# 投入产出数学模型

一、投入产出数学模型（基础）

二、区域投入产出模型基础知识

# 一、投入产出数学模型（基础）

在经济活动中分析投入多少财力、物力、人力，产出多少社会财富是衡量经济效益高下的主要标志。

投入产出技术正是研究一种经济系统各部门间的“投入”与“产出”关系的数学模型.

该措施最早由美国著名的经济学家瓦. 列昂捷夫（W.Leontief）提出，是目前比较成熟的经济分析措施。

# （一）投入产出数学模型的概念

投入：从事一项经济活动的消耗；

产出：从事经济活动的成果；

投入产出数学模型：经过编制投入产出表，利用线性代数工具建立数学模型，从而揭示国民经济各部门、再生产各环节之间的内在联络，并据此进行经济分析、预测和安排预算计划。

按计量单位不同，该模型可分为价值型和实物型。

首先，必须清楚投入产出表。见下：

## 表1：投入产出表

| 流量 产出 / 投入 | | 消耗部门 | | | | 最终需求 | | 总产出 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ | 消费 合计 出口 | 合计 | |
| 生产部门 | 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $\cdots$ | $x_{1n}$ | | $y_1$ | $x_1$ |
| | 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $\cdots$ | $x_{2n}$ | | $y_2$ | $x_2$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $n$ | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | | $x_{nn}$ | | $y_n$ | $x_n$ |
| 新创价值 | 工 资 | $v_1$ | $v_2$ | $\cdots$ | $v_n$ | | | |
| | 纯收入 | $m_1$ | $m_2$ | $\cdots$ | $m_n$ | | | |
| | 合 计 | $z_1$ | $z_2$ | $\cdots$ | $z_n$ | | | |
| 总投入 | | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | | | |

注：行表达某部门的产出；列表达某部门的投入。

第一行x1表达部门1的总产出水平，x11表达为本部门的使用量，$x_{1j}$ (j=1,2,…,n)表达部门1提供给部门j 的使用量，$y_j$ (j=1,2,…,n) 表达供给最终需求（涉及居民消耗、政府使用、出口和社会贮备等）。这几种方面总和代表了这个时期的总产出水平。

## 投入产出的基本平衡关系

从左到右：　中间需求＋最终需求＝总产出　(1)

从上到下：　中间消耗＋净产值＝总投入　(2)

得：产出平衡方程组(也称分配平衡方程组)：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}+y_1=x_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}+y_2=x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}+y_n=x_n \end{cases} \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+y_i=x_i\,(i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

需求平衡方程组:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = y_i (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

投入平衡方程组(也称消耗平衡方程组):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} + z_1 = x_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} + z_2 = x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} + z_n = x_n \end{cases} \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j (j = 1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

由(3)和(6)，可得：

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j \tag{8}$$

这表白：就整个国民经济来讲，用于非生产的消费、积累、贮备和出口等方面产品的总价值与整个国民经济净产值的总和相等。

## （二）直接消耗系数

**定义1** 第$j$部门生产单位价值所消耗第$i$部门的价值称为第$j$部门对第$i$部门的直接消耗系数。记作：

$$a_{ij}(i,j=1,2,L\ ,n)$$

由定义得

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}(i,j=1,2,L\ ,n) \qquad (9)$$

把投入产出表中的各个中间需求$x_{ij}$换成相应的$a_{ij}$后得到的数表称为直接消耗系数表，并称$n$阶矩阵$A=(a_{ij})$为直接消耗系数矩阵。

例1　已知某经济系统在一种生产周期内投入产出情况如表2，试求直接消耗系数矩阵。

表2

| 投入＼产出 | | 中间消耗 1 | 中间消耗 2 | 中间消耗 3 | 最终需求 | 总产出 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 中间投入 | 1 | 100 | 25 | 30 | | 400 |
| | 2 | 80 | 50 | 30 | | 250 |
| | 3 | 40 | 25 | 60 | | 300 |
| 净产值 | | | | | | |
| 总投入 | | 400 | 250 | 300 | | |

