结构动力学总结

（二）

（2003秋）

第6章

多自由度体系的运动方程

第6章 多自由度体系的运动方程

- **直接平衡法：**

根据单元的刚度阵、质量阵直接建立总体结构的相应矩阵，进而建立结构的运动方程。

- **Lagrange方法：**

根据系统的总动能、总位能建立结构的运动方程。

- **特点：**

直接平衡法：适合计算机编程。

Lagrange方法：适用于描述一些复杂的具有几何非线性系统的运动。

第6章 多自由度体系的运动方程（续）

➢ 多自由度体系运动方程：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{p(t)\}$$

➢ 建立多自由度体系运动方程的一般方法：

重点：多自由度体系总动能和应变能的计算公式。

$$T=\frac{1}{2}\{\dot{u}\}^T[M]\{\dot{u}\} \qquad V=\frac{1}{2}\{u\}^T[K]\{u\}$$

➢ 多自由度体系问题自由度的缩减：

运动约束法；静力凝聚法；混合方法。

第7章

多自由度体系动力反应分析

第7章 多自由度体系动力反应分析

➢ 运动方程的特征方程和频率方程：

$$\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)\left\{\phi\right\}=0$$

$$\left|\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right|=0$$

➢ 多自由度体系的自振频率和振型：

频率方程展开可写成如下多项式

$$a_N(\omega^2)^N+a_{N-1}(\omega^2)^{N-1}+\cdots a_1\omega^2+a_0=0$$

可求得N个根

$$\omega_1<\omega_2<\omega_3<\cdots<\omega_N$$

为多自由度结构自振频率，说明结构自由振动时以固定的频率振动，即以自振频率振动。

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

分别将结构的自振频率代入运动方程的特征方程得到与自振频率对应的各阶振型

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

振型为结构按某一自振频率自由振动时，不同自由度位移（振动）的比例关系。

自振频率和振型均属于结构的动力特性。

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ 振型的归一化（标准化）：

(1) 特定坐标的归一化方法。指定振型向量中的某一坐标值为1，其它元素值按比例确定。

(2) 最大位移值的归一化方法，将振型向量中各元素除以最大值。

(3) 正交归一化。

$$\{\overline{\phi}\}_n = \{\phi\}_n / \sqrt{M_n}, \quad M_n = \{\phi_n\}^T [M] \{\phi\}_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ 振型的正交性：

对于N各振型和自振频率

$$\{\phi\}_n,\ \ \omega_n,\ \ n=1,2,\cdots,N$$

满足正交条件

$$\{\phi\}_m^T[M]\{\phi\}_n=0,\quad m\neq n$$

$$\{\phi\}_m^T[K]\{\phi\}_n=0,\quad m\neq n$$

证明方法，利用特征方程（即自振频率及其振型满足的方程）证明。

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ 振型质量、振型刚度及与自振频率的关系：

$$M_n = \{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n$$

$$K_n = \{\phi\}_n^T [K] \{\phi\}_n$$

$$\omega_n = \sqrt{K_n / M_n}$$

与单自由度体系三参数关系的形式完全相同。

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ 振型叠加法：

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n q_n(t)$$

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t), \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

M_n、C_n、K_n、P_n－振型质量、振型阻尼系数、振型刚度和振型荷载。

$$C_n = 2\omega_n M_n \zeta_n$$

ζ_n－振型阻尼比。

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ 不满足阻尼正交条件的振型叠加解法：

（1）直接解一个低阶的代数方程组，$L<N$；

（2）用迭代法求解；

（3）用复模态法分析。

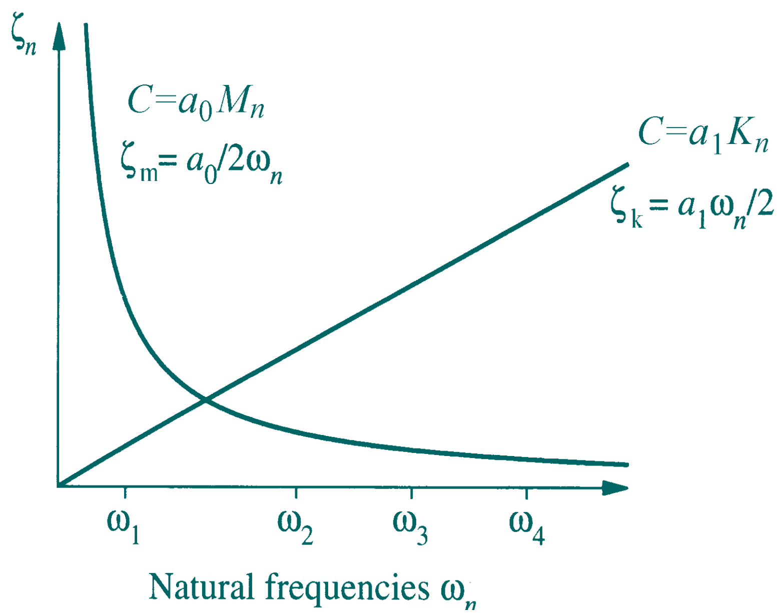
注意：对比第8章Rayleigh-Rtz计算缩减的刚度阵和质量阵的公式与本章采用振型展开法求振型刚度和振型质量的公式。

