2025 届宜丰中学高考数学二模试卷

考生请注意：
1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

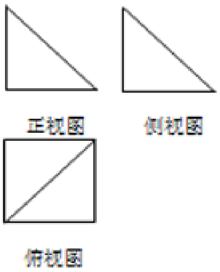
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

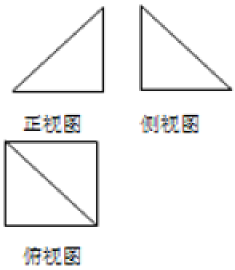
1．$f\left(x\right)$是定义在$\left(0,+\infty\right)$上的增函数，且满足：$f\left(x\right)$的导函数存在，且$\dfrac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}<x$，则下列不等式成立的是（　　）

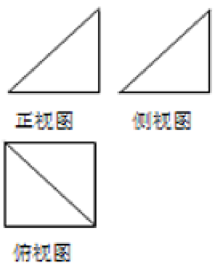
A．$f\left(2\right)<2f\left(1\right)$　　B．$3f\left(3\right)<4f\left(4\right)$

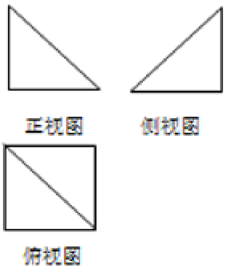
C．$2f\left(3\right)<3f\left(4\right)$　　D．$3f\left(2\right)<2f\left(3\right)$

2．已知底面为正方形的四棱锥，其一条侧棱垂直于底面，那么该四棱锥的三视图可能是下列各图中的（　　）

A．


B．


C．


D．


3．已知函数$f\left(x\right)=xe^{1-x}$，若对于任意的$x_0\in(0,e]$，函数$g(x)=\ln x-x^2+ax-f\left(x_0\right)+1$在$(0,e]$内都有两个不同的零点，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$(1,e]$　　B．$(e-\dfrac{2}{e},e]$　　C．$(e-\dfrac{2}{e},e+\dfrac{2}{e}]$　　D．$(1,e-\dfrac{2}{e}]$

4．方程$2(x-1)\sin\pi x+1=0$在区间$\left[-2,4\right]$内的所有解之和等于(　　)

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

5．已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上，$PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{14}$，$AB=4$，$CA=CB=\sqrt{10}$，面 $PAB\perp$面 ABC，则球 O 的表面积为（　　）

A．$\frac{10\pi}{3}$　　B．$\frac{25\pi}{6}$　　C．$\frac{40\pi}{9}$　　D．$\frac{50\pi}{3}$

6．在一个数列中，如果$\forall n\in N^*$，都有$a_na_{n+1}a_{n+2}=k$（k为常数），那么这个数列叫做等积数列，k叫做这个数列的公积.已知数列$\{a_n\}$是等积数列，且$a_1=1$，$a_2=2$，公积为8，则$a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=$（　　）

A．4711　　B．4712　　C．4713　　D．4715

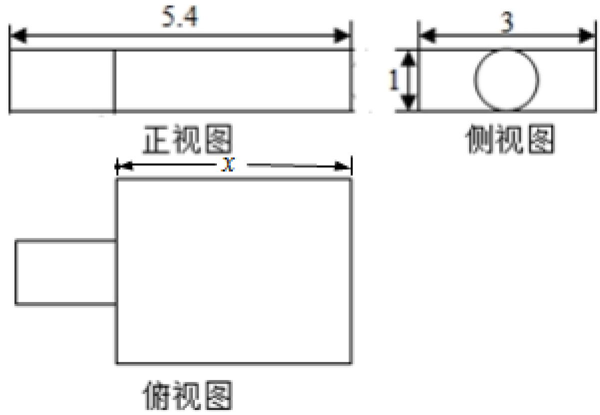
7．已知i是虚数单位，若$\frac{z}{1-i}=2i+1$，则$|z|=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{10}$　　D．10

8．设$(1+i)\cdot z=1-i$，则复数z的模等于(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

