

湖北省浠水县实验中学 2023 届高三 3 月大联考数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ ，则不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{2}{3})$ B. $(-\infty, \frac{2}{3})$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

2. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\}$ ，集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$ ，则 $M \cup N =$ ()

- A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\mathbf{R}$

3. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ，若不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$ 有解，则 t 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2\ln 2)$ B. $(-\infty, -2\ln 2]$
C. $(-\infty, -11 + 2\ln 2)$ D. $(-\infty, -11 + 2\ln 2]$

4. M、N 是曲线 $y = \pi \sin x$ 与曲线 $y = \pi \cos x$ 的两个不同的交点，则 $|MN|$ 的最小值为 ()

- A. π B. $\sqrt{2}\pi$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. 2π

5. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 d_1 ，到直线 $l: 3x + 4y + 12 = 0$ 的距离为 d_2 ，则 $d_1 + d_2$ 的最小值为 ()

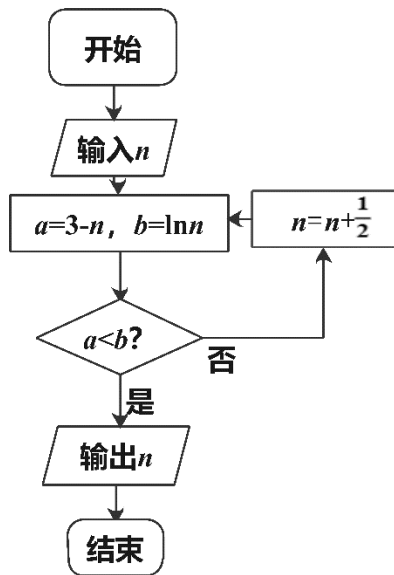
- A. 2 B. $\frac{15}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$ ， $\sin B = \cos A \sin C$ ， $S_{\triangle ABC} = 6$ ， P 为线段 AB 上的一点，且

$\overrightarrow{CP} = x \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + y \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{7}{12} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 12 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

7. 执行如图所示的程序框图若输入 $n = \frac{1}{2}$ ，则输出的 n 的值为 ()



- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3

8. 某高中高三（1）班为了冲刺高考，营造良好的学习氛围，向班内同学征集书法作品贴在班内墙壁上，小王，小董，小李各写了一幅书法作品，分别是：“入班即静”，“天道酬勤”，“细节决定成败”，为了弄清“天道酬勤”这一作品是谁写的，班主任对三人进行了问话，得到回复如下：

小王说：“入班即静”是我写的；

小董说：“天道酬勤”不是小王写的，就是我写的；

小李说：“细节决定成败”不是我写的.

若三人的说法有且仅有一人是正确的，则“入班即静”的书写者是（ ）

- A. 小王或小李 B. 小王 C. 小董 D. 小李

9. 天干地支，简称为干支，源自中国远古时代对天象的观测.“甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸”称为十天干，“子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥”称为十二地支.干支纪年法是天干和地支依次按固定的顺序相互配合组成，以此往复，60 年为一个轮回.现从农历 2000 年至 2019 年共 20 个年份中任取 2 个年份，则这 2 个年份的天干或地支相同的概率为（ ）

- A. $\frac{2}{19}$ B. $\frac{9}{95}$ C. $\frac{48}{95}$ D. $\frac{5}{19}$

10. 设函数 $f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + m$ ，当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ ，则 $m =$ （ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{7}{2}$

11. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，上顶点为点 A ，延长 AF_2 交椭圆 Γ 于点 B ，若

$\triangle ABF_1$ 为等腰三角形，则椭圆 Γ 的离心率 $e =$

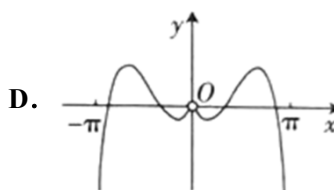
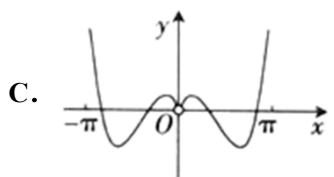
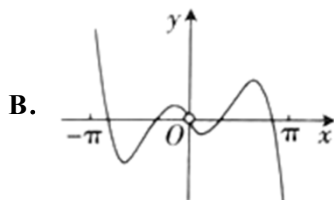
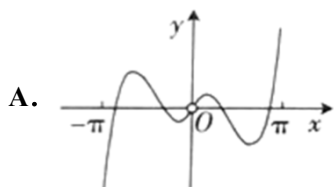
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

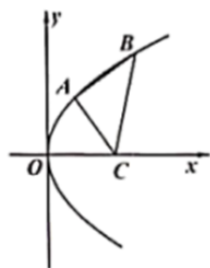
12. 函数 $f(x) = x^3 \cos x + x \ln |x|$ 在 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 的图象大致为 ()



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m^2-1} = 1$ 的一个焦点坐标为 $(0, 1)$ ，则 C 的长轴长为_____.

