

热点专题 2-6 函数与图像

近 5 年考情		
考题示例	考点分析	关联考点
2024 年全国甲卷第 7 题, 5 分	基本初等函数的图像是高考中的重要考点之一, 是研究函数性质的重要工具. 高考中总以一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数等的图像为基础来考查函数图像, 往往结合函数性质一并考查, 考查的内容主要有知式选图、知图选式、图像变换以及灵活地应用图像判断方程解的个数, 属于每年必考内容之一.	(1) 函数图像的识别 (2) 函数图像的应用 (3) 函数图像的变换
2024 年 I 卷第 7 题, 5 分		
2023 年天津卷第 4 题, 5 分		
2022 年全国乙卷第 8 题, 5 分		
2022 年全国甲卷第 5 题, 5 分		

函数图象的应用很广泛,利用函数图象可研究函数的性质、解决方程和不等式的求解问题、求参数范围等,同时也体现了数形结合的思想. 有时利用函数图象能够更便捷地解决问题. 函数图象应用的考查在高考中占有重要地位,应引起师生重视.

模块一

题型解读

- 【题型 1】由解析式确定函数图像
- 【题型 2】由函数图像选择解析式
- 【题型 3】函数图像与实际问题
- 【题型 4】表达式含参数的图象
- 【题型 5】函数图象的平移, 伸缩, 对称, 翻折变换
- 【题型 6】利用函数图像解不等式
- 【题型 7】利用函数图像研究函数的性质、最值
- 【题型 8】利用函数图像分析交点的个数

模块二

高考模拟·新题速递

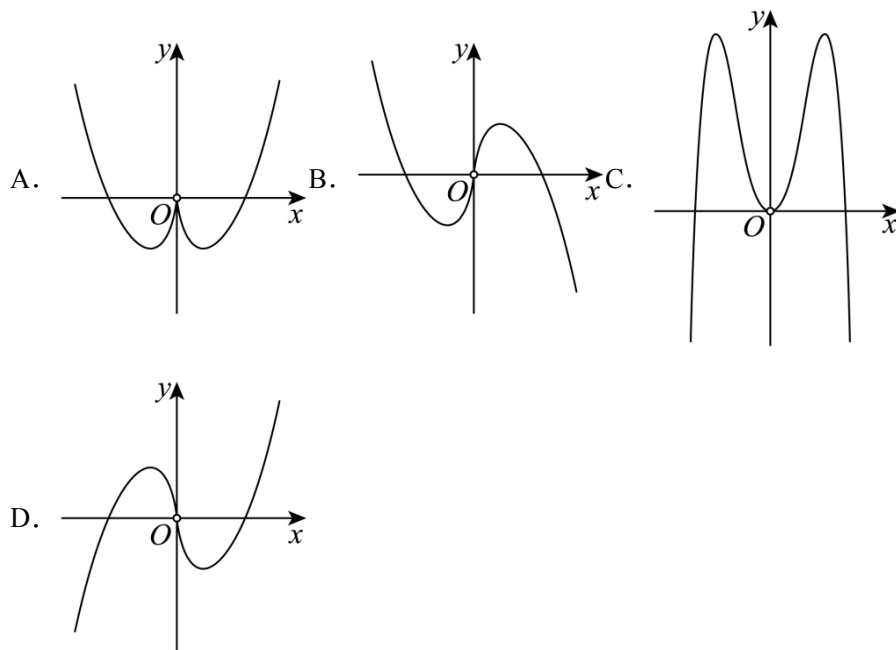
- 【题型 1】由解析式确定函数图像

基础知识

按先后顺序进行排除筛选: 先看奇偶性、定义域, 再看特殊点的正负等,

排除错误选项，从而筛选出正确答案.

1. (2024·全国·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \cdot \ln|x|$ 的大致图像是 ()



【答案】D

【分析】由奇偶函数的定义可判断 A, C; 由特值法可判断 B, D.