9．中国古代数学名著《九章算术》中记载了公元前344年商鞅督造的一种标准量器——商鞅铜方升，其三视图如图所示（单位：寸），若π取3，当该量器口密闭时其表面积为42.2（平方寸），则图中x的值为(　　)



A．3　　B．3.4　　C．3.8　　D．4

10．已知正四棱锥$S-ABCD$的侧棱长与底面边长都相等，E是SB的中点，则AE，SD所成的角的余弦值为（ ）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

11．关于函数$f(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$的单调性，下列叙述正确的是（　　）

A．单调递增　　B．单调递减　　C．先递减后递增　　D．先递增后递减

12．$(1+2x)(1+x)^5$的展开式中x^2的系数为（　　）

A．5　　B．10　　C．20　　D．30

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知A、B、C、P是同一球面上的四个点，其中$PA\perp$平面ABC，$\vee ABC$是正三角形，$PA=AB=3$

，则该球的表面积为______.

14．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，椭圆的焦距为 $2c$，过 C 外一点 $P(c,2c)$作线段 PF_1，PF_2 分别交椭圆 C 于点 A、B，若$|PA|=|AF_1|$，则 $\frac{|PF_2|}{|BF_2|}=$_____.

15．已知集合 $A=\{x\,\|\,x|<4,x\in Z\},B=\{1,m\}$，若 $A\cup B=A$，且 $3-m\in A$，则实数 m 所有的可能取值构成的集合是________.

16．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$ 的一条渐近线方程为 $x+y=0$，则 $a=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，M 为直线 $y=x-2$ 上动点，过点作 M 抛物线 $C:x^2=y$ 的两条切线 MA，MB，切点分别为 A，B，N 为 AB 的中点.

（1）证明:$MN\perp x$ 轴;

（2）直线 AB 是否恒过定点?若是，求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由.

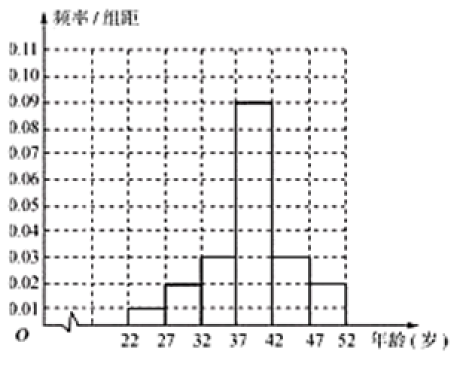
18．（12 分）已知函数 $f(x)=e^x-x^2+2a+b$（$x\in\mathbf{R}$）的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=bx$（e 为自然对数的底数）

（1）求 a,b 的值;

（2）若 $k\in Z$，且 $f(x)+\frac{1}{2}(3x^2-5x-2k)\geq 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 k 的最大值.

19．（12 分）武汉有“九省通衢”之称，也称为“江城”，是国家历史文化名城.其中著名的景点有黄鹤楼、户部巷、东湖风景区等等.

（1）为了解五·一”劳动节当日江城某旅游景点游客年龄的分布情况，从年龄在 22 岁到 52 岁的游客中随机抽取了 1000 人，制成了如图的频率分布直方图：



现从年龄在$\left[42,52\right]$内的游客中，采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从抽取的 10 人中随机抽取 4 人，记 4 人中年龄在$\left[47,52\right]$内的人数为ξ，求 $P\left(\xi=3\right)$；

（2）为了给游客提供更舒适的旅游体验，该旅游景点游船中心计划在 2020 年劳动节当日投入至少 1 艘至多 3 艘 A 型游船供游客乘坐观光.由 2010 到 2019 这 10 年间的数据资料显示每年劳动节当日客流量 X（单位：万人）都大于 1.将每年劳动节当日客流量数据分成 3 个区间整理得表：

劳动节当日客流量 X	$1<X<3$	$3\le X\le 5$	$X>5$
频数（年）	2	4	4

以这 10 年的数据资料记录的 3 个区间客流量的频率作为每年客流量在该区间段发生的概率，且每年劳动节当日客流量相互独立.