14. 如图所示，点 $A(1, 2)$ ， B 均在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边为 BC ，点 C 在 x 轴的正半轴上，则点 B 的坐标是_____.

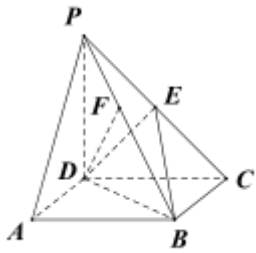


15. $\left(ax^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中 x^3 项系数为 160，则 a 的值为_____.

16. 春天即将来临，某学校开展以“拥抱春天，播种绿色”为主题的植物种植实践体验活动. 已知某种盆栽植物每株成活的概率为 p ，各株是否成活相互独立. 该学校的某班随机领养了此种盆栽植物 10 株，设 X 为其中成活的株数，若 X 的方差 $DX = 2.1$ ， $P(X = 3) < P(X = 7)$ ，则 $p =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

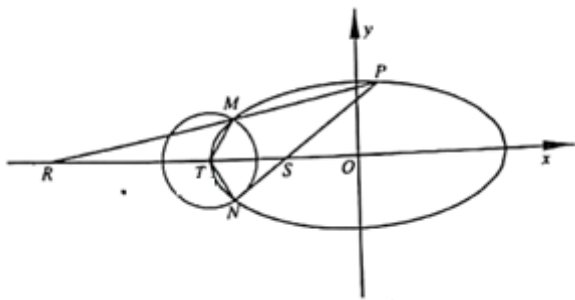
17. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是棱 PC 上的一点，满足 $PA \parallel$ 平面 BDE .



(I) 证明: $PE = EC$;

(II) 设 $PD = AD = BD = 1$, $AB = \sqrt{2}$, 若 F 为棱 PB 上一点, 使得直线 DF 与平面 BDE 所成角的大小为 30° , 求 $PF:FB$ 的值.

18. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 以椭圆 C 左顶点 T 为圆心作圆 $T: (x+2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 设圆 T 与椭圆 C 交于点 M 与点 N .



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 求 $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TN}$ 的最小值, 并求此时圆 T 的方程;

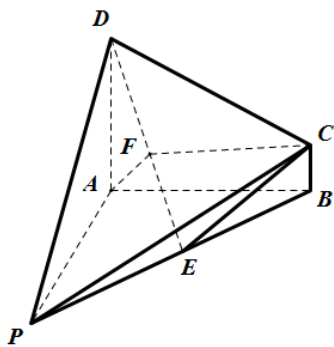
(3) 设点 P 是椭圆 C 上异于 M, N 的任意一点, 且直线 MP, NP 分别与 x 轴交于点 R, S , O 为坐标原点, 求证: $|OR| \cdot |OS|$ 为定值.

19. (12 分) 已知 $f(x) = |2x+5| - \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 1$ 的解集;

(2) 记 $f(x)$ 的最小值为 m , 且正实数 a, b 满足 $\frac{4}{a-mb} + \frac{4}{b-ma} = a+b$. 证明: $a+b \leq 2$.

20. (12 分) 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB$, 在四边形 $ABCD$ 中, $DA \perp AB$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = 2BC = 2$, E 为 PB 的中点, 连接 DE , F 为 DE 的中点, 连接 AF .



(1) 求证: $AF \perp PB$.

(2) 求二面角 $A-EC-D$ 的余弦值.

21. (12 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 $A(1, 0), B(0, 1)$, 点 P 满足 $\vec{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{OB} = \vec{OP}$ (其中 O 为坐标原点), 点 B, P 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设椭圆的右焦点为 F , 若经过点 F 的直线 $l: y = kx + m (k < 0, m > 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切. $\triangle MNF$ 的周长是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

22. (10 分) 已知 O 为坐标原点, 点 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0), S(3\sqrt{2}, 0)$, 动点 N 满足 $|NF_1| + |NS| = 4\sqrt{3}$, 点 P 为线段 NF_1 的中点, 抛物线 $C: x^2 = 2my (m > 0)$ 上点 A 的纵坐标为 $\sqrt{6}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OS} = 6\sqrt{6}$.

