专题09 三角形中的特殊模型-燕尾（飞镖）型、风筝（鹰爪）模型

近年来各地考试中常出现一些几何导角模型，该模型主要涉及角度的计算（内角和定理、外角定理等）。熟悉这些模型可以快速得到角的关系，求出所需的角。本专题就燕尾（飞镖）型、风筝（鹰爪）模型进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型1、“飞镖”模型（“燕尾”模型）

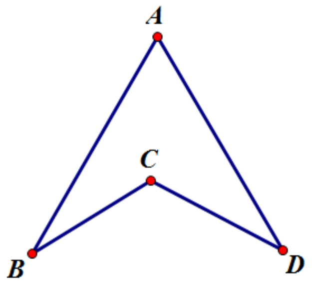


图1

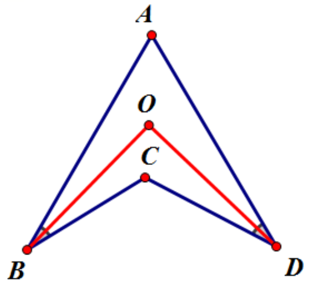
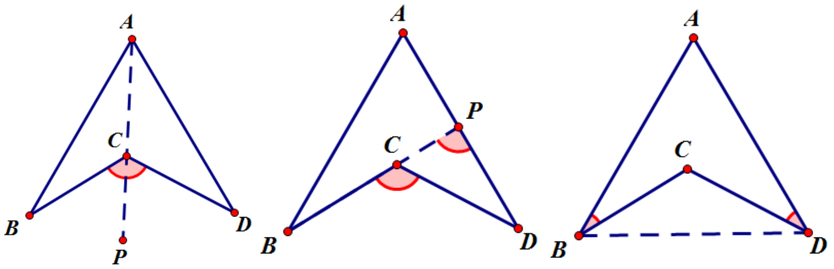


图2

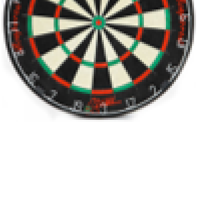
条件：如图1，凹四边形ABCD；　**结论：**①$\angle BCD=\angle A+\angle B+\angle D$；②$AB+AD>BC+CD$。

条件：如图2，线段BO平分$\angle ABC$，线段OD平分$\angle ADC$；　**结论：**$\angle O=\frac{1}{2}$（$\angle A+\angle C$）。

飞镖模型结论的常用证明方法：



例1．（2023·福建南平·八年级校考阶段练习）请阅读下列材料，并完成相应的任务：有趣的“飞镖图”．如图，这种形似飞镖的四边形，可以形象地称它为“飞镖图”．当我们仔细观察后发现，它实际上就是凹四边形．那么它具有哪些性质呢？又将怎样应用呢?下面我们进行认识与探究：凹四边形通俗地说，就是一个角“凹”进去的四边形，其性质有：凹四边形中最大内角外面的角等于其余三个内角之和．



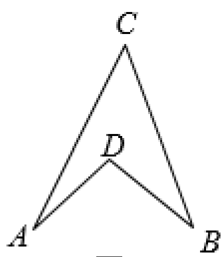


图1

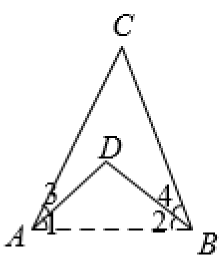


图2

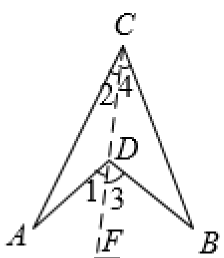


图3

（即如图 1，$\angle ADB=\angle A+\angle B+\angle C$）理由如下：

方法一：如图 2，连结 AB，则在$\triangle ABC$ 中，$\angle C+\angle CAB+\angle CBA=180°$，

即$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle C=180°$，

又：在$\triangle ABD$ 中，$\angle 1+\angle 2+\angle ADB=180°$，

$\therefore\angle ADB=\angle 3+\angle 4+\angle C$，即$\angle ADB=\angle CAD+\angle CBD+\angle C$.

方法二：如图 3，连结 CD 并延长至 F，

$\because\angle 1$ 和$\angle 3$ 分别是$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 的一个外角，

. . . .

大家在探究的过程中，还发现有很多方法可以证明这一结论.

任务：

(1)填空：“方法一”主要依据的一个数学定理是_________；

(2)探索及应用：根据“方法二”中辅助线的添加方式，写出该证明过程的剩余部分.

例 2．（2023·吉林·八年级统考期末）图 1 是用一种彭罗斯瓷砖平铺成的图案，它的基础部分是“风筝”和“飞镖”两郎分，图 2 中的“风筝”和“飞镖”是由图 3 所示的特殊菱形制作而成．在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=72°$，在对角线 AC 上截取 $AE=AB$，连按 BE，DE，可将菱形分割为“风筝”（凸四边 $ABED$）和“飞镖”（凹四边形 $BCDE$）两部分，则图 2 中的$\alpha=$___°.

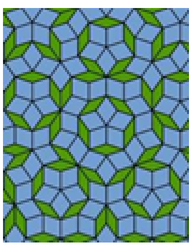


图1

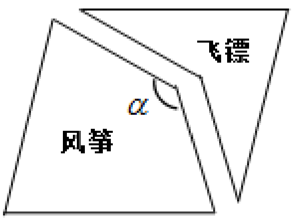


图2

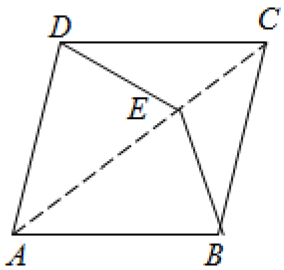


图3

例 3．（2023·广东河源·八年级校考期末）（1）模型探究：如图 1 所示的“镖形”图中，请探究$\angle ADB$与$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的数量关系并给出证明；（2）模型应用：如图 2，DE平分$\angle ADB$，CE平分$\angle ACB$，$\angle A=24°$，$\angle B=66°$，请直接写出$\angle E$的度数．

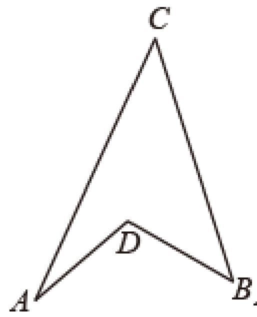


图1

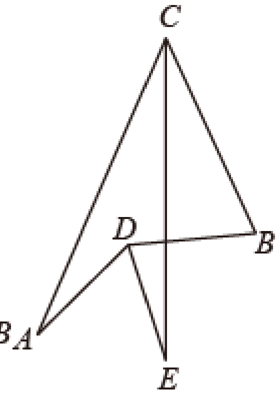
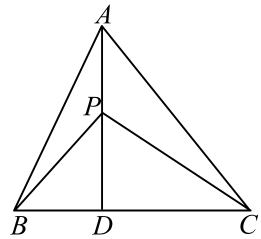