该游船中心希望投入的 A 型游船尽可能被充分利用，但每年劳动节当日 A 型游船最多使用量（单位：艘）要受当日客流量 X（单位：万人）的影响，其关联关系如下表：

劳动节当日客流量 X	$1<X<3$	$3\le X\le 5$	$X>5$
A 型游船最多使用量	1	2	3

若某艘 A 型游船在劳动节当日被投入且被使用，则游船中心当日可获得利润 3 万元；若某艘 A 型游船劳动节当日被投入却不被使用，则游船中心当日亏损 0.5 万元.记 Y（单位：万元）表示该游船中心在劳动节当日获得的总利润，Y 的数学期望越大游船中心在劳动节当日获得的总利润越大，问该游船中心在 2020 年劳动节当日应投入多少艘 A 型游船才能使其当日获得的总利润最大？

20.（12 分）设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，下顶点为 A，椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，ΔAF_1F_2 的面积是 $\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程.

（2）直线 l 与椭圆 C 交于 B，D 两点（异于 A 点），若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1，证明：直线 l 恒过定点，并求出该定点的坐标.

21.（12 分）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$.

（1）求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）过原点且倾斜角为 $\alpha(\frac{\pi}{4}\le\alpha<\frac{\pi}{3})$ 的射线 l 与曲线 C_1，C_2 分别交于 A,B 两点（异于原点），求 $\left|OA\right|\cdot\left|OB\right|$ 的取值范围.

22．（10 分）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=2$，**M** 是椭圆 **E** 上的一个动点，且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 **E** 的标准方程，

（2）若 $A(a,0)$，$B(0,b)$，四边形 ***ABCD*** 内接于椭圆 **E**，$AB//CD$，记直线 ***AD***，***BC*** 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1k_2 为定值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

根据 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数及 $\frac{f(x)}{f'(x)}$ 有意义可得 $f'(x)>0$，构建新函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，利用导数可得 $g(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，从而可得正确的选项.

【详解】

因为 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，故 $f'(x)\geq 0$.

又 $\frac{f(x)}{f'(x)}$ 有意义，故 $f'(x)\neq 0$，故 $f'(x)>0$，所以 $f(x)<xf'(x)$.

令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $g(3)>g(2)$ 即 $\frac{f(3)}{3}>\frac{f(2)}{2}$，

整理得到 $2f(3)>3f(2)$.

故选：D.

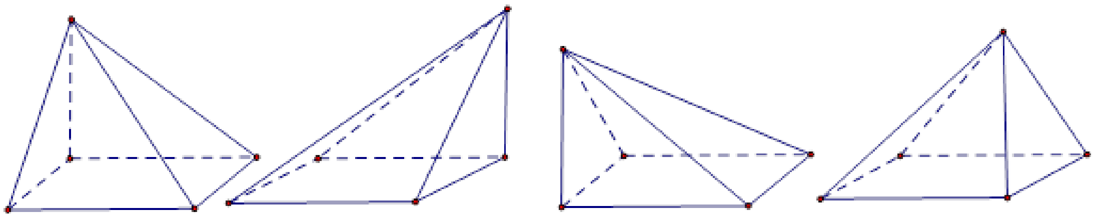
【点睛】

本题考查导数在函数单调性中的应用，一般地，数的大小比较，可根据数的特点和题设中给出的原函数与导数的关系构建新函数，本题属于中档题.

2、C

【解析】

试题分析：通过对以下四个四棱锥的三视图对照可知，只有选项 C 是符合要求的.