解：由直接消耗系数的定义 $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$，得直接消耗系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.25 & 0.10 & 0.10\\ 0.20 & 0.20 & 0.10\\ 0.10 & 0.10 & 0.20\end{bmatrix}$$

直接消耗系数具有下面主要性质：

性质1　$0\le a_{ij}\le 1\ (i,j=1,2,\cdots,n)$

性质2　$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\le 1\ (j=1,2,\cdots,n)$

由直接消耗系数的定义得 $x_{ij}=a_{ij}x_j$ ，代入(3)，得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+y_1=x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+y_2=x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+y_n=x_n \end{cases} \qquad (10)$$

令 $X=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)'$, $Y=(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)'$ ，

(10)式可表达为 $AX+Y=X$ 或

$$(E-A)X=Y \qquad (11)$$

称矩阵$E$-$A$为列昂捷夫矩阵。

类似地把 $x_{ii}=a_{ii}x_i$ 代入平衡方程(6)得到

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n+z_1=x_1 \\
a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n+z_2=x_2 \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+z_n=x_n
\end{cases}
\tag{12}
$$

写成矩阵形式为

$$
X=DX+Z \text{ 或 } (E-D)X=Z \tag{13}
$$

**定理1** 列昂捷夫矩阵$E-A$是可逆的。

假如各部门的最终需求$Y=(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)'$，已知，则由定理1知，方程(11)存在惟一解$X=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)'$。

**例2** 设某工厂有三个车间，在某一种生产周期内各车间之间的直接消耗系数及最终需求如表3，求各车间的总产值。

表3

| 直耗系数（车间＼车间） | I | II | III | 最终需求 |
|---|---|---|---|---|
| I | 0.25 | 0.1 | 0.1 | 235 |
| II | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 125 |
| III | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 210 |

解

$$E-A=\begin{bmatrix} 0.75 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0.4455}\begin{bmatrix}0.63 & 0.09 & 0.09\\ 0.17 & 0.59 & 0.095\\ 0.1 & 0.085 & 0.58\end{bmatrix}$$

$$X=(E-A)^{-1}Y$$

$$=\frac{1}{0.4455}\begin{bmatrix}0.63 & 0.09 & 0.09\\ 0.17 & 0.59 & 0.095\\ 0.1 & 0.085 & 0.58\end{bmatrix}\begin{bmatrix}235\\ 125\\ 210\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}400\\ 300\\ 350\end{bmatrix}$$

即三个车间的总产值分别为400，300，350。

**定理2** 方程$(E-D)X=Z$的系数矩阵$E-D$是可逆的。

证明略

## （三）完全消耗系数

直接消耗系数只反应各部门间的直接消耗，不能反应各部门间的间接消耗，为此我们给出如下定义。

**定义2** 第$j$部门生产单位价值量直接和间接消耗的第$i$部门的价值量总和，称为第$j$部门对第$i$部门的完全消耗系数，记作

$$b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

由$b_{ij}$构成的$n$阶方阵$B=(b_{ij})$称为各部门间的完全消耗系数矩阵。

**定理3** 第$j$部门对第$i$部门的完全消耗系数,$b_{ij}$ 满足方程

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

**定理4** 设$n$个部门的直接消耗系数矩阵为$A$，完全消耗系数矩阵为$B$，则有 $B=(E-A)^{-1}-E$

证明 由定理3知，

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

将$n^2$个等式用矩阵表达为

$$B=A+BA\text{或}B(E-A)=A$$

由定理1知$(E\text{-}A)$可逆，故

$$B=A(E-A)^{-1}$$

$$=[E-(E-A)](E-A)^{-1}=(E-A)^{-1}-E$$

例3 假设某企业三个生产部门间的报告价值型投入产出表如表4，

表4

| 投入 \ 产出 | | 中间消耗 1 | 中间消耗 2 | 中间消耗 3 | 最终需求 | 总产出 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 中间投入 | 1 | 1500 | 0 | 600 | 400 | 2500 |
| | 2 | 0 | 610 | 600 | 1840 | 3050 |
| | 3 | 250 | 1525 | 3600 | 625 | 6000 |