【详解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称,

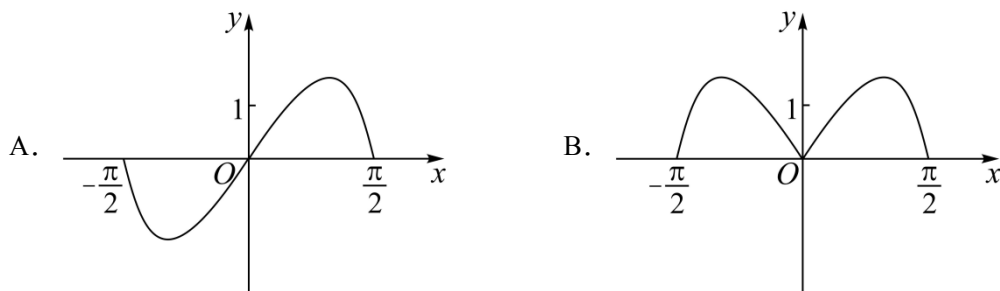
$$\text{又 } f(x) = (e^x - e^{-x}) \cdot \ln|x|, \quad f(-x) = (e^{-x} - e^x) \cdot \ln|-x| = -(e^x - e^{-x}) \cdot \ln|x| = -f(x),$$

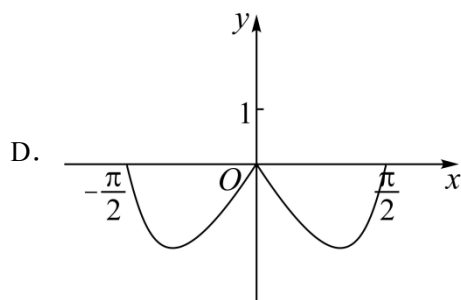
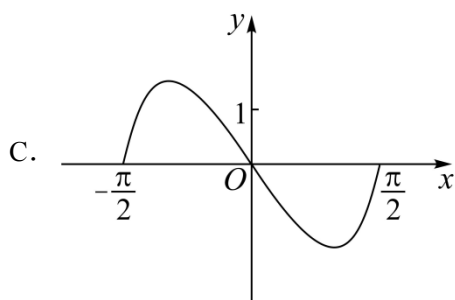
所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 其图像关于原点对称, 排除选项 A, C.

因为 $f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cdot \ln \frac{1}{2} < 0$, 排除选项 B.

(另解: 当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x < 0, e^x - e^{-x} > 0$, 所以 $f(x) < 0$, 排除选项 B).

2. (2022·全国·统考高考真题) 函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为 ()





【答案】A

【解析】令 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

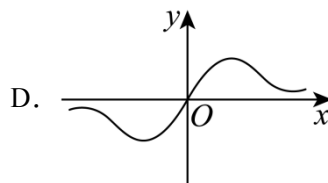
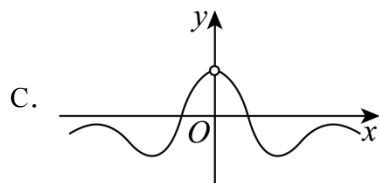
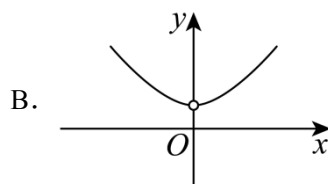
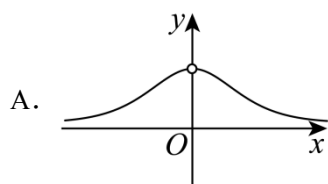
则 $f(-x) = (3^{-x} - 3^x)\cos(-x) = -(3^x - 3^{-x})\cos x = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 排除 BD;

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $3^x - 3^{-x} > 0, \cos x > 0$, 所以 $f(x) > 0$, 排除 C.

故选: A.

【巩固练习 1】函数 $f(x) = \frac{3x}{e^x - e^{-x}}$ 的大致图象是 ()



【答案】A

【分析】根据奇偶性、区间函数值符号及对应幂、指数复合函数的增长趋势, 应用排除法确定答案即可.

