐标为 $(\frac{13}{4}, \frac{51}{16})$;

解方程 $4(m^2 - 3m) = -m$ 得 $m_1 = 0$ (舍去), $m_2 = \frac{11}{4}$, 此时 P 点坐标为 $(\frac{13}{4}, \frac{75}{16})$;

综上所述, 点 P 的坐标为 $(\frac{13}{4}, \frac{51}{16})$ 或 $(\frac{11}{4}, \frac{75}{16})$;

(3) 设 $P(m, -m^2 + 3m + 4) (m > \frac{3}{2})$,

当点 Q' 落在 x 轴上, 延长 QP 交 x 轴于 H , 如图 2,



则 $PQ = 4 - (-m^2 + 3m + 4) = m^2 - 3m$,

$\because \triangle APQ$ 沿 AP 对折, 点 Q 的对应点为点 Q' ,

$\therefore \angle AQ'P = \angle AQP = 90^\circ$, $AQ' = AQ = m$, $PQ' = PQ = m^2 - 3m$,

$\because \angle AQ'O = \angle Q'PH$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AOQ' \sim \text{Rt}\triangle Q'HP$,

$$\therefore \frac{OA}{Q'B} = \frac{AQ'}{PQ'}, \text{ 即 } \frac{4}{Q'B} = \frac{m}{m^2 - 3m}, \text{ 解得 } Q'B = 4m - 12,$$

$$\therefore OQ' = m - (4m - 12) = 12 - 3m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOQ' \text{ 中, } 4^2 + (12 - 3m)^2 = m^2,$$

$$\text{整理得 } m^2 - 9m + 20 = 0, \text{ 解得 } m_1 = 4, m_2 = 5, \text{ 此时 P 点坐标为 } (4, 0) \text{ 或 } (5, -6);$$

当点 Q' 落在 y 轴上, 则点 A、Q'、P、Q 所组成的四边形为正方形,

$$\therefore PQ = AQ',$$

$$\text{即 } |m^2 - 3m| = m,$$

$$\text{解方程 } m^2 - 3m = m \text{ 得 } m_1 = 0 (\text{舍去}), m_2 = 4, \text{ 此时 P 点坐标为 } (4, 0);$$

$$\text{解方程 } m^2 - 3m = -m \text{ 得 } m_1 = 0 (\text{舍去}), m_2 = 2, \text{ 此时 P 点坐标为 } (2, 6),$$

综上所述, 点 P 的坐标为 (4, 0) 或 (5, -6) 或 (2, 6)

$$2. \text{解: (1) 证明: 令 } y = 0, \text{ 即 } a(x-1)(x-1-a) = 0,$$

$$\because a \neq 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-1-a=0, \text{ 即 } x_1=1, x_2=1+a,$$

$$\because 1 \neq 1+a,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore$ 该函数的图象与 x 轴总有两个公共点;

$$(2) \because \text{点 } (0, y_1), (3, y_2) \text{ 在函数图象上,}$$

$$\therefore y_1 = a^2 + a, y_2 = -2a^2 + 4a.$$

$$\therefore y_1 - y_2 = a^2 + a + 2a^2 - 4a = 3a^2 - 3a.$$

$$\therefore \text{当 } a < 0 \text{ 或 } a > 1 \text{ 时, } y_1 > y_2,$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } y_1 = y_2,$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } y_1 < y_2;$$

$$(3) \because \text{二次函数 } v = a(x-1)(x-1-a),$$

$$\text{整理可得: } y = ax^2 - a(a+2)x + a(a+1),$$

$$\text{由(1)可知: 当 } y = 0 \text{ 时, 解得: } x = 1, x = 1+a,$$

$\therefore$ 二次函数的图象交轴于 $(-1, 0)$ 和 $(1+a, 0)$ 两点,

$$\text{对称轴 } x = \frac{a+2}{2}, \text{ 当 } x = \frac{a+2}{2} \text{ 时,}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/316023124135010134>