(1) 求动点 P 的轨迹曲线 W 的标准方程及抛物线 C 的标准方程;

(2) 若抛物线 C 的准线上一点 Q 满足 $OP \perp OQ$, 试判断 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 是否为定值, 若是, 求这个定值; 若不是, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】

由导数确定函数的单调性, 利用函数单调性解不等式即可.

【详解】

函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$, 可得 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$\because e^{1-x} > 0, e^{2x-1} > 0$,

故不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集等价于不等式 $e^{1-x} > e^{2x-1}$ 的解集.

$1-x > 2x-1$.

$\therefore x < \frac{2}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了利用导数判定函数的单调性, 根据单调性解不等式, 属于中档题.

2. D

【解析】

试题分析: 由题 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 > 0\} = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$,

$N = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\} = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\} = N = \{x | x \geq -2\}$, $\therefore M \cup N = R$, 选 D

考点: 集合的运算

3. C

【解析】

先求得 $f'(x) = \frac{2ax^2 - x + 1}{x}$ ($x > 0$), 由于函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 转化为方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$

有两个不相等的正实数根, 根据 $\Delta, x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$, 求出 a 的取值范围, 而 $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$ 有解,

通过分裂参数法和构造新函数 $h(a) = -\frac{5}{4a} - 1 - \ln(2a)$ ($0 < a < \frac{1}{8}$), 通过利用导数研究 $h(a)$ 单调性、最值, 即可得

出 t 的取值范围.

【详解】

由题可得: $f'(x) = \frac{2ax^2 - x + 1}{x}$ ($x > 0$),

因为函数 $f(x) = ax^2 - x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ,

所以方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$ 有两个不相等的正实数根,

$$\text{于是有} \begin{cases} \Delta = 1 - 8a > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2a} > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0, \end{cases} \text{解得 } 0 < a < \frac{1}{8}.$$

若不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 2(x_1 + x_2) + t$ 有解,

$$\text{所以 } t < [f(x_1) + f(x_2) - 2(x_1 + x_2)]_{\max}$$

$$\text{因为 } f(x_1) + f(x_2) - 2(x_1 + x_2) = ax_1^2 - x_1 + \ln x_1 + ax_2^2 - x_2 + \ln x_2 - 2(x_1 + x_2)$$

$$= a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 3(x_1 + x_2) + \ln(x_1 x_2) = -\frac{5}{4a} - 1 - \ln(2a).$$

$$\text{设 } h(a) = -\frac{5}{4a} - 1 - \ln(2a) \left(0 < a < \frac{1}{8} \right),$$

$$h'(a) = \frac{5 - 4a}{4a^2} > 0, \text{ 故 } h(a) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{8} \right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{故 } h(a) < h\left(\frac{1}{8}\right) = -11 + 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } t < -11 + 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } t \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -11 + 2\ln 2).$$

故选: C.

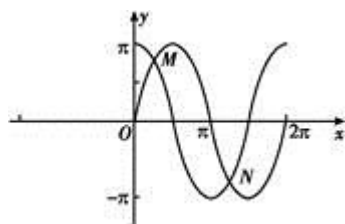
【点睛】

本题考查利用导数研究函数单调性、最值来求参数取值范围, 以及运用分离参数法和构造函数法, 还考查分析和计算能力, 有一定的难度.

4. C

【解析】

两函数的图象如图所示, 则图中 $|MN|$ 最小,



设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5}{4}\pi,$$

$$|x_1 - x_2| = \pi,$$

$$|y_1 - y_2| = |\pi \sin x_1 - \pi \cos x_2|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

$$= \sqrt{2} \pi,$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{\pi^2 + 2\pi^2} = \sqrt{3} \pi. \text{ 故选 C.}$$

5. A

【解析】

分析：题设的直线与抛物线是相离的， $d_1 + d_2$ 可以化成 $d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，其中 $d_1 + 1$ 是点 P 到准线的距离，也就是 P 到焦点的距离，这样我们从几何意义得到 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值，从而得到 $d_1 + d_2$ 的最小值。

详解：由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 3x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$ ① 得到 $3y^2 + 16y + 48 = 0$ ， $\Delta = 256 - 12 \times 48 < 0$ ，故①无解，

所以直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 与抛物线是相离的。

$$\text{由 } d_1 + d_2 = d_1 + 1 + d_2 - 1,$$

而 $d_1 + 1$ 为 P 到准线 $x = -1$ 的距离，故 $d_1 + 1$ 为 P 到焦点 $F(1, 0)$ 的距离，

$$\text{从而 } d_1 + 1 + d_2 \text{ 的最小值为 } F \text{ 到直线 } 3x + 4y + 12 = 0 \text{ 的距离 } \frac{|1 \times 3 + 0 \times 4 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3,$$

故 $d_1 + d_2$ 的最小值为 2，故选 A.