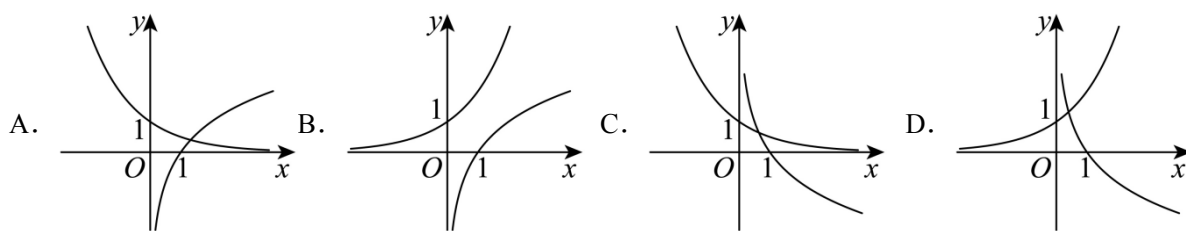
【详解】由 $f(-x) = \frac{-3x}{e^{-x} - e^x} = \frac{3x}{e^x - e^{-x}} = f(x)$ 且定义域 $\{x | x \neq 0\}$, 即 $f(x)$ 是偶函数, 排除 D;

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 > e^{-x}$, 即 $e^x - e^{-x} > 0$, 此时 $f(x) > 0$, 排除 C;

当 x 趋向 $+\infty$ 时, $3x$ 、 $e^x - e^{-x}$ 均趋向 $+\infty$, 但随 x 变大, $e^x - e^{-x}$ 的增速比 $3x$ 快,

所以 $f(x)$ 趋向于 0, 排除 B.

【巩固练习 2】当 $a > 1$ 时, 在同一直角坐标系中, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图像是 ()



【答案】A

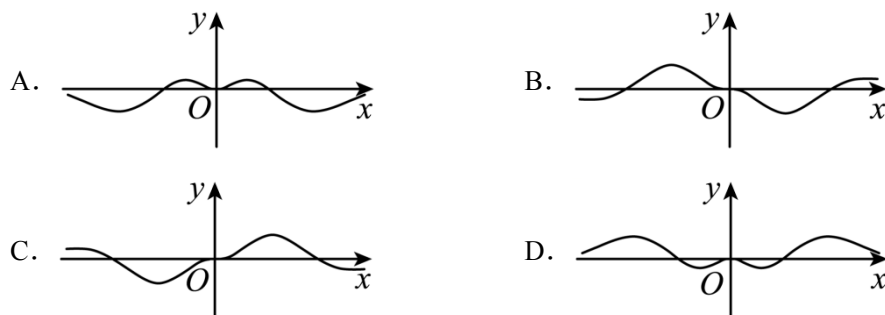
【分析】由 $a > 1$ 可知 $0 < \frac{1}{a} < 1$ ，根据指数函数和对数函数图象的单调性即可判断得出结果。

【详解】依题意可将指数函数 $y = a^{-x}$ 化为 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ，由 $a > 1$ 可知 $0 < \frac{1}{a} < 1$ ；

由指数函数图象性质可得 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 为单调递减，且过定点 $(0,1)$ ，即可排除 BD，

由对数函数图象性质可得 $y = \log_a x$ 为单调递增，且过定点 $(1,0)$ ，排除 C

【巩固练习 3】函数 $f(x) = \frac{x^2 \cos x}{e^{-x} + e^x}$ 的大致图象是 ()



【答案】A

【分析】由函数解析式判断函数的定义域和函数的奇偶性，再求函数的零点，以及函数值的正负，运用排除法得解。

【详解】因为函数 $f(x) = \frac{x^2 \cos x}{e^{-x} + e^x}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，

所以函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，

$$\text{又 } f(-x) = \frac{(-x)^2 \cos(-x)}{e^x + e^{-x}} = \frac{x^2 \cos x}{e^{-x} + e^x} = f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，