图2

例 4.（2023·浙江·八年级假期作业）如图所示，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，D在BC上，$\angle ABC>\angle ACB$，P是AD上的任意一点，求证$AC+BP<AB+PC$．



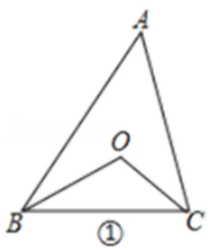
例 5．（2023·浙江杭州·八年级专题练习）（2018 十三中开学考）已知，在$\triangle ABC$中，∠A=60°，

（1）如图①，∠ABC 和∠ACB 的角平分线交于点 O，则∠BOC=______；

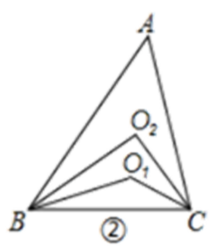
（2）如图②，∠ABC 和∠ACB 的三等分线分别对应交于点 O_1，O_2，则$\angle BO_2C=$__________；

（3）如图③，∠ABC和∠ACB的n等分线分别对应交于点O_1，O_2，…，O_{n-1}（内部有$n-1$个点），则$\angle BO_{n-1}C=$__；

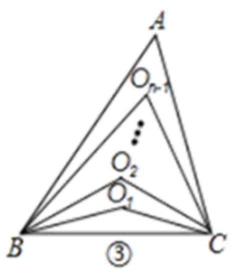
（4）如图③，∠ABC 和∠ACB 的 n 等分线分别对应交于点 O_1，O_2，…，O_{n-1}，若$\angle BO_{n-1}C=90°$，求 n 的值．



①



②



③

模型 2、风筝模型（鹰爪模型）或角内翻模型

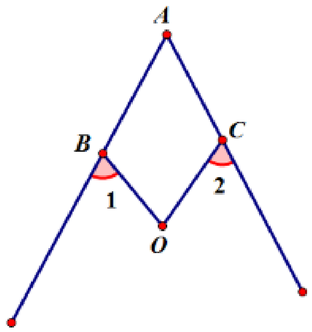


图 1

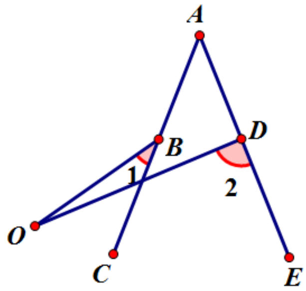


图 2

1）鹰爪模型：结论：$\angle A+\angle O=\angle 1+\angle 2$；

2）鹰爪模型（变形）：结论：$\angle A+\angle O=\angle 2-\angle 1$。

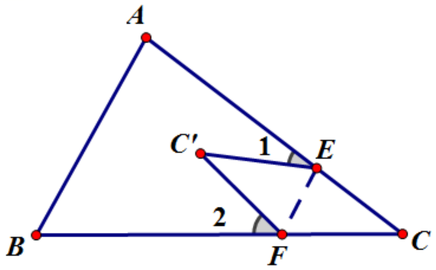


图 3

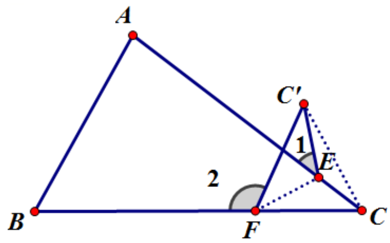


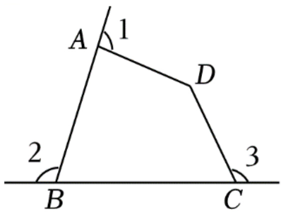
图 4

3）角内翻模型:

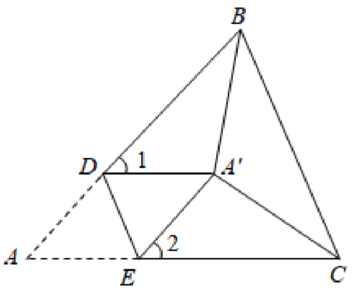
如图 3，将三角形纸片 ABC 沿 EF 边折叠，当点 C 落在四边形 $ABFE$ 内部时，**结论：**$2\angle C=\angle 1+\angle 2$；

如图 4，将三角形纸片 ABC 沿 EF 边折叠，当点 C 落在四边形 ABFE 外部时，**结论：**$2\angle C=\angle 2-\angle 1$。

例 1．（2023·四川达州·八年级期末）如图，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 分别是四边形 $ABCD$ 的外角，判定下列大小关系：①$\angle 1+\angle 3=\angle ABC+\angle D$；②$\angle 1+\angle 3<\angle ABC+\angle D$；③$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$；④$\angle 1+\angle 2+\angle 3>360°$．其中正确的是____．（填序号）

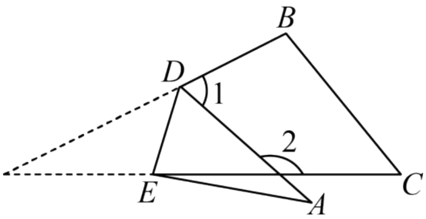


例 2.（2023 春·广东·七年级专题练习）如图，将$\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠，使点 A 落在点 A'处，且 $A'B$ 平分$\angle ABC$，$A'C$ 平分$\angle ACB$，若$\angle BA'C=120°$，则$\angle 1+\angle 2$ 的度数为（　　）



A．90°　　　B．100°　　　C．110°　　　D．120°

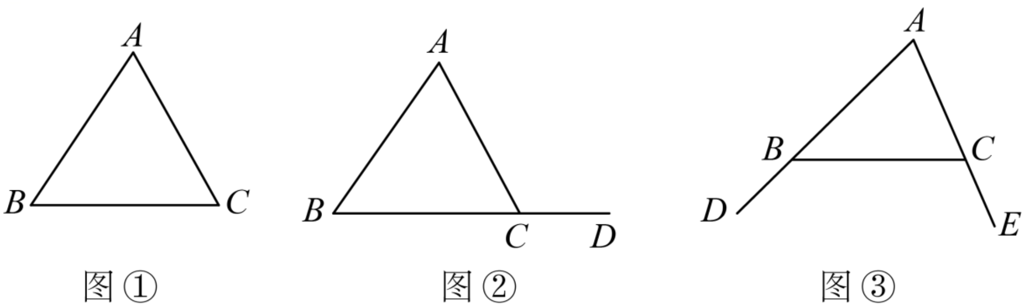
例 3．（2022 秋·河北廊坊·八年级校考期中）如图，将三角形纸片 ABC 沿 DE 折叠，当点 A 落在四边形 $BCED$ 的外部时，测量得 $\angle 1=65°$，$\angle 2=135°$，则 $\angle AEC$ 为（　）