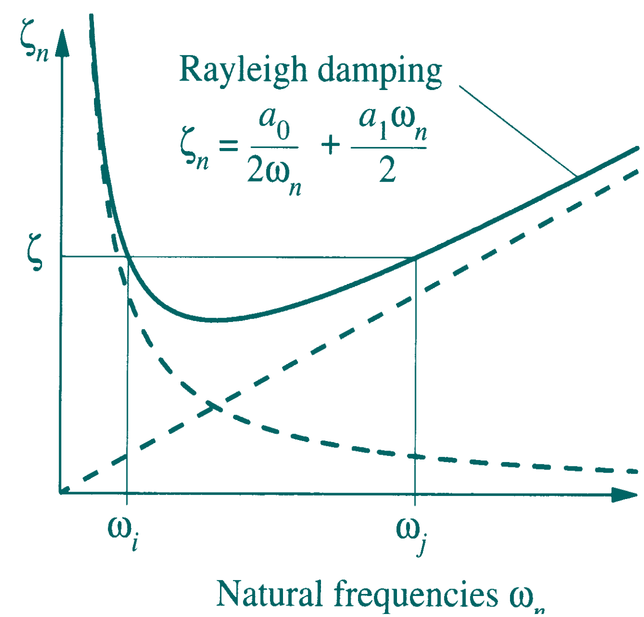
第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ Rayleigh阻尼及其性质

$$[C] = a_0[M] + a_1[K]$$

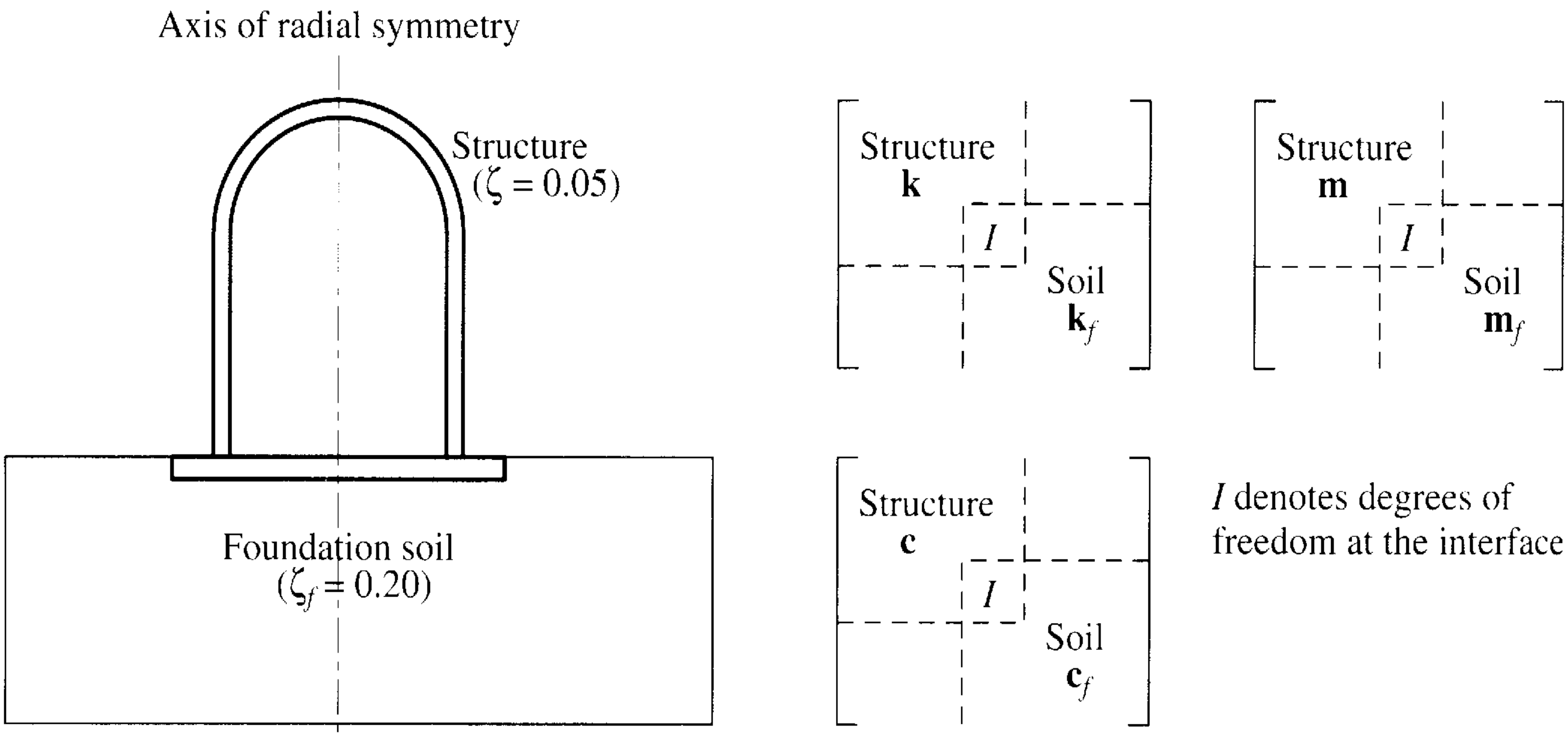
$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} \begin{Bmatrix} \omega_i \omega_j \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \zeta_i = \zeta_j = \zeta$$