考点：三视图

3、D

【解析】

将原题等价转化为方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0,e]$ 内都有两个不同的根，先求导 $f'(x)$，可判断 $x \in (0,1)$ 时，

$f'(x) > 0$，$f(x)$ 是增函数；

当 $x \in (1,e)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 是减函数.因此 $0 < f(x) \le 1$，再令 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$，求导得

$F'(x) = -\dfrac{2x^2 - ax - 1}{x}$，结合韦达定理可知，要满足题意，只能是存在零点 x_1，使得 $F'(x) = 0$ 在 $(0,e)$ 有解，通过导数可判断当 $x \in (0,x_1)$ 时 $F'(x) > 0$，$F(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上是增函数；当 $x \in (x_1,e)$ 时 $F'(x) < 0$，$F(x)$ 在 (x_1,e) 上是减函数；则应满足 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$，再结合 $2x_1^2 - ax_1 - 1 = 0$，构造函数 $m(x) = \ln x + x^2 - 1$，求导即可求解；

【详解】

函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0,e]$ 内都有两个不同的零点，

等价于方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0,e]$ 内都有两个不同的根.

$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$，所以当 $x \in (0,1)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 是增函数；

当 $x \in (1,e)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 是减函数.因此 $0 < f(x) \le 1$.

设 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$，$F'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + a = -\dfrac{2x^2 - ax - 1}{x}$，

若 $F'(x) = 0$ 在 $(0,e)$ 无解，则 $F(x)$ 在 $(0,e]$ 上是单调函数，不合题意；所以 $F'(x) = 0$ 在 $(0,e)$ 有解，且易知只能有一个解.

设其解为x_1，当$x\in(0,x_1)$时$F'(x)>0$，$F(x)$在$(0,x_1)$上是增函数；

当$x\in(x_1,e)$时$F'(x)<0$，$F(x)$在(x_1,e)上是减函数.

因为$\forall x_0\in(0,e]$，方程$\ln x-x^2+ax+1=f(x_0)$在$(0,e]$内有两个不同的根，

所以$F(x)_{\max}=F(x_1)>1$，且$F(e)\le 0$.由$F(e)\le 0$，即$\ln e-e^2+ae+1\le 0$，解得$a\le e-\dfrac{2}{e}$.

由$F(x)_{\max}=F(x_1)>1$，即$\ln x_1-x_1^2+ax_1+1>1$，所以$\ln x_1-x_1^2+ax_1>0$.

因为$2x_1^2-ax_1-1=0$，所以$a=2x_1-\dfrac{1}{x_1}$，代入$\ln x_1-x_1^2+ax_1>0$，得$\ln x_1+x_1^2-1>0$.

设$m(x)=\ln x+x^2-1$，$m'(x)=\dfrac{1}{x}+2x>0$，所以$m(x)$在$(0,e)$上是增函数，

而$m(1)=\ln 1+1-1=0$，由$\ln x_1+x_1^2-1>0$可得$m(x_1)>m(1)$，得$1<x_1<e$.

由$a=2x_1-\dfrac{1}{x_1}$在$(1,e)$上是增函数，得$1<a<2e-\dfrac{1}{e}$.

综上所述$1<a\le e-\dfrac{2}{e}$，

故选：**D.**

【点睛】

本题考查由函数零点个数求解参数取值范围问题，构造函数法，导数法研究函数增减性与最值关系，转化与化归能力，属于难题

4、**C**

【解析】

画出函数$y=\sin\pi x$和$y=-\dfrac{1}{2(x-1)}$的图像，$y=\sin\pi x$和$y=-\dfrac{1}{2(x-1)}$均关于点$(1,0)$中心对称，计算得到答案.