A．20°　　　B．25°　　　C．30°　　　D．32°

例 4．（2022 秋·山东青岛·八年级统考期末）三角形内角和定理告诉我们：三角形三个内角的和等于$180°$如何证明这个定理呢？我们知道，平角是$180°$，要证明这个定理就是把三角形的三个内角转移到一个平角中去，请根据如下条件，证明定理．

（1）【定理证明】



已知：$\triangle ABC$ 如图①，求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$．

（2）【定理推论】如图②，在$\triangle ABC$中，有$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，点 D 是 BC 延长线上一点，由平角的定义可得$\angle ACD+\angle ACB=180°$，所以$\angle ACD=$_______，从而得到三角形内角和定理的推论：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和．

【初步运用】如图③，点 D、E 分别是$\triangle ABC$的边 AB、AC 延长线上一点．

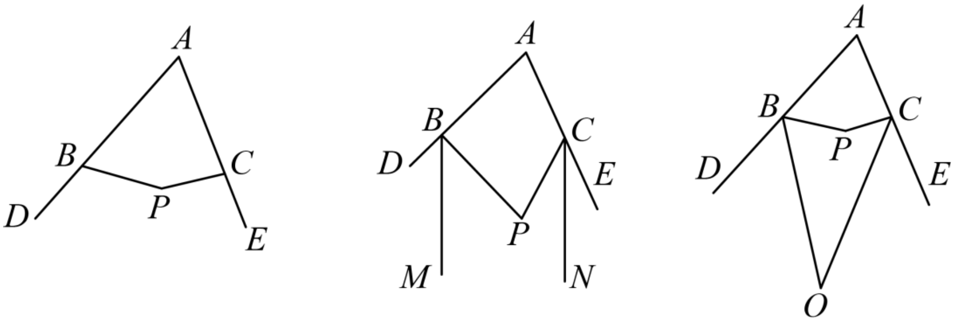
（3）若$\angle A=80°$，$\angle DBC=150°$，则$\angle ACB=$_______．（4）若$\angle A=80°$，则$\angle DBC+\angle ECB=$_______．

【拓展延伸】如图④，点 D、E 分别是四边形 $ABPC$ 的边 AB、AC 延长线上一点.

（5）若 $\angle A=80°$，$\angle P=150°$，则 $\angle DBP+\angle ECP=$_________.

（6）分别作 $\angle DBP$ 和 $\angle ECP$ 的平分线 BM、CN，如图⑤，若 $BM \parallel CN$，则 $\angle A$ 和 $\angle P$ 的关系为__________.

（7）分别作 $\angle DBP$ 和 $\angle ECP$ 的平分线，交于点 O，如图⑥，求出 $\angle A$，$\angle O$ 和 $\angle P$ 的数量关系，说明理由.



图④　　图⑤　　图⑥

例 5．（2022 春·河南鹤壁·七年级统考期末）$\triangle ABC$ 中，$\angle C=70°$，点 D，E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AC，BC 上的点，点 P 是一动点，令 $\angle PDA=\angle 1$，$\angle PEB=\angle 2$，$\angle DPE=\angle \alpha$．

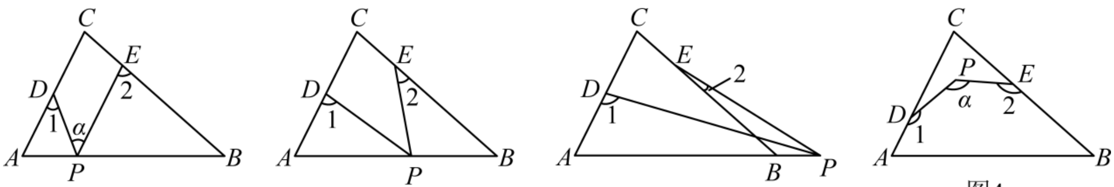


图1　　图2　　图3　　图4

初探：(1)如图 1，若点 P 在线段 AB 上，且 $\angle \alpha=60°$，则 $\angle 1+\angle 2=$____________；

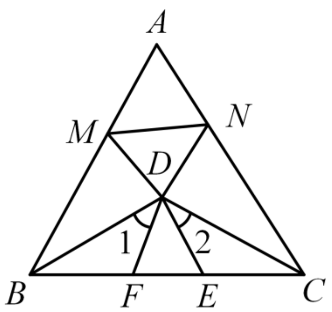
(2)如图 2，若点 P 在线段 AB 上运动，则$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle \alpha$ 之间的关系为____________；

(3)如图 3，若点 P 在线段 AB 的延长线上运动，则$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle \alpha$ 之间的关系为____________；

再探：(4)如图 4，若点 P 运动到 $\triangle ABC$ 的内部，写出此时$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle \alpha$ 之间的关系，并说明理由.

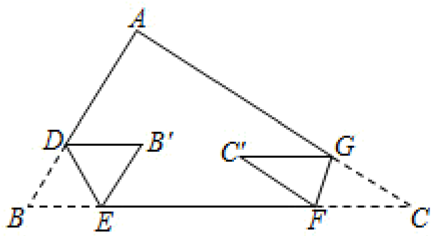
课后专项训练

1．（2023春·江苏扬州·七年级统考期末）如图，M、N是$\triangle ABC$边AB、AC上的点，$\triangle AMN$沿MN翻折后得到$\triangle DMN$，$\triangle BMD$沿BD翻折后得到$\triangle BED$，且点E在BC边上，$\triangle CND$沿CD翻折后得到$\triangle CFD$，且点F在边BC上，若$\angle A=70°$，则$\angle 1+\angle 2=$（　）



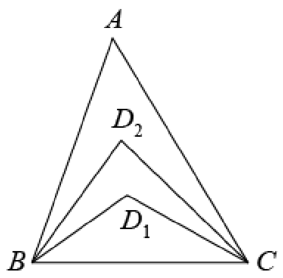
A．$65°$　　B．$70°$　　C．$75°$　　D．$85°$

2．（2023秋·浙江·八年级专题练习）如图，在$\triangle$ABC中，∠B+∠C＝α，按图进行翻折，使$B'D//C'G//BC, B'E//FG$，则∠C'FE的度数是（　　）



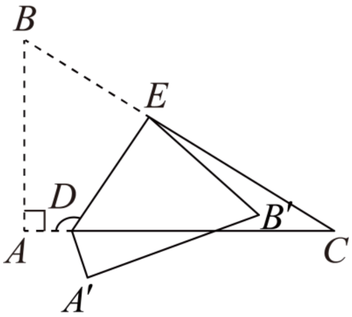
A．$\frac{\alpha}{2}$　　B．90°﹣$\frac{\alpha}{2}$　　C．α﹣90°　　D．2α﹣180°

