

第 2 章 预备知识

本章主要介绍 Logistic 回归模型, 协变量驱动的一阶混合随机系数整值自回归过程的定义和性质以及参数估计相关方法.

2.1 Logistic 回归模型

当研究某一个结果 y 与某些因素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之间的关系时, 常常将因变量 y 和自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 建立如下线性回归模型:

$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n + \varepsilon,$$

其中 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ 为模型参数, ε 是误差项. 以上线性回归模型对于自变量的取值并无限制, 因此因变量 y 的取值也无限制, 是一个连续变量. 然而在现实生活中有时会遇到因变量 y 只取分类值的情况, 此时将无法使用经典线性回归模型进行建模. 对于这一问题, 可以这样考虑, 假设 y 为只取二分类值的因变量, 即 $y = 0$ 或 $y = 1$, 研究自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 对因变量 y 的影响可以转化为研究自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 对概率 $p = P(y = 1)$ 的影响. 此时可以考虑 p 与 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之间的关系.

对 p 的研究也等价于对 $\frac{p}{1-p}$ 的研究, 事实上, 对于二分类随机变量 y , 记 $p = P(y = 1)$, 若 p 与自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的关系满足

$$\ln \frac{p}{1-p} = \phi_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i x_i, \quad (2.1)$$

则称因变量 y 与自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的关系符合 Logistic 回归模型, 其中 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ 为参数. 易知 (2.1) 式有下述等价形式:

$$p = \frac{\exp\{\phi_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i x_i\}}{1 + \exp\{\phi_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i x_i\}}.$$

Logistic 回归模型由于可解释性较强并且实现较为简单, 目前已广泛应用于各种领域, 而这一建模思想也被应用于整数值时间序列的研究中, 很多学者借

助 Logistic 结构, 建立一些有价值的时间序列模型, 下面介绍一类协变量驱动的一阶混合随机系数整值自回归过程.

2.2 协变量驱动的一阶混合随机系数整值自回归过程

考虑到协变量对稀疏参数随机性的影响, 崔帅 (2022) 借助 Logistic 结构, 提出了一类由协变量驱动的一阶混合随机系数整数值自回归过程, 本文所提出模型正是受该模型的启发, 本节简要介绍该模型的定义及性质.

记 $\mathbf{Z}_t = (Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tq})^T$ 为平稳的可观测随机变量, 若非负整值时间序列 $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ 满足

$$X_t = \begin{cases} \alpha_t \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{以概率 } 1 - \beta, \\ \varepsilon_t, & \text{以概率 } \beta, \end{cases} \quad (2.2)$$

那么称 $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ 为 q 维协变量驱动的一阶混合随机系数整数值自回归过程, 其中 α_t 满足

$$\ln \frac{\alpha_t}{1 - \alpha_t} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Z}_t = \xi_1 Z_{t1} + \xi_2 Z_{t2} + \dots + \xi_q Z_{tq},$$

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)^T$ 为协变量系数, $\{\varepsilon_t\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且只取非负整数值, 与 $\{X_{t-s}, s = 1, 2, \dots\}$ 和 $\{\mathbf{Z}_t, t = 1, 2, \dots\}$ 独立.

由模型的定义可知, 在 $X_{t-1} = i, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t$ 的条件下, $X_t = j$ 的条件概率由下式给出:

$$\begin{aligned} p_{j|i, \mathbf{z}_t} &= P(X_t = j \mid X_{t-1} = i, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t) \\ &= \beta P(\varepsilon_t = j) \\ &\quad + (1 - \beta) \sum_{k=0}^{\min\{i, j\}} \binom{i}{k} \alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}_t)^k (1 - \alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}_t))^{i-k} P(\varepsilon_t = j - k), \end{aligned}$$

其中 $\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}_t)$ 定义为:

$$\alpha(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}_t) = \frac{\exp\{\xi_1 z_{t1} + \xi_2 z_{t2} + \dots + \xi_q z_{tq}\}}{1 + \exp\{\xi_1 z_{t1} + \xi_2 z_{t2} + \dots + \xi_q z_{tq}\}}.$$

为了更好地理解这一模型, 下面给出关于模型的一些条件矩性质. 为了简便, 记 α_t 的期望为 μ_{α_t} , 方差为 $\sigma_{\alpha_t}^2$.