故函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，B，C 错误，排除 B，C，

令 $f(x) = 0$ 可得， $x = 0$ 或 $\cos x = 0$ ，

所以 $x = 0$ 或 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

所以函数的非负零点从小到大依次为 $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ ，

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $\cos x > 0, x^2 > 0, e^x + e^{-x} > 0$ ，所以 $f(x) > 0$ ，D 错误，排除 D。

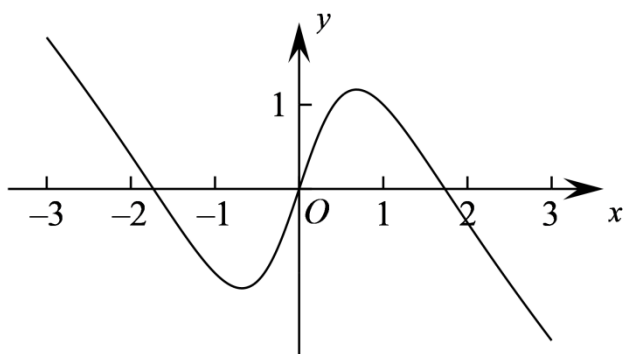
【题型2】由函数图像选择解析式

基础知识

方法技巧

- 1、从定义域值域判断图像位置；
- 2、从奇偶性判断图像的对称性；
- 3、从周期性判断图像循环往复；
- 4、从单调性判断大致变化趋势；
- 5、从特殊点排除错误选项。

3. (2022·全国·统考高考真题) 如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3, 3]$ 的大致图像, 则该函数是 ()



A. $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

B. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$

D. $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$

【答案】A

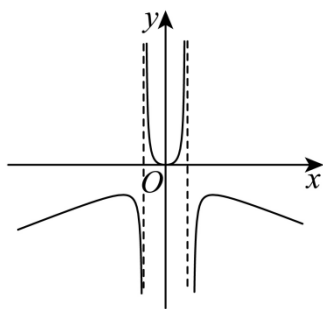
【解析】设 $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$, 则 $f(1) = 0$, 故排除 B;

设 $h(x) = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $0 < \cos x < 1$,

所以 $h(x) = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1} < \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$, 故排除 C;

设 $g(x) = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$, 则 $g(3) = \frac{2 \sin 3}{10} > 0$, 故排除 D.

4. (2024·湖南·二模) 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



A. $f(x) = -\frac{2x^2}{|x|-1}$

B. $f(x) = -\frac{2x^2}{|x|+1}$

C. $f(x) = -\frac{2x}{|x|-1}$

D. $f(x) = -\frac{2|x|}{x^2-1}$

【答案】A

【分析】根据函数的奇偶性和定义域，利用排除法即可得解.

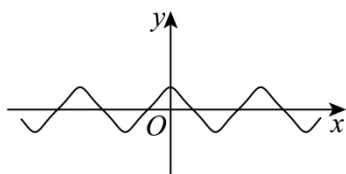
【详解】由图可知，函数图象对应的函数为偶函数，排除 C；

由图可知，函数的定义域不是实数集.故排除 B；

由图可知，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $y \rightarrow -\infty$ ，

而对于 D 选项，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $y \rightarrow 0$ ，故排除 D.

5. (2024·广东广州·一模) 已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



A. $f(x) = \sin(\tan x)$

B. $f(x) = \tan(\sin x)$

C. $f(x) = \cos(\tan x)$

D. $f(x) = \tan(\cos x)$

【答案】D

【分析】利用函数的奇偶性、定义域结合三角函数的性质判定即可.