3．（2023·河南·八年级假期作业）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=20°$，$\angle ABC$与$\angle ACB$的角平分线交于D_1，$\angle ABD_1$与$\angle ACD_1$的角平分线交于点D_2，依此类推，$\angle ABD_4$与$\angle ACD_4$的角平分线交于点D_5，则$\angle BD_5C$的度数是（　）



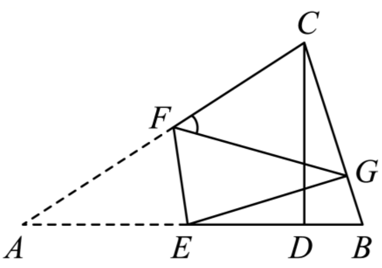
A．$24°$　　B．$25°$　　C．$30°$　　D．$36°$

4．（2023春·江苏苏州·七年级统考期末）如图，在三角形纸片$\angle A=90°$，$\angle B=65°$，现将该纸片沿DE折叠，使点A、B分别落在点A'、B'处．其中，点B'在纸片的内部，点D、E分别在边AC、BC上．若$\angle B'EC=15°$，则$\angle A'DC$等于（　）

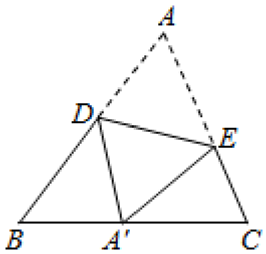


A．$55°$　　B．$60°$　　C．$65°$　　D．$70°$

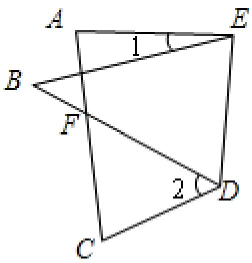
5．（2023秋·浙江·八年级专题练习）如图，在$\triangle ABC$中，CD是AB边上的高，点E，F分别是AB，AC边上的点，连接EF，将$\triangle AEF$沿着EF翻折，使点A与BC边上的点G重合，若$\angle EGB=90°$，$\angle DCB+\angle CFG=82°$，则$\angle ACD$的度数为_________.



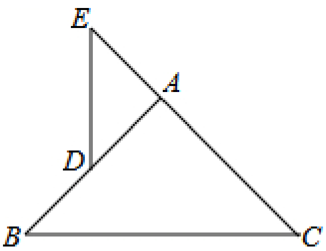
6．（203·四川德阳·八年级校考阶段练习）如图，$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$将$\triangle ABC$沿DE翻折后，点A落在BC边上的点A'处．如果$\angle A'DB=50°$，那么$\angle A'ED$的度数为_____.



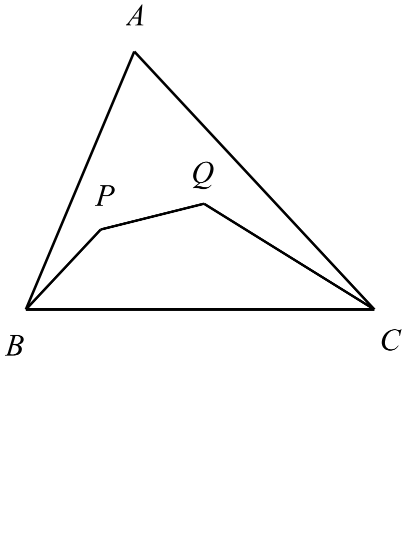
7．（2023秋·山东济宁·八年级统考期末）如图所示，将△ABC沿着DE翻折，若∠1+∠2＝80°，则∠B＝____度．

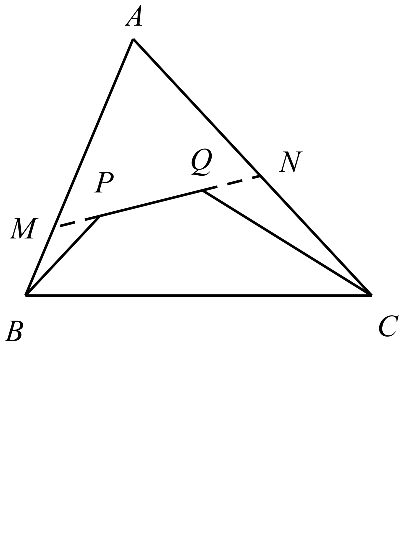


8．（2023·山东八年级课时练习）如图，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是AB上一点，延长CA至E，使$AE=AD$．试确定ED与BC的位置关系，并证明你的结论（一题多解）．



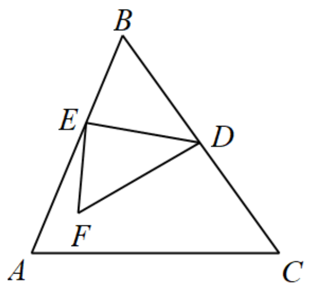
9．（2023·重庆·八年级统考期末）已知，如图，P，Q为三角形ABC内两点，B，P，Q，C构成凸四边形．求证：$AB+AC>BP+PQ+QC$．





10．（2023秋·山东·八年级专题练习）已知，在$\triangle ABC$中，点E在边AB上，点D是BC上一个动点，将$\angle B$沿E、D所在直线进行翻折得到$\angle EFD$．(1)如图，若$\angle B=50°$，则$\angle AEF+\angle FDC=$______；

(2)在图中细心的小明发现了$\angle AEF$，$\angle FDC$，$\angle B$之间的关系，请您替小明写出这个数量关系并证明．



11．（2023·北京·一模）在课外活动中，我们要研究一种凹四边形——燕尾四边形的性质．

定义1：把四边形的某些边向两方延长，其他各边有不在延长所得直线的同一旁，这样的四边形叫做凹四边形（如图1）．

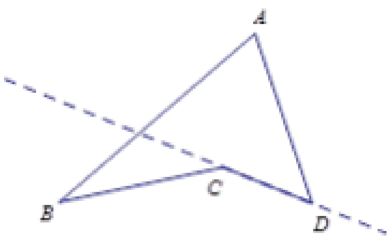
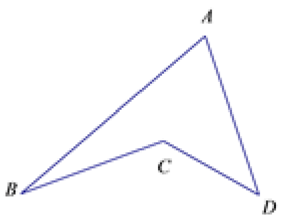
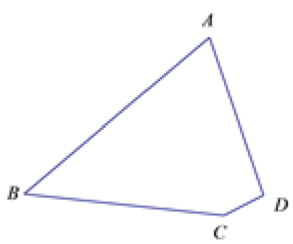


图1

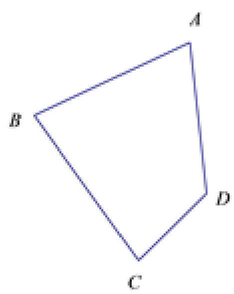
（1）根据凹四边形的定义，下列四边形是凹四边形的是（填写序号）______；



①



②



③

定义2：两组邻边分别相等的凹四边形叫做燕尾四边形（如图2）．

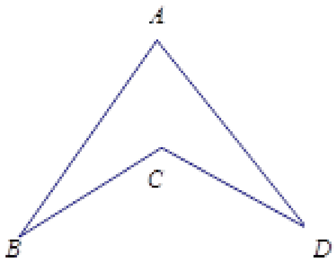


图2

特别地，有三边相等的凹四边形不属于燕尾四边形.