求各部门间的完全消耗系数矩阵。

解：依次用各部门的总产值清除中间消耗栏中各列，得直接消耗系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0.1\\ 0 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.5 & 0.6\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}6 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

$$E-A=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 8 & -1\\ -1 & -5 & 4\end{bmatrix}$$

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}27 & 5 & 8\\ 1 & 15 & 4\\ 8 & 20 & 32\end{bmatrix}$$

故所求完全消耗系数矩阵为

$$B=(E-A)^{-1}-E=\begin{bmatrix}1.7 & 0.5 & 0.8\\ 0.1 & 0.5 & 0.4\\ 0.8 & 2 & 2.2\end{bmatrix}$$

从此例可知，完全消耗系数矩阵的值比直接消耗系数矩阵的值要大的多。

**定理5** 假如第$j$部门最终需求增长 $\Delta y_j$，而其他部门的最终需求不变，那么部门总产出$X$的增量为

$$\Delta X=\Delta y_j\left(B_j+e_j\right)$$

其中 $\Delta X=\left(\Delta x_1\ \Delta x_2\ \cdots\ \Delta x_n\right)', B_i=\left(b_{1i}\ b_{2i}\ \cdots\ b_{ni}\right)e_i$

为单位坐标向量。

证明：略

**定理5**表白，由第$j$部门最终需求的增长（其他部门的最终需求不变），引起了各部门总产值的增长。$\Delta y_j\left(B_j+e_j\right)$ 从数量上表达了各部门的增长量。假如没有这些追加，第$j$部门要完毕增长$\Delta y_j$最终需求的任务就不能实现。

假如定理5的结论用分量表达

$$\Delta x_i = \begin{cases} \Delta y_j b_{ij}, & i \neq j, \\ \Delta y_i (b_{ii} + e_i), & i = j, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

尤其取$\Delta y_i = 1$，则有

$$\Delta x_i = \begin{cases} b_{ij}, & i \neq j, \\ b_{ij} + 1, & i = j, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

上式的经济意义是，当第*j*部门的最终需求增长一种单位，而其他部门最终需求不变时，第*i*部门总产值的增长量为 $b_{ij}$，当第*i*部门的最终需求增长一种单位而其他部门的最终需求不变时，第*i*部门总产值的增长量为 $b^{\circ}_{ii} + 1$

例4　利用例1中的数据，求完全消耗系数矩阵$B$。

解　由例1知直接消耗系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.25 & 0.10 & 0.10\\ 0.20 & 0.20 & 0.10\\ 0.10 & 0.10 & 0.20\end{bmatrix}$$

于是有

$$E-A=\begin{bmatrix}0.75 & -0.10 & -0.10\\ -0.20 & 0.80 & -0.10\\ -0.10 & -0.10 & 0.80\end{bmatrix}$$

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1.4141 & 0.2020 & 0.2020\\ 0.3817 & 1.3244 & 0.2132\\ 0.2245 & 0.1908 & 1.3019\end{bmatrix}$$

最终得完全消耗系数矩阵

$$B=(E-A)^{-1}-E=\begin{bmatrix}0.4141 & 0.2020 & 0.2020\\ 0.3817 & 0.3244 & 0.2132\\ 0.2245 & 0.1908 & 0.3019\end{bmatrix}$$

## （四）投入产出数学模型的简朴应用

投入产出法起源于一种经济系统各部门生产和消耗的实际统计资料。它同步描述了当初各部门之间的投入与产出协调关系，反应了产品供求平衡关系，实际中有广泛应用。

经济分析方面的应用：可用于构造分析，还可用于编制经济计划和进行经济调整等。

编制计划：

措施一：先要求各部门计划期的总产量，然后计算出各部门最终需求；

措施二：先拟定计划期各部门的最终需求，然后再计算出各部门总产出。

后一种符合需求决定产出的原则，也有利于调整各部门产品构造百分比，较合理。