设 $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ 是由 (2.2) 式定义的过程, 记 μ_ε 为 ε_t 的均值, σ_ε^2 为 ε_t 的方差, 那么有

- (1) $E(X_t | X_{t-1}, Z_t) = (1 - \beta)\alpha_t X_{t-1} + \mu_\varepsilon$;
- (2) $E(X_t | X_{t-1}) = (1 - \beta)\mu_{\alpha_t} X_{t-1} + \mu_\varepsilon$;
- (3) $Var(X_t | X_{t-1}, Z_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \alpha_t(1 - \alpha_t)(1 - \beta)X_{t-1}$;
- (4) $Var(X_t | X_{t-1}) = (1 - \beta)^2 \sigma_{\alpha_t}^2 X_{t-1}^2 + (1 - \beta)(\mu_{\alpha_t} - \mu_{\alpha_t}^2 - \sigma_{\alpha_t}^2)X_{t-1} + \sigma_\varepsilon^2$,

其中 μ_ε 表示 ε_t 的均值, σ_ε^2 表示 ε_t 的方差.

崔帅 (2022) 采用条件极大似然估计方法对模型中的未知参数进行了估计, 在下一节将介绍一些常用的参数估计方法.

2.3 参数估计方法介绍

本节简要介绍对模型进行参数估计时所用到的两种方法, 分别为极大似然估计方法和贝叶斯估计方法.

2.3.1 极大似然估计

记 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为来自一时间序列 $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 的观测值, θ 为待估参数, $p(x; \theta)$ 为随机变量 X 的概率密度函数. 设 $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为样本的似然函数, 则样本的对数似然函数为:

$$\begin{aligned} l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) &= \ln(L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= \ln\left(\prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\ln p(x_i; \theta)\right), \end{aligned}$$

参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_{MLE}$ 为使得对数似然函数 $l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ 达到最大值时对应的参数值, 即

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

极大似然估计方法的思想是在已知样本概率分布形式, 但其中的参数未知的情况下, 将最可能得到这组样本的参数值作为未知参数的极大似然估计值. 由于极大似然估计包括了所观测到的样本信息以及与总体相关的分布信息, 所以估计精度很高, 且估计量也满足一些比较好的性质, 如相合性和渐近正态性, 因而是一种表现优良的参数估计方法. 但该方法只适合在样本的概率分布形式已知时使用, 而有时我们无法得知具体的分布形式, 故在实际应用中稍有局限性.

2.3.2 贝叶斯估计

记 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为来自一时间序列 $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ 的观测值, θ 为待估参数, 设参数 θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$, 样本的似然函数为 $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$, 利用贝叶斯公式, 将似然函数与先验分布结合, 可以得到参数 θ 的后验分布为:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta) L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)}{\int_{\theta} \pi(\theta) L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta}.$$

由韦来生和张伟平 (2021) 可知, 在平方损失 $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$ 下, 参数的贝叶斯估计为其后验分布的期望, 即

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= E(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \int_{\theta} \theta \cdot f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta, \end{aligned}$$

其中 $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为决策函数.

在考虑统计推断时, 经典方法仅利用了样本信息和总体信息, 与之不同的是, 贝叶斯方法还考虑了参数的先验信息, 进而得到后验分布. 从贝叶斯学派的观点看, 一切统计推断都要从后验分布出发, 依据后验分布进行统计推断可以得到更为合理的结果.

第 3 章 混合概率受协变量驱动的 INAR(1) 模型

本章介绍一类混合概率受协变量驱动的 INAR(1) 模型的定义及统计性质, 并使用条件极大似然估计方法和贝叶斯估计方法对模型参数进行估计.