小洁根据学习平行四边形、菱形、矩形、正方形的经验，对燕尾四边形的性质进行了探究.

下面是小洁的探究过程，请补充完整：（2）通过观察、测量、折叠等操作活动，写出两条对燕尾四边形性质的猜想，并选取其中的一条猜想加以证明；（3）如图2，在燕尾四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=6$，$BC=DC=4$，$\angle BCD=120°$，求燕尾四边形 $ABCD$ 的面积（直接写出结果）.

12．（2023春·河南新乡·七年级期中）发现与探究

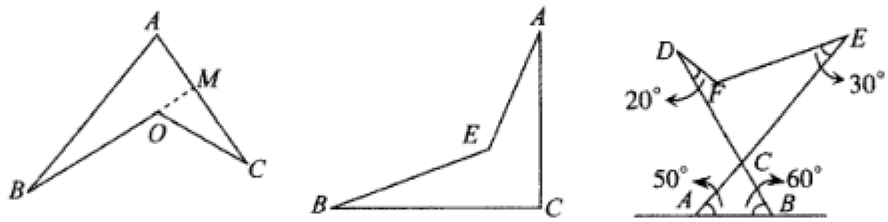


图1　　图2　　图3

【发现】根据三角形外角的性质可推理得: 如图1在四边形 $ABOC$ 中，判断 $\angle BOC$ 与 $\angle A+\angle B+\angle C$ 的数量关系．请将如下说理过程补充完整.

解：$\angle BOC=\angle A+\angle B+\angle C$，理由：延长 BO 交 AC 于点 M，

$\because \angle BMC$ 是$\vee ABM$ 的外角，$\therefore$________________，

同理，$\angle BOC$ 是$\vee COM$ 的外角，$\therefore$________________，

$\therefore \angle BOC=\angle A+\angle B+\angle C$（等量代换）.

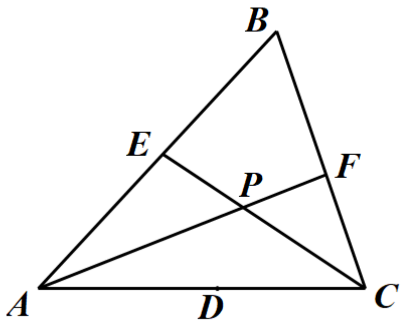
【验证】 某木材零件如图2所示，图纸要求 $\angle A=\angle B=15^{\circ}$，$\angle AEB=125^{\circ}$，零件样品生产出来后，经测量得到 $\angle C=90^{\circ}$，请你用“发现”得到的结论判断该零件样品是否符合规格，并说明理由.

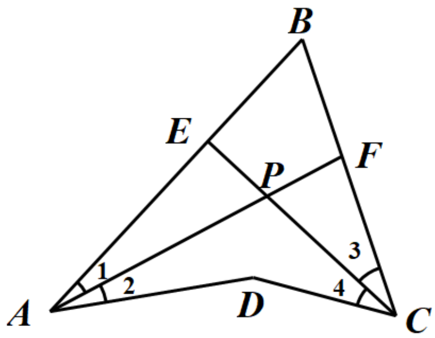
【探究】如图3是某公司开发的可调躺椅示意图（数据如图所示），AE 与 BD 的交点为 C，且 $\angle A$，$\angle B$，$\angle E$ 保持不变，为了舒适，需调整 $\angle D$ 的大小，使 $\angle EFD=115^{\circ}$，请直接写出，应将图中 $\angle D$

______（填“增加”或“减小”）______°.

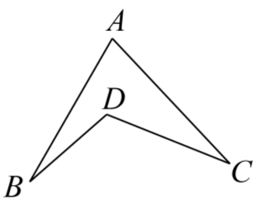
13．（2023春·上海·七年级专题练习）（1）在锐角ΔABC中，AC边上的高所在直线和AB边上的高所在直线的交点为P，$\angle BPC=110°$，求$\angle A$的度数．（2）如图，AF和CE分别平分$\angle BAD$和$\angle BCD$，当点D在直线AC上时，且B、P、D三点共线，$\angle APC=100°$，则$\angle B=$________．

（3）在（2）的基础上，当点D在直线AC外时，如下图：$\angle ADC=130°$，$\angle APC=100°$，求$\angle B$的度数．

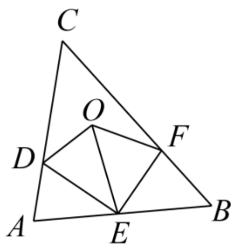




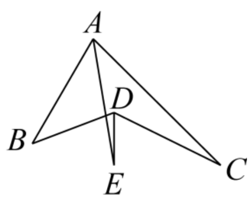
14．（2023春·福建福州·七年级校考期末）如图①，凹四边形$ABCD$形似圆规，这样的四边形称为“规形”，



图①



图②



图③

(1)如图①，在规形$ABCD$中，若$\angle A=80°$，$\angle BDC=130°$，$\angle ACD=30°$，则$\angle ABD=$______°；

(2)如图②，将$\triangle ABC$沿DE，EF翻折，使其顶点A，B均落在点O处，若$\angle CDO+\angle CFO=72°$，则$\angle C=$______°；

(3)如图③，在规形$ABCD$中，$\angle BAC$、$\angle BDC$的角平分线AE、DE交于点E，且$\angle B>\angle C$，试探究$\angle B$，$\angle C$，$\angle E$之间的数量关系，并说明理由．

15．（2022春·江苏连云港·七年级校考阶段练习）【问题情境】

已知$\angle A$，在$\angle A$的两边上分别取点B、C，在$\angle A$的内部取一点O，连接OB、OC．设$\angle OBA=\angle 1$，$\angle OCA=\angle 2$，探索$\angle BOC$与$\angle A$、$\angle 1$、$\angle 2$之间的数量关系．

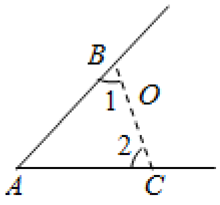


图1

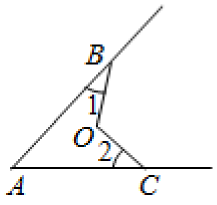


图2

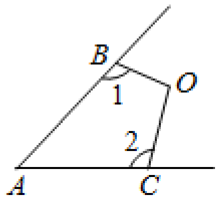


图3

【初步感知】如图1，当点O在$\triangle ABC$的边BC上时，$\angle BOC=180°$，此时$\angle A+\angle 1+\angle 2=180°$，则$\angle BOC$与$\angle A$、$\angle 1$、$\angle 2$之间的数量关系是$\angle BOC=\angle A+\angle 1+\angle 2$．

【问题再探】（1）如图2，当点O在$\triangle ABC$的内部时，请写出$\angle BOC$与$\angle A$、$\angle 1$、$\angle 2$之间的数量关系并说明理由；（2）如图3，当点O在$\triangle ABC$的外部时，$\angle BOC$与$\angle A$、$\angle 1$、$\angle 2$之间的数量关系是________；

【拓展延伸】（1）如图4，$\angle 1$、$\angle 2$的外角平分线相交于点P.