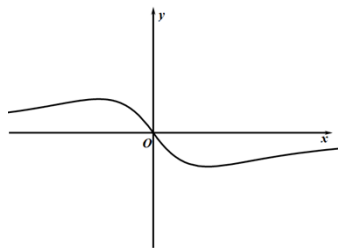
【详解】观察图象可知函数为偶函数，

对于 A， $f(-x) = \sin(\tan(-x)) = \sin(-\tan x) = -\sin(\tan x) = -f(x)$ ，为奇函数，排除；

对于 B， $f(-x) = \tan(\sin(-x)) = \tan(-\sin x) = -\tan(\sin x) = -f(x)$ ，为奇函数，排除；

同理，C、D 选项为偶函数，而对于 C 项，其定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ ，不是 $\mathbb{R}$ ，舍去，故 D 正确.

【巩固练习 1】(2024·安徽马鞍山·三模) 已知函数 $y = f(x)$ 的大致图象如图所示，则 $y = f(x)$ 的解析式可能为 ()



A. $f(x) = \frac{x \cdot 3^x}{9^x - 1}$

B. $f(x) = \frac{x \cdot 3^x}{9^x + 1}$

C. $f(x) = \frac{\ln(|x|+1)}{x^2+1}$

D. $f(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\ln(|x|+2)}$

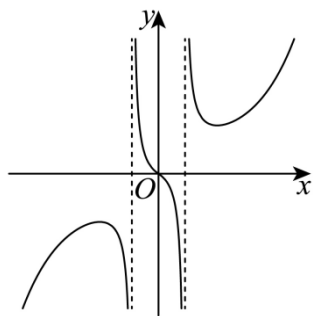
【答案】D

【解析】对于选项 A：因为 $f(1) = \frac{3}{8} > 0$ ，与图象不符，故 A 错误；

对于选项 B：因为 $f(1) = \frac{3}{10} > 0$ ，与图象不符，故 B 错误；

对于选项 C：因为 $f(1) = \frac{\ln 2}{2} > 0$ ，与图象不符，故 C 错误

【巩固练习 2】（2024·宁夏固原·一模）已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（ ）



A. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{4|x| - 3}$

B. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3 - 4|x|}$

C. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4|x| - 3}$

D. $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$

【答案】A

【解析】对于 B，当 $x > 1$ 时， $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3 - 4x}$ ，易知 $e^x - e^{-x} > 0$ ， $3 - 4x < 0$ ，

则 $f(x) < 0$ ，不满足图象，故 B 错误；

对于 C， $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4|x| - 3}$ ，定义域为 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ ，

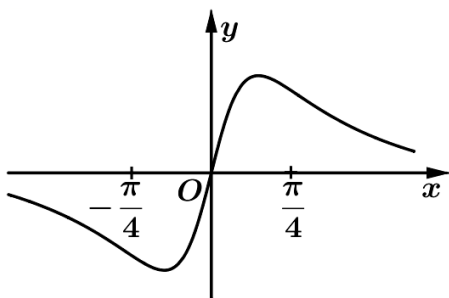
又 $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{4|-x|-3} = \frac{e^x + e^{-x}}{4|x|-3} = f(x)$ ，则 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 C 错误；

对于 D，当 $x > 1$ 时， $f(x) = \frac{x}{|x|-1} = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ ，

由反比例函数的性质可知， $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，故 D 错误；

检验选项 A， $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{4|x|-3}$ 满足图中性质，故 A 正确。

【巩固练习 3】(2021·浙江·高考真题) 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ ， $g(x) = \sin x$ ，则图象为如图的函数可能是 ()



A. $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$

B. $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$

C. $y = f(x)g(x)$

D. $y = \frac{g(x)}{f(x)}$

【答案】D

【分析】由函数的奇偶性可排除 A、B，结合导数判断函数的单调性可判断 C，即可得解。

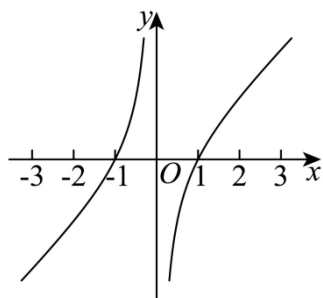
【详解】对于 A， $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4} = x^2 + \sin x$ ，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除 A；

对于 B， $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4} = x^2 - \sin x$ ，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除 B；

对于 C， $y = f(x)g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\sin x$ ，则 $y' = 2x\sin x + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\cos x$ ，

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时， $y' = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ ，与图象不符，排除 C。

【巩固练习 4】(2024·天津·二模) 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



$$A. f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2+1}$$

$$B. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$$

$$C. f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

$$D. f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$$

【答案】C

【分析】根据奇偶性判断 A；验证 $f(1)$ 的值判断 B；根据奇偶性、单调性判断 C；根据单调性判断 D.