3.1 模型的定义及性质

为了更好地解释整数值数据背后的产生机制, 学者们越来越关注整数值时间序列的统计推断和应用. 稀疏参数为常数的整数值自回归模型是分析整数值数据最简单的模型, 为研究带来了很大的便利, 但是这类模型无法解释稀疏参数可能会随时间变化这一特性, 因而具有一定的局限性. 考虑到稀疏参数的随机性, Zheng 等 (2006) 假定稀疏参数为独立同分布的随机变量序列, 建立了一阶随机系数整数值自回归过程. 然而在实际问题中, 稀疏参数的随机性可能会受到一些可观测的解释变量的影响, 因而使用独立同分布的随机变量序列解释系数参数的变化并不准确, 考虑到这一问题, Bakouch 等 (2018) 提出了一种随机系数 INAR(1) 过程, 其边际分布为零膨胀几何分布. 崔帅 (2022) 在此基础上, 提出了一阶 q 维协变量驱动的混合随机系数整值自回归过程, 该过程在稀疏参数处借助 Logistic 结构将协变量考虑进来, 受到上述模型的启发, 本文考虑协变量对混合概率的影响, 借助 Logistic 结构进行建模, 提出一类混合概率受 q 维协变量驱动的 INAR(1) 模型, 定义如下:

定义 3.1. 设 $\mathbf{Z}_t = (Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tq})^T$ 为平稳的可观测随机变量, 称非负整值时间序列 $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ 为混合概率受 q 维协变量驱动的 INAR(1) 模型, 若它满足如下递归方程:

$$X_t = \begin{cases} \phi \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{以概率 } p_t, \\ \varepsilon_t, & \text{以概率 } 1 - p_t, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 p_t 满足

$$\ln \frac{p_t}{1 - p_t} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Z}_t = \beta_1 Z_{t1} + \beta_2 Z_{t2} + \dots + \beta_q Z_{tq},$$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)^T$ 为协变量系数, 新息序列 $\{\varepsilon_t\}$ 独立同分布, 且取非负整数值, $\{\varepsilon_t\}$ 与 $\{X_{t-s}, s = 1, 2, \dots\}$ 和 $\{\mathbf{Z}_t, t = 1, 2, \dots\}$ 独立.

通过计算可知:

$$p_t = \frac{\exp(\beta_1 Z_{t1} + \beta_2 Z_{t2} + \dots + \beta_q Z_{tq})}{1 + \exp(\beta_1 Z_{t1} + \beta_2 Z_{t2} + \dots + \beta_q Z_{tq})}. \quad (3.2)$$

由模型的定义可知, 在 $X_{t-1} = i, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t$ 的条件下, $X_t = j$ 的条件概率由下式给出:

$$\begin{aligned} p_{j|i, \mathbf{z}_t} &= P(X_t = j | X_{t-1} = i, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t) \\ &= (1 - p_t) P(\varepsilon_t = j) + p_t P(\phi \circ X_{t-1} + \varepsilon_t = j) \\ &= (1 - p_t) P(\varepsilon_t = j) \\ &\quad + p_t \sum_{k=0}^{\min\{i, j\}} \binom{i}{k} \phi^k (1 - \phi)^{i-k} P(\varepsilon_t = j - k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 p_t 满足 (3.2).

为了更好地理解模型的性质, 下列命题计算了该过程的条件矩. 为了方便, 记 p_t 的期望为 μ_{p_t} , 方差为 $\sigma_{p_t}^2$.

命题 3.1. 设 $\{X_t\}$ 是由 (3.1) 定义的过程, 则有

- (1) $E(X_t | X_{t-1}, \mathbf{Z}_t) = \phi p_t X_{t-1} + \mu_\varepsilon$;
- (2) $E(X_t | X_{t-1}) = \phi \mu_{p_t} X_{t-1} + \mu_\varepsilon$;
- (3) $Var(X_t | X_{t-1}, \mathbf{Z}_t) = \phi^2 p_t (1 - p_t) X_{t-1}^2 + \phi (1 - \phi) p_t X_{t-1} + \sigma_\varepsilon^2$;
- (4) $Var(X_t | X_{t-1}) = \phi^2 \mu_{p_t} (1 - \mu_{p_t}) X_{t-1}^2 + \phi (1 - \phi) \mu_{p_t} X_{t-1} + \sigma_\varepsilon^2$,

其中 μ_ε 和 σ_ε^2 分别表示 ε_t 的均值和方差.