①若$\angle A=50°$，$\angle BOC=100°$，则$\angle P=$________°；②若$\angle BOC=4\angle A$且$\angle P=30°$，则$\angle A=$________°；

③直接写出$\angle BOC$与$\angle A$、$\angle P$之间的数量关系；

（2）如图5，$\angle 1$的平分线与$\angle 2$的外角平分线相交于点Q，则$\angle Q=$________（用$\angle BOC$、$\angle A$表示）．

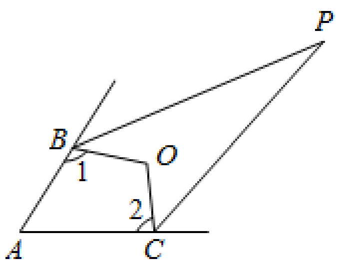


图4

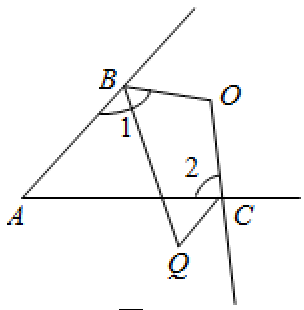
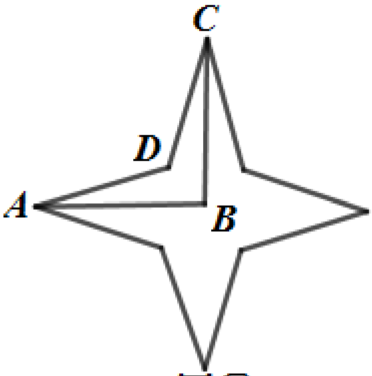
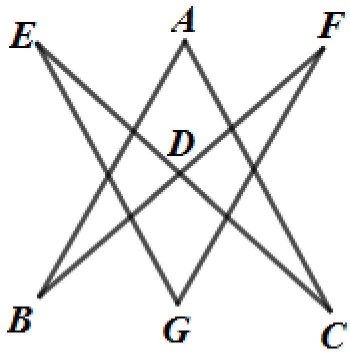


图5

16．（2023·河北·八年级专题练习）如图①所示是一个飞镖图案，连接AB，BC，我们把四边形$ABCD$叫做“飞镖模型”．



图①



图②

（1）求证：$\angle ADC = \angle DAB + \angle DCB + \angle ABC$；（2）如图②所示是一个变形的飞镖图案，$CE$ 与 BF 交于点 D，若 $\angle EDF = 120°$，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle G + \angle E + \angle F$ 的度数．

专题09 三角形中的特殊模型-燕尾（飞镖）型、风筝（鹰爪）模型

近年来各地考试中常出现一些几何导角模型，该模型主要涉及角度的计算（内角和定理、外角定理等）。熟悉这些模型可以快速得到角的关系，求出所需的角。本专题就燕尾（飞镖）型、风筝（鹰爪）模型进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型 1、“飞镖”模型（“燕尾”模型）

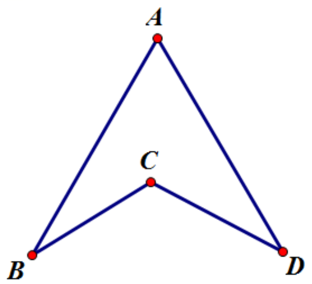


图 1

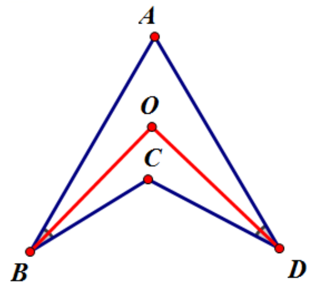
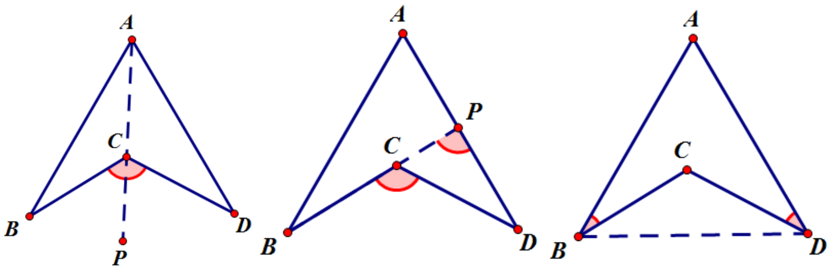


图 2

条件：如图 1，凹四边形 ABCD；　**结论：**① $\angle BCD=\angle A+\angle B+\angle D$；② $AB+AD>BC+CD$。

条件：如图 2，线段 *BO* 平分$\angle ABC$，线段 *OD* 平分$\angle ADC$；　**结论：**$\angle O=\frac{1}{2}$（$\angle A+\angle C$）。

飞镖模型结论的常用证明方法：



例 1．（2023·福建南平·八年级校考阶段练习）请阅读下列材料，并完成相应的任务：有趣的“飞镖图”．

如图，这种形似飞镖的四边形，可以形象地称它为“飞镖图”．当我们仔细观察后发现，它实际上就是凹四边形．那么它具有哪些性质呢？又将怎样应用呢?下面我们进行认识与探究：凹四边形通俗地说，就是一个角“凹”进去的四边形，其性质有：凹四边形中最大内角外面的角等于其余三个内角之和．