【详解】

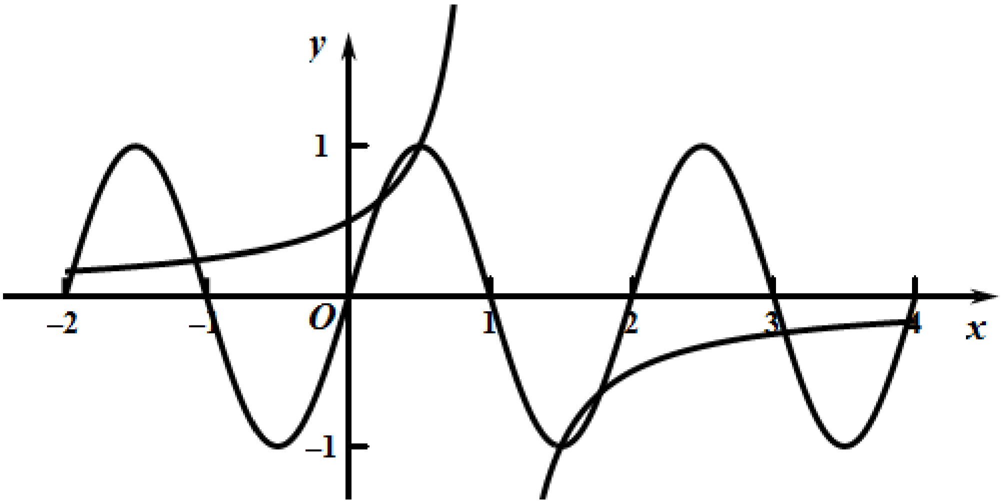
$2(x-1)\sin\pi x+1=0$，验证知$x=1$不成立，故$\sin\pi x=-\dfrac{1}{2(x-1)}$，

画出函数$y=\sin\pi x$和$y=-\dfrac{1}{2(x-1)}$的图像，

易知：$y=\sin\pi x$和$y=-\dfrac{1}{2(x-1)}$均关于点$(1,0)$中心对称，图像共有**8**个交点，

故所有解之和等于$4\times 2=8$.

故选：C.



【点睛】

本题考查了方程解的问题，意在考查学生的计算能力和应用能力，确定函数关于点$(1,0)$中心对称是解题的关键.

5、D

【解析】

由题意画出图形，找出△*PAB*外接圆的圆心及三棱锥*P*－*BCD*的外接球心*O*，通过求解三角形求出三棱锥*P*－*BCD*的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设*AB*的中点为*D*；

∵$PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{14}$，*AB*＝4，

∴△*PAB*为直角三角形，且斜边为*AB*，故其外接圆半径为：$r=\frac{1}{2}AB=AD=2$；

设外接球球心为*O*；

∵$CA=CB=\sqrt{10}$，面*PAB*⊥面*ABC*，

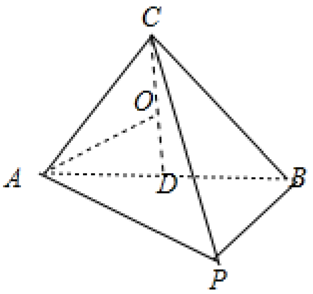
∴*CD*⊥*AB*可得*CD*⊥面*PAB*；且$DC=\sqrt{CA^2-AD^2}=\sqrt{6}$.

∴*O*在*CD*上；

故有：$AO^2=OD^2+AD^2\Rightarrow R^2=(\sqrt{6}-R)^2+r^2\Rightarrow R=\frac{5}{\sqrt{6}}$；

∴球*O*的表面积为：$4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{50\pi}{3}$.

故选：*D*.



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的求法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题.

6、**B**

【解析】

计算出 a_3 的值，推导出 $a_{n+3}=a_n\left(n\in N^*\right)$，再由 $2020=3\times673+1$，结合数列的周期性可求得数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 2020 项和.

【详解】

由题意可知 $a_na_{n+1}a_{n+2}=8$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq0$，则 $a_1a_2a_3=8$，$\therefore a_3=\dfrac{8}{a_1a_2}=4$，

由 $a_na_{n+1}a_{n+2}=8$，得 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=8$，$\therefore a_na_{n+1}a_{n+2}=a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$，$\therefore a_{n+3}=a_n$，

Q $2020=3\times673+1$，因此，$a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=673\left(a_1+a_2+a_3\right)+a_1=673\times7+1=4712$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查数列求和，考查了数列的新定义，推导出数列的周期性是解答的关键，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

7、**C**

【解析】

根据复数模的性质计算即可.

【详解】

因为 $\dfrac{z}{1-i}=2i+1$，

所以 $z=(1-i)(2i+1)$，

$|z|=|1-i|\cdot|2i+1|=\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$，

故选：*C*

【点睛】