本节介绍了一类混合概率受 q 维协变量驱动的 INAR(1) 模型的定义和基本性质, 接下来运用条件极大似然估计方法和贝叶斯估计方法研究模型中未知参数的估计问题, 首先考虑条件极大似然估计.

3.2 条件极大似然估计

记 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为来自模型 (3.1) 的一组样本, 下面估计模型中的未知参数时, 考虑使用条件极大似然估计方法. 由于条件极大似然函数的计算需要已知样本的边际分布, 但现有的条件无法给出样本边际分布的显式形式, 所以可以考虑在 $X_1 = x_1$ 的条件下, 结合新息序列 $\{\varepsilon_t\}$ 的分布, 计算样本的条件极大似然函数, 进而求得参数的条件极大似然 (CML) 估计. 下面分别研究新息序列 $\{\varepsilon_t\}$ 服从泊松分布和几何分布时未知参数的条件极大似然估计.

3.2.1 泊松新息情形

假设模型 (3.1) 中新息序列 $\{\varepsilon_t\}$ 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$, 其概率分布列为:

$$P(\varepsilon_t = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

记未知参数 $\boldsymbol{\xi} = (\phi, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q, \lambda)^T$, 为了简便, 令 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)^T$, 则由条件概率 (3.3) 式和 p_t 的定义 (3.2) 式, 可知参数的条件极大似然函数为:

$$\begin{aligned} L_1(\boldsymbol{\xi}) &= \prod_{t=2}^n P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t) \\ &= \prod_{t=2}^n \left((1 - p_t) \frac{\lambda^{x_t}}{x_t!} e^{-\lambda} + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} \phi^i (1 - \phi)^{x_{t-1}-i} \frac{\lambda^{x_t-i}}{(x_t-i)!} e^{-\lambda} \right) \\ &= \prod_{t=2}^n \left((1 - p_t) g_1(x_t, \lambda) + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_3(x_t, i, \lambda) \right), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g_1(x_t, \lambda) &= \frac{\lambda^{x_t}}{x_t!} e^{-\lambda}, \\ g_2(x_{t-1}, i, \phi) &= \phi^i (1 - \phi)^{x_{t-1}-i}, \\ g_3(x_t, i, \lambda) &= \frac{\lambda^{x_t-i}}{(x_t - i)!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

对条件极大似然函数取对数, 可以得到对数似然函数为:

$$\begin{aligned} \ell_1(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{t=2}^n \ln(P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t)) \\ &= \sum_{t=2}^n \ln \left((1 - p_t) g_1(x_t, \lambda) + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_3(x_t, i, \lambda) \right) \\ &= \sum_{t=2}^n \ln(M_1(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M_1(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t) &= (1 - p_t) g_1(x_t, \lambda) \\ &\quad + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_3(x_t, i, \lambda), \end{aligned}$$

对数似然函数 $\ell_1(\boldsymbol{\xi})$ 关于参数 ϕ, β_i, λ 的偏导数 $\frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \phi}, \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \lambda}$ 分别为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \phi} &= \sum_{t=2}^n \frac{1}{M_1(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)} p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_3(x_t, i, \lambda) h(x_t, i, \phi), \\ \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \beta_i} &= \sum_{t=2}^n \frac{1}{M_1(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)} Z_{ti} p_t (1 - p_t) \left(g_1(x_t, \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_3(x_t, i, \lambda) \right), \\ \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \lambda} &= \sum_{t=2}^n \frac{1}{M_1(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)} \left((1 - p_t) \left(\frac{x_t}{\lambda} - 1 \right) g_1(x_t, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) \left(\frac{x_t - i}{\lambda} - 1 \right) g_3(x_t, i, \lambda) \right), \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, q$, 且

$$h(x_t, i, \phi) = i\phi^{i-1}(1-\phi)^{x_{t-1}-i} - \phi^i(1-\phi)^{x_{t-1}-i-1}(x_{t-1}-i). \quad (3.4)$$