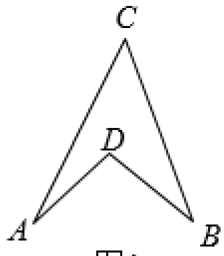


图1

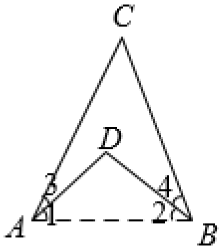


图2

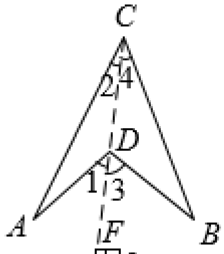


图3

（即如图 1，∠*ADB*=∠*A*+∠*B*+∠*C*）理由如下：

方法一：如图 2，连结 *AB*，则在△*ABC* 中，∠*C*+∠*CAB*+∠*CBA*=180°，

即∠1+∠2+∠3+∠4+∠*C*=180°，

又：在△*ABD* 中，∠1+∠2+∠*ADB*=180°，

∴∠*ADB*=∠3+∠4+∠*C*，即∠*ADB*=∠*CAD*+∠*CBD*+∠*C*．

方法二：如图 3，连结 *CD* 并延长至 *F*，

∵∠1 和∠3 分别是△*ACD* 和△*BCD* 的一个外角，

．．．．．．．．．．

大家在探究的过程中，还发现有很多方法可以证明这一结论．

任务：

(1)填空：“方法一”主要依据的一个数学定理是_________；

(2)探索及应用：根据“方法二”中辅助线的添加方式，写出该证明过程的剩余部分．

【答案】(1)三角形的内角和定理 (2)见解析

【分析】（1）根据解题过程作答即可；（2）连结 *CD* 并延长至 *F*，由三角形外角的性质即可证明．

【详解】（1）由解题过程可得，“方法一”主要依据的一个数学定理是三角形的内角和定理，

故答案为：三角形的内角和定理；

（2）连结 *CD* 并延长至 *F*，

∵∠1 和∠3 分别是△*ACD* 和△*BCD* 的一个外角，

$\therefore \angle 1=\angle 2+\angle A, \angle 3=\angle 4+\angle B$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle A+\angle 4+\angle B$，即 $\angle ADB=\angle A+\angle ACB+\angle B$．

【点睛】本题考查了三角形的内角和定理和三角形外角的性质，准确理解题意，熟练掌握知识点是解题的关键．

例 2．（2023·吉林·八年级统考期末）图 1 是用一种彭罗斯瓷砖平铺成的图案，它的基础部分是“风筝”和“飞镖”两郎分，图 2 中的“风筝”和“飞镖”是由图 3 所示的特殊菱形制作而成．在菱形 *ABCD* 中，$\angle BAD=72°$

，在对角线 AC 上截取 $AE=AB$，连接 BE， DE，可将菱形分割为“风筝”（凸四边 $ABED$）和“飞镖”（凹四边形 $BCDE$）两部分，则图 2 中的 $\alpha=$___°.

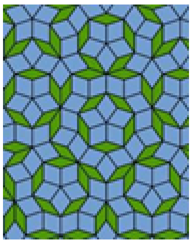


图1

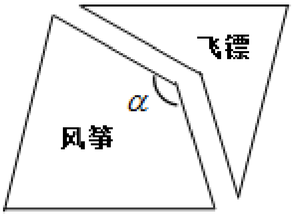


图2

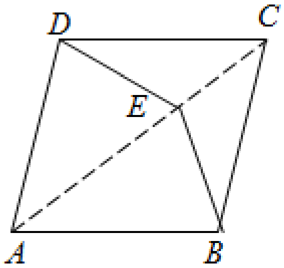


图3

【答案】144

【分析】根据菱形的每一条对角线平分一组对角的性质、等腰三角形的相关性质以及三角形的全等证明，可以先求出 $\angle AEB$ 的度数，再根据三角形全等求出 $\angle AED=\angle AEB$,进而得出 α 的度数.

【详解】在菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAE=\angle BAE$

Q $\angle BAD=72°$， $\therefore$ $\angle DAE=\angle BAE=\frac{1}{2}\times\angle BAD=\frac{1}{2}\times72°=36°$

Q $AE=AB$， $\therefore\angle AEB=\angle ABE=\frac{1}{2}\times(180°-36°)=72°$

在VABE 与VADE 中 $\begin{cases}AB=AD\\ \angle EAB=\angle EAD\\ AE=AE\end{cases}$ $\therefore$ V$ABE\cong$VADE

$\therefore\angle AEB=\angle AED=72°$ $\therefore\alpha=72°\times2=144°$ 故答案为：144

【点睛】题目主要考查菱形对角线的性质、等腰三角形的相关性质以及三角形的全等证明方法，难度适中.

例 3．（2023·广东河源·八年级校考期末）（1）模型探究：如图 1 所示的“镖形”图中，请探究 $\angle ADB$ 与 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的数量关系并给出证明；（2）模型应用：如图 2，DE 平分 $\angle ADB$， CE 平分 $\angle ACB$， $\angle A=24°$， $\angle B=66°$，请直接写出 $\angle E$ 的度数.

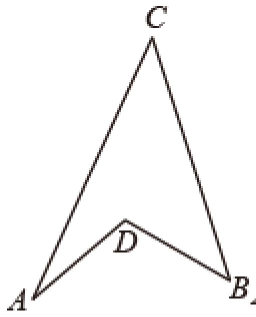


图1

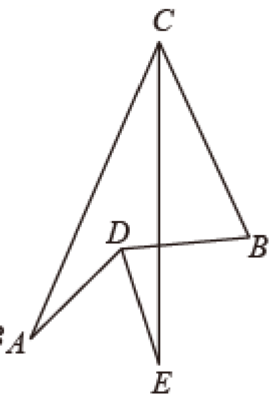


图2

【答案】（1）$\angle ADB=\angle A+\angle B+\angle C$，理由见详解；（2）21°

【分析】（1）连接 CD 并延长到点 E，利用三角形的外角的性质求解即可；（2）由（1）可知：$\angle ADB-\angle C=\angle A+\angle B=90°$，从而得$\angle EDO-\angle BCO=\frac{1}{2}\times90°=45°$，结合$\angle EDO+\angle E=\angle BCO+\angle B$，即可求解．

【详解】解：（1）$\angle ADB=\angle A+\angle B+\angle C$，理由如下：

连接 CD 并延长到点 E，

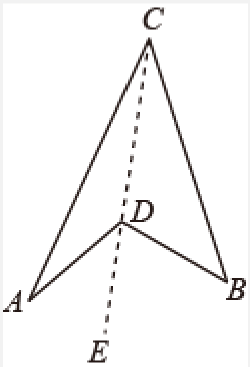


图1

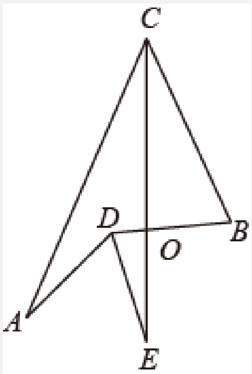


图2

$\because\angle ADE=\angle ACD+\angle A$，$\angle BDE=\angle BCD+\angle B$，

$\therefore\angle ADE+\angle BDE=\angle ACD+\angle A+\angle BCD+\angle B$，$\therefore\angle ADB=\angle A+\angle B+\angle ACB$．