点睛：抛物线中与线段的长度相关的最值问题，可利用抛物线的几何性质把动线段的长度转化为到准线或焦点的距离来求解。

6. A

【解析】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB = c$ ， $BC = a$ ， $AC = b$ ，结合三角形的内角和及和角的正弦公式化简可求 $\cos C = 0$ ，可得

$C = \frac{\pi}{2}$ ，再由已知条件求得 $a = 4$ ， $b = 3$ ， $c = 5$ ，考虑建立以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y

轴建立直角坐标系，根据已知条件结合向量的坐标运算求得 $4x+3y=12$ ，然后利用基本不等式可求得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

【详解】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ，

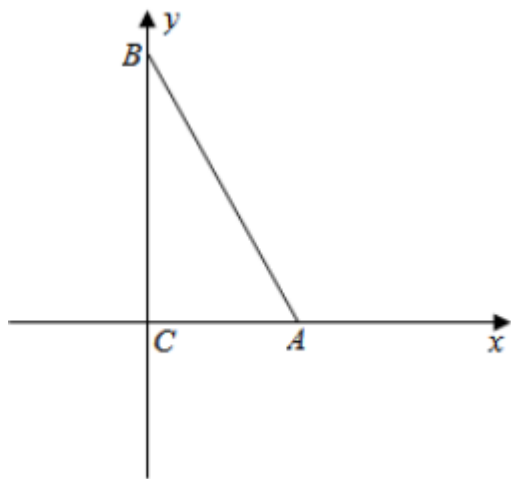
Q $\sin B = \cos A \sin C$ ，即 $\sin(A+C) = \cos A \sin C$ ，即 $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \cos A \sin C$ ， $\therefore \sin A \cos C = 0$ ，

Q $0 < A < \pi$ ， $\therefore \sin A > 0$ ， $\therefore \cos C = 0$ ，Q $0 < C < \pi$ ， $\therefore C = \frac{\pi}{2}$ ，

Q $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9$ ，即 $cb \cos A = 9$ ，又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 6$ ， $\therefore \tan A = \frac{bc \sin A}{bc \cos A} = \frac{4}{3} = \frac{a}{b}$ ，

Q $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 6$ ，则 $ab = 12$ ，所以， $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ ab = 12 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$ ， $\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y 轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



则 $C(0,0)$ 、 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$ ，

P 为线段 AB 上的一点，则存在实数 λ 使得 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} = \lambda(-3, 4) = (-3\lambda, 4\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，

$\therefore \vec{CP} = \vec{CA} + \vec{CB} = (3-3\lambda, 4\lambda)$ ，

设 $\vec{e}_1 = \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}$ ， $\vec{e}_2 = \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$ ，则 $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ ， $\therefore \vec{e}_1 = (1, 0)$ ， $\vec{e}_2 = (0, 1)$ ，

Q $\vec{CP} = x \cdot \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} + y \cdot \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x, y)$ ， $\therefore \begin{cases} x = 3-3\lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}$ ，消去 λ 得 $4x+3y=12$ ， $\therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ，

所以， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right) = \frac{x}{3y} + \frac{y}{4x} + \frac{7}{12} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{4x}} + \frac{7}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12}$ ，

当且仅当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ 时，等号成立，

因此， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12}$.

故选：A.

【点睛】

本题是一道构思非常巧妙的试题，综合考查了三角形的内角和定理、两角和的正弦公式及基本不等式求解最值问题，解题的关键是理解 $\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$ 是一个单位向量，从而可用 x 、 y 表示 $\overrightarrow{CP}$ ，建立 x 、 y 与参数的关系，解决本题的第二个关键点在于由 $x = 3 - 3\lambda$ ， $y = 4\lambda$ 发现 $4x + 3y = 12$ 为定值，从而考虑利用基本不等式求解最小值，考查计算能力，属于难题.

7. C

【解析】

由程序语言依次计算，直到 $a < b$ 时输出即可

【详解】

程序的运行过程为

n	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
a	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
b	$\ln \frac{1}{2}$	0	$\ln \frac{3}{2}$	$\ln 2$	$\ln \frac{5}{2}$

当 $n=2$ 时， $1 > \ln 2$ ； $n = \frac{5}{2}$ 时， $\frac{1}{2} < \ln \frac{5}{2}$ ，此时输出 $n = \frac{5}{2}$.

故选：C

【点睛】

本题考查由程序框图计算输出结果，属于基础题

8. D

【解析】

根据题意，分别假设一个正确，推理出与假设不矛盾，即可得出结论.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/316215001105010235>