令以上的偏导数等于 0, 可得如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \phi} = 0, \\ \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \beta_i} = 0, \\ \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

方程组 (3.5) 的解即为参数的条件极大似然估计值, 可记为 $\hat{\phi}_{1,CML}$, $\hat{\beta}_{i1,CML}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) 和 $\hat{\lambda}_{1,CML}$. 显然我们无法得到 $\hat{\phi}_{1,CML}$, $\hat{\beta}_{i1,CML}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) 和 $\hat{\lambda}_{1,CML}$ 的显式表达式, 在求解方程组时, 可利用 Matlab 软件中的 fsolve 函数求得数值解.

由于泊松分布具有一个良好的性质, 即该分布的均值和方差相等, 但是新息序列未必满足这样的特征, 可以考虑新息序列服从其它常见的分布, 如几何分布, 下面研究几何新息情形下未知参数的条件极大似然估计.

3.2.2 几何新息情形

在本节, 假设模型 (3.1) 中新息序列 $\{\varepsilon_t\}$ 服从几何分布 $Ge(\lambda/(1+\lambda))$, 其概率分布列为:

$$P(\varepsilon_t = k) = \frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

记未知参数 $\boldsymbol{\xi} = (\phi, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q, \lambda)^T$, 令 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)^T$, 同理由条件概率 (3.3) 式及 p_t 的定义式 (3.2) 可得条件极大似然函数为:

$$\begin{aligned} L_2(\boldsymbol{\xi}) &= \prod_{t=2}^n P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t) \\ &= \prod_{t=2}^n \left((1 - p_t) \frac{\lambda^{x_t}}{(1 + \lambda)^{x_t+1}} \right. \\ &\quad \left. + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} \phi^i (1 - \phi)^{x_{t-1}-i} \frac{\lambda^{x_t-i}}{(1 + \lambda)^{x_t-i+1}} \right) \\ &= \prod_{t=2}^n \left((1 - p_t) g_4(x_t, \lambda) + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_5(x_t, i, \lambda) \right), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g_2(x_{t-1}, i, \phi) &= \phi^i (1 - \phi)^{x_{t-1}-i}, \\ g_4(x_t, \lambda) &= \frac{\lambda^{x_t}}{(1 + \lambda)^{x_t+1}}, \\ g_5(x_t, i, \lambda) &= \frac{\lambda^{x_t-i}}{(1 + \lambda)^{x_t-i+1}}. \end{aligned}$$

进而可以得到对数似然函数为:

$$\begin{aligned} \ell_2(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{t=2}^n \ln(P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t)) \\ &= \sum_{t=2}^n \ln \left((1 - p_t) g_4(x_t, \lambda) + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_5(x_t, i, \lambda) \right) \\ &= \sum_{t=2}^n \ln(M_2(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M_2(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t) &= (1 - p_t) g_4(x_t, \lambda) \\ &\quad + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_5(x_t, i, \lambda), \end{aligned}$$

对数似然函数 $\ell_2(\boldsymbol{\xi})$ 关于参数 ϕ, β_i, λ 的偏导数 $\frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \phi}, \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \lambda}$ 分别为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \phi} &= \sum_{t=2}^n \frac{1}{M_2(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)} p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_5(x_t, i, \lambda) h(x_t, i, \phi), \\ \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \beta_i} &= \sum_{t=2}^n \frac{1}{M_2(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)} Z_{ti} p_t (1 - p_t) \left(g_4(x_t, \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_5(x_t, i, \lambda) \right), \\ \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \lambda} &= \sum_{t=2}^n \frac{1}{M_2(x_{t-1}, x_t, \phi, \boldsymbol{\beta}, \lambda, \mathbf{z}_t)} \left((1 - p_t) \left(\frac{x_t - \lambda}{\lambda(1 + \lambda)} \right) g_4(x_t, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + p_t \sum_{i=0}^{\min\{x_{t-1}, x_t\}} \binom{x_{t-1}}{i} \left(\frac{x_t - i - \lambda}{\lambda(1 + \lambda)} \right) g_2(x_{t-1}, i, \phi) g_5(x_t, i, \lambda) \right),\end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, q$, 且 $h(x_t, i, \phi)$ 由 (3.4) 式定义.