（2）由第（1）题可得：$\angle ADB=\angle A+\angle B+\angle ACB$，$\therefore\angle ADB-\angle ACB=\angle A+\angle B=66°+24°=90°$，

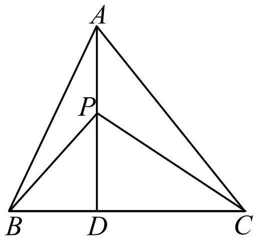
$\because DE$ 平分 $\angle ADB$，CE 平分 $\angle ACB$，$\therefore\angle EDO-\angle BCO=\frac{1}{2}(\angle ADB-\angle C)=\frac{1}{2}\times90°=45°$，

$\because\angle DOE=\angle BOC$，$\therefore\angle EDO+\angle E=\angle BCO+\angle B$，

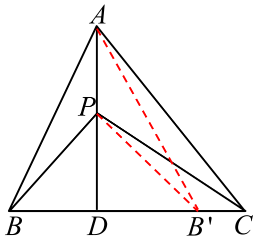
$\therefore\angle B-\angle E=\angle EDO-\angle BCO=45°$，$\therefore\angle E=\angle B-45°=66°-45°=21°$．

【点睛】本题考查三角形的外角的性质，角平分线的定义，三角形内角和定理，掌握三角形外角的性质，是解题的关键．

例 4.（2023·浙江·八年级假期作业）如图所示，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，D在BC上，$\angle ABC > \angle ACB$，P是AD上的任意一点，求证$AC + BP < AB + PC$.



【详解】作点B关于AD的对称点B'，则点B'落在线段CD上．连接AB'交PC于点E，连接PB'.



由轴对称图形的性质可得$AB = AB'$，$PB = PB'$.

在$\triangle AEC$中，$AE + EC > AC$，在$\Delta PEB'$中，$PE + EB' > PB'$.

因此$AC + PB' < AE + EC + PE + EB' = AB' + PC$，所以$AC + BP < AB + PC$.

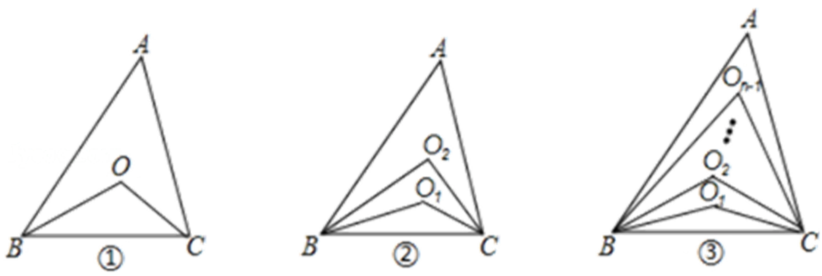
例 5. （2023·浙江杭州·八年级专题练习）（2018 十三中开学考）已知，在$\triangle ABC$中，$\angle A$=60°，

（1）如图①，∠ABC 和∠ACB 的角平分线交于点 O，则∠BOC=______；

（2）如图②，∠ABC 和∠ACB 的三等分线分别对应交于点 O_1，O_2，则$\angle BO_2C =$__________；

（3）如图③，∠ABC 和∠ACB 的n等分线分别对应交于点O_1，O_2，…，O_{n-1}（内部有 $n-1$ 个点），则$\angle BO_{n-1}C =$__；

（4）如图③，∠ABC 和∠ACB 的n等分线分别对应交于点 O_1，O_2，…，O_{n-1}，若$\angle BO_{n-1}C = 90°$，求n的值．



【答案】（1）120°；（2）100°；（3）$\left(\dfrac{60n+120}{n}\right)°$；（4）n=4

【分析】（1）根据三角形的内角和定理即可求出∠ABC＋∠ABC，然后根据角平分线的定义即可求出∠OBC＋∠OCB，再根据三角形的内角和定理即可求出结论；（2）根据三角形的内角和定理即可求出∠ABC＋∠ABC，然后根据三等分线的定义即可求出$\angle O_2BC$＋$\angle O_2$

CB，再根据三角形的内角和定理即可求出结论；（3）根据三角形的内角和定理即可求出∠ABC＋∠ABC，然后根据 n 等分线的定义即可求出∠O_{n-1}BC＋∠O_{n-1}CB，再根据三角形的内角和定理即可求出结论；（4）根据（3）的结论列出方程即可求出结论．

【详解】解：（1）∵在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$=60°，∴∠ABC＋∠ABC=180°－∠A=120°

∵∠ABC 和∠ACB 的角平分线交于点 O，∴∠OBC=$\frac{1}{2}$∠ABC，∠OCB=$\frac{1}{2}$∠ACB

∴∠OBC＋∠OCB=$\frac{1}{2}$∠ABC＋$\frac{1}{2}$∠ACB=$\frac{1}{2}$（∠ABC＋∠ACB）=60°

∴∠BOC=180°－（∠OBC＋∠OCB）=120°　故答案为：120°．

（2）∵在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$=60°，∴∠ABC＋∠ABC=180°－∠A=120°

∵∠ABC 和∠ACB 的三等分线分别对应交于点 O_1，O_2，

∴∠O_2BC=$\frac{2}{3}$∠ABC，∠O_2CB=$\frac{2}{3}$∠ACB　∴∠O_2BC＋∠O_2CB=$\frac{2}{3}$∠ABC＋$\frac{2}{3}$∠ACB=$\frac{2}{3}$（∠ABC＋∠ACB）=80°

∴$\angle BO_2C=$180°－（∠O_2BC＋∠O_2CB）=100°　故答案为：100°．

（3）∵在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$=60°，　∴∠ABC＋∠ABC=180°－∠A=120°

∵∠ABC 和∠ACB 的 n 等分线分别对应交于点 O_1，O_2，……，O_{n-1}

∴∠O_{n-1}BC=$\frac{n-1}{n}$∠ABC，∠O_{n-1}CB=$\frac{n-1}{n}$∠ACB

∴∠O_{n-1}BC＋∠O_{n-1}CB=$\frac{n-1}{n}$∠ABC＋$\frac{n-1}{n}$∠ACB=$\frac{n-1}{n}$（∠ABC＋∠ACB）=$\left(\frac{120n-120}{n}\right)$°

∴$\angle BO_{n-1}C=$180°－（∠O_2BC＋∠O_2CB）=$\left(\frac{60n+120}{n}\right)$°　故答案为：$\left(\frac{60n+120}{n}\right)$°

（4）由（3）知：$\angle BO_{n-1}C=\left(\frac{60n+120}{n}\right)$°

∴$\frac{60n+120}{n}=90$ 解得：n=4　经检验：n=4 是原方程的解．

【点睛】本题考查了 n 等分线的定义和三角形的内角和定理，掌握 n 等分线的定义和三角形的内角和定理是解决此题的关键．