【详解】由图象知，该函数图象关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(1)=0$ ，

对于 A， $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{(-x)^2+1} = \frac{\ln|x|}{x^2+1} = f(x)$ ，为偶函数，故 A 错误；

对于 B， $f(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{1^2} = e - \frac{1}{e} \neq 0$ ，故 B 错误；

对于 C， $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x}$ ，为奇函数，当 $x>0$ 时， $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$ ，

因为 $y=x$ ， $y=-\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调递增函数，所以 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，故 C 正确；

对于 D，当 $x>0$ 时， $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ，所以 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$f(x)$ 单调递增，当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，故 D 错误

【题型 3】函数图像与实际问题

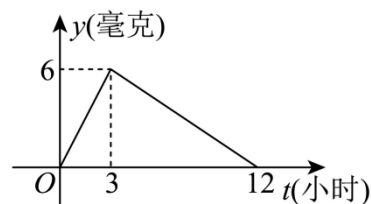
基础知识

方法技巧

- (1) 从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置.
- (2) 从函数的单调性，判断图象的变化趋势；
- (3) 从函数的奇偶性，判断图象的对称性；
- (4) 从函数的特征点，排除不合要求的图象；
- (5) 根据图象的变化趋势，设置分段函数节点

6. 某研究所开发一种新药，据监测，一次性服药 $t(0 \leq t \leq 12)$ 小时后每毫升血液中的含药量 y （毫克）

与时间 t （小时）之间近似满足图中所示的曲线关系. 据测定，每毫升血液中含药量不少于 4 毫克时治疗疾病有效，则 12 小时内药物在体内对治疗疾病一直有效所持续的时长为（ ）

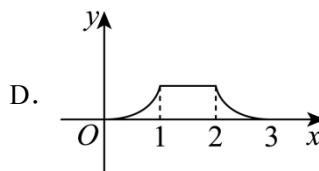
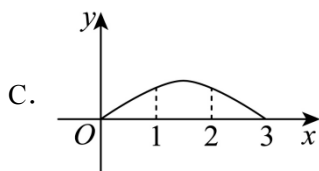
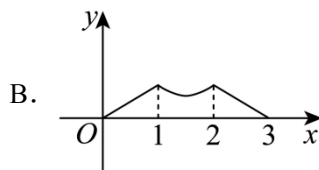
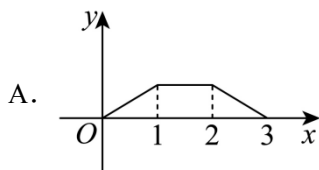
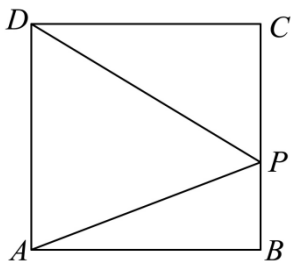


A. 4 小时

B. 5 小时

C. 6 小时

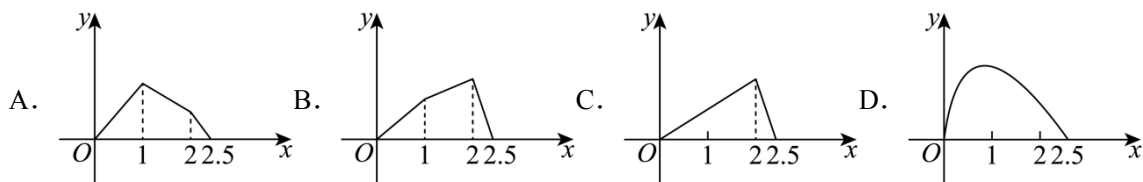
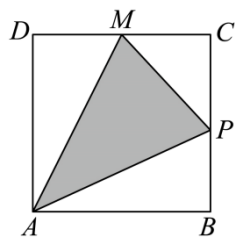
D. 7 小时