令以上偏导数等于 0, 可得如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \phi} = 0, \\ \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \beta_i} = 0, \\ \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

同理, 方程组 (3.6) 的解就是参数的条件极大似然估计值, 记为 $\hat{\phi}_{2,CML}, \hat{\beta}_{i2,CML}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) 和 $\hat{\lambda}_{2,CML}$. 显然我们同样无法得到 $\hat{\phi}_{2,CML}, \hat{\beta}_{i2,CML}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) 和 $\hat{\lambda}_{2,CML}$ 的显式表达式, 仍可利用 Matlab 软件求得数值解.

3.3 贝叶斯估计

记 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为来自模型 (3.1) 的一组样本, 下面通过贝叶斯估计方法来估计本文所提模型的未知参数. 贝叶斯估计方法充分利用了先验信息, 并结合似然函数, 将先验信息与样本信息结合, 使统计推断更精确.

对于过程 (3.1) 中的未知参数, 考虑到参数的取值范围 $\phi \in (0, 1)$, $\beta_i \in (-\infty, +\infty)$ ($i = 1, 2, \dots, q$), 可假设参数 ϕ 的先验分布为 Beta 分布, 参数 β_i 的先验分布为正态分布, 并设 Beta 分布的参数为 (a, b) , 正态分布的参数为 (μ, σ^2) , 即

$$\phi \sim \text{Beta}(a, b), \beta_i \sim N(\mu, \sigma^2),$$

其中 $a > 0$, $b > 0$, μ, σ 为实数, 且 $\sigma > 0$. 则参数 ϕ , 参数 β_i ($i = 1, 2, \dots, q$) 的先验概率密度分别为:

$$f_1(\phi) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \phi^{a-1} (1-\phi)^{b-1}, \quad \phi \in (0, 1),$$

$$f_{i+1}(\beta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-(\beta_i - \mu)^2 / (2\sigma^2)\right), \quad \beta_i \in (-\infty, +\infty).$$

贝叶斯估计方法需要使用样本的似然函数, 由于 $\{\varepsilon_t\}$ 分布不同时, 样本的似然函数表达式不同, 为了与条件极大似然估计作比较, 选用与上一节相同的新息序列分布, 考虑参数的贝叶斯 (Bayes) 估计. 首先研究新息序列服从泊松分布的情况, 然后研究新息序列服从几何分布时的情况.

3.3.1 泊松新息情形

当模型 (3.1) 中新息序列 $\{\varepsilon_t\}$ 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$ 时, 对于未知参数 λ , 由于 $\lambda \in (0, +\infty)$, 在使用贝叶斯估计方法进行参数估计时, 可考虑参数 λ 的先验分布为 Gamma 分布, 并设 $\lambda \sim \text{Gamma}(c, d)$, $c > 0$, $d > 0$, 故可以得到参数 λ 的先验概率密度为:

$$f_{q+2}(\lambda) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \lambda^{c-1} \exp(-d\lambda), \quad \lambda \in (0, +\infty). \quad (3.7)$$

记 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, 结合 3.2.1 节所给出的似然函数 $L_1(\boldsymbol{\xi})$ 表达式, 可以得到参数 $\boldsymbol{\xi} = (\phi, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q, \lambda)^T$ 的联合后验分布为:

$$p_1(\boldsymbol{\xi} | \mathbf{x}) = \frac{N_1}{Q_1},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/316153000133010102>