第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢ 非经典阻尼阵的构造：



可以分别采用Rayleigh阻尼构造各子结构的阻尼矩阵，再组合形成体系的总体阻尼阵。

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➤ 静力修正法（Static Correction Procedure）

$$\{u(t)\}=\sum_{n=1}^{N}\{\phi\}_n q_n(t)=\sum_{n=1}^{N_d}\{\phi\}_n q_n+\sum_{n=N_d+1}^{N}\{\phi\}_n P_n(t)/K_n$$

$$\{u(t)\}=\sum_{n=1}^{N_d}\{\phi\}_n q_n(t)+\left([K]^{-1}-\sum_{n=1}^{N_d}\frac{\{\phi\}_n\{\phi\}_n^T}{K_n}\right)\{p(t)\}$$

➤ 振型加速度法（Mode Acceleration Method）

$$\{u(t)\}=\sum_{n=1}^{N}\{\phi\}_n q_n(t)=\sum_{n=1}^{N}\{\phi\}_n\frac{p_n(t)}{K_n}-\sum_{n=1}^{N}\{\phi\}_n[\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{q}_n(t)+\frac{2\zeta_n}{\omega_n}\dot{q}_n(t)]$$

$$\{u(t)\}=[K]^{-1}\{p(t)\}-\sum_{n=1}^{N_d}\{\phi\}_n[\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{q}_n(t)+\frac{2\xi_n}{\omega_n}\dot{q}_n(t)]$$

第7章 多自由度体系动力反应分析（续）

➢缺少采用振型叠加法分析结构地震反应的内容

实际上令外荷载向量$\{p(t)\}$为

$$\{p(t)\} = -[M]\{I\}\ddot{u}_g$$

则，振型荷载为

$$P_n(t) = -\{\phi\}_n^T[M]\{I\}\ddot{u}_g$$

振型坐标的标准运动方程

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = -\gamma_n\ddot{u}_g(t),\ \ n = 1,2,\cdots N$$

$$\gamma_n = \frac{\{\phi\}_n^T[M]\{I\}}{M_n} = \frac{\{\phi\}_n^T[M]\{I\}}{\{\phi\}_n^T[M]\{\phi\}_n}$$

γ_n称为振型参与系数

第8章

实用振动分析

第8章 实用振动分析

- Rayleigh法：

构造一假设振型$\{\psi\}$,由下式计算结构的自振频率

$$\omega^2 = \frac{\{\psi\}^T[K]\{\psi\}}{\{\psi\}^T[M]\{\psi\}}$$

Rayleigh熵

$$\rho(\omega) = \frac{\{\psi\}^T[K]\{\psi\}}{\{\psi\}^T[M]\{\psi\}}$$

第8章 实用振动分析（续）

Rayleigh－Ritz法：

（1）建立假设模态集

$$[\psi]=[\{\psi\}_1,\{\psi\}_2,\cdots\{\psi\}_s]\quad (s<n)$$

并设 $\{u\}=[\psi]\{Z\}$

（2）计算缩减的刚度矩阵和质量矩阵

$$[K^*]=[\psi]^T[K][\psi]\qquad [M^*]=[\psi]^T[M][\psi]$$

（3）求解如下特征值问题，得结构的s个自振频率

$\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_s$和对应的特征向量 $\hat{Z}_1,\hat{Z}_2,\cdots\hat{Z}_s$

$$([K^*]-\omega^2[M^*])\{\hat{Z}\}=0$$

（4）而结构的振型为

$$\{u\}_i=[\psi]\{\hat{Z}\}_i\quad (i=1,2,\cdots s)$$