【答案】A**【分析】**首先求出函数解析式，再令 $y \geq 4$ 求出相应的 t 的取值范围，即可得解.**【详解】**当 $0 \leq t \leq 3$ 时，则 $y = \frac{6}{3}t = 2t$ ，当 $3 < t \leq 12$ 时，设函数为 $y = kt + b$ ，将 $(3, 6)$ ， $(12, 0)$ 代入可得 $\begin{cases} 6 = 3k + b \\ 0 = 12k + b \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ b = 8 \end{cases}$ ，所以 $y = -\frac{2}{3}t + 8$ ，所以 $y = \begin{cases} 2t, 0 \leq t \leq 3 \\ -\frac{2}{3}t + 8, 3 < t \leq 12 \end{cases}$ ，要使 $y \geq 4$ ，则 $\begin{cases} 2t \geq 4 \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{2}{3}t + 8 \geq 4 \\ 3 < t \leq 12 \end{cases}$ ，解得 $2 \leq t \leq 3$ 或 $3 < t \leq 6$ ，综上所述： $2 \leq t \leq 6$ ，所以有效所持续的时长为 $6 - 2 = 4$ 个小时.**【巩固练习 1】**(2024·山东·二模) 如图所示，动点 P 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的边上沿 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 运动， x 表示动点 P 由 A 点出发所经过的路程， y 表示 $\triangle APD$ 的面积，则函数 $y = f(x)$ 的大致图像是 ().**【答案】A****【分析】**分 $x \in [0, 1]$ ， $x \in [1, 2]$ ， $x \in [2, 3]$ 求出解析式，然后可知图象.**【详解】**当 $x \in [0, 1]$ 时， $y = \frac{x}{2}$ ，是一条过原点的线段；

当 $x \in [1, 2]$ 时, $y = \frac{1}{2}$, 是一段平行于 x 轴的线段;

当 $x \in [2, 3]$ 时, $y = \frac{3-x}{2}$, 图象为一条线段.

【巩固练习 2】(2024·广东佛山·模拟预测) 如图, 点 P 在边长为 1 的正方形边上运动, M 是 CD 的中点, 当点 P 沿 $A-B-C-M$ 运动时, 点 P 经过的路程 x 与 $\triangle APM$ 的面积 y 的函数 $y = f(x)$ 的图象的形状大致是 ()



E. 均不是

【答案】A

【解析】当点 P 在 AB 上时, $y = \frac{1}{2} \times AP \times BC = \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{当点 } P \text{ 在 } BC \text{ 上时, } y &= AB \times BC - \frac{1}{2} \times AB \times BP - \frac{1}{2} \times AD \times DM - \frac{1}{2} \times MC \times CP \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (2-x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{当点 } P \text{ 在 } CM \text{ 上时, } y = \frac{1}{2} \times AD \times PM = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - x \right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x,$$

其中 A 选项符合要求, B、C、D 都不符合要求, 故 A 正确.

【题型 4】表达式含参数的图象

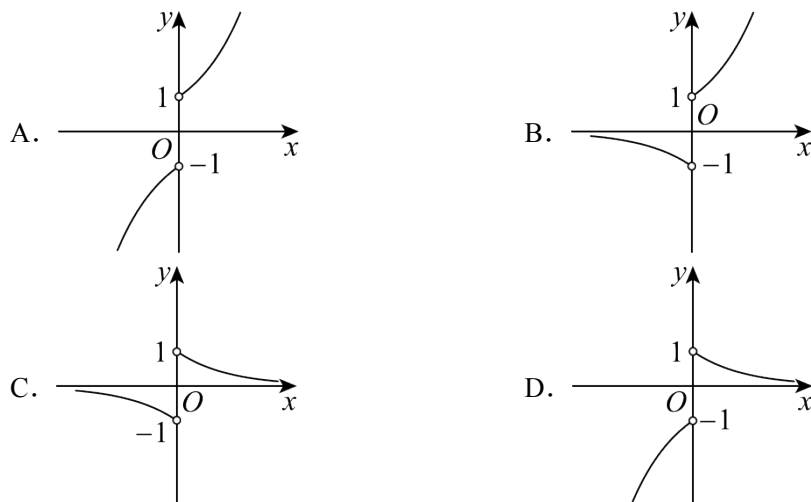
基础知识

根据参数的不同情况对每个选项逐一分析, 推断出合理的图像位置关系, 排除相互矛盾的位置关系, 以得出正确选项.

7. (多选

）我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形少数时难入微.数形结合百般好，割裂分家万事休.”在数学的学习和研究中，常用两数的图像来研究函数的性质，也常用函数的解

析式琢磨函数图象的特征，如函数 $y = \frac{xa^x}{|x|}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像的大致形状可能是 ()



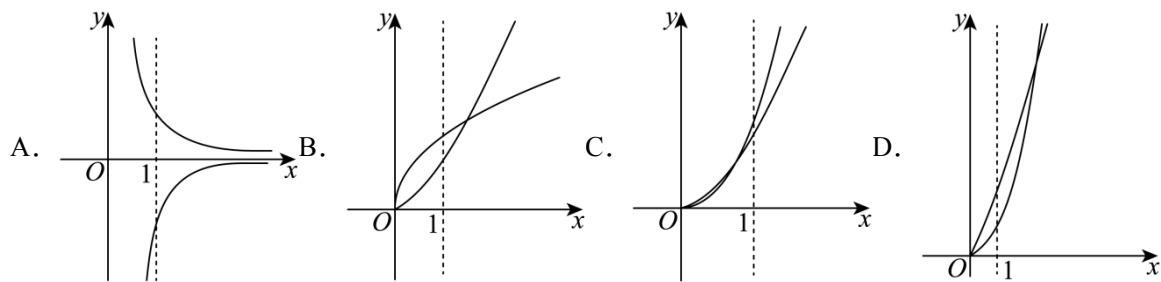
【答案】BD

【分析】按 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 分类，结合指数函数图象判断即得.

【详解】当 $0 < a < 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，当 $x < 0$ 时， $y = -a^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递增， $y < -1$ ，当 $x > 0$ 时， $y = a^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减， $0 < y < 1$ ，A 不满足，D 符合题意；

当 $a > 1$ 时，函数 $y = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，当 $x < 0$ 时， $y = -a^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减， $-1 < y < 0$ ，当 $x > 0$ 时， $y = a^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增， $y > 1$ ，C 不满足，B 符合题意.

8. (2024·重庆·模拟预测) 已知函数 $f(x) = x^\alpha$ ($x > 0$)， α 为实数， $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，在同一直角坐标系中， $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的大致图象不可能是 ()



【答案】C

【解析】由 $f(x) = x^\alpha$ ，可得 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

对于 A，当 $\alpha = -1$ 时，在第一象限上 $f(x) = x^{-1}$ 递减，对应 $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ 图象在第四象限且递增，故 A 项符合；

对于 B, C, D, 在第一象限上 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上都单调递增，故 $\alpha > 0$ 且 $\alpha - 1 > 0$ ，则 $\alpha > 1$.

又由 $f(x) = f'(x)$ 可得 $x = \alpha > 1$ ，即 $f(x) = x^\alpha$ 与 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ 的图象交点横坐标应大于 1，显然 C 项不符合，B, D 项均符合.

9. 设 a 、 b 为常数，若 $a > 1, b < -1$ ，则函数 $y = a^x + b$ 的图象必定不经过第_____象限

【答案】二

【分析】由指数函数的性质与图象的平移可得.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/316203024000011043>