

青海省西宁市三校 2024 届高三第四次模拟考试数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

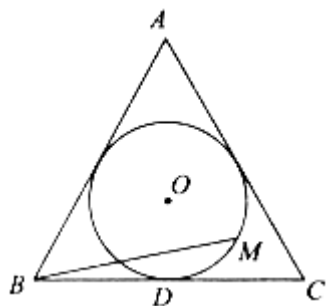
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ 的零点为 m ，若存在实数 n 使 $x^2 - ax - a + 3 = 0$ 且 $|m - n| \leq 1$ ，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $[2, 4]$ B. $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ C. $\left[\frac{7}{3}, 3\right]$ D. $[2, 3]$

2. 如图，圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的内切圆，其与 BC 边相切于点 D ，点 M 为圆上任意一点，

$\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$ ($x, y \in \mathbb{R}$)，则 $2x + y$ 的最大值为（ ）

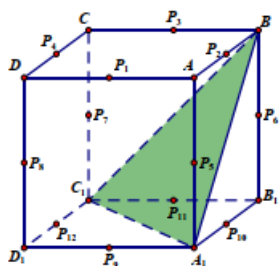


- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2c$. 点 A 为双曲线 C 的右顶点，若点 A 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{1}{2}c$ ，则双曲线 C 的离心率是（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

4. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ， P_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) 是棱的中点，在任意两个中点的连线中，与平面 A_1C_1B 平行的直线有几条（ ）



- A. 36 B. 21 C. 12 D. 6

5. 已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 H ，且 $AB=6, BC=8, M$ 是 AC 的中点，则 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ()

- A. 14 B. 12 C. 10 D. 8

6. 胡夫金字塔是底面为正方形的锥体，四个侧面都是相同的等腰三角形. 研究发现，该金字塔底面周长除以 2 倍的塔高，恰好为祖冲之发现的密率 $\frac{355}{113} \approx \pi$. 设胡夫金字塔的高为 h ，假如对胡夫金字塔进行亮化，沿其侧棱和底边布设单条灯带，则需要灯带的总长度约为

- A. $(4\pi + \frac{\sqrt{2\pi^2 + 4}}{2})h$ B. $(2\pi + \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4})h$
C. $(8\pi + 4\sqrt{2\pi^2 + 1})h$ D. $(2\pi + \sqrt{2\pi^2 + 16})h$

7. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还.”意思为有一个人要走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了六天恰好到达目的地，请问第二天比第四天多走了 ()

- A. 96 里 B. 72 里 C. 48 里 D. 24 里

8. 已知 $0 < a < b < 1$ ，则 ()

- A. $(1-a)^{\frac{1}{b}} > (1-a)^b$ B. $(1-a)^b > (1-a)^{\frac{b}{2}}$ C. $(1+a)^a > (1+b)^b$ D. $(1-a)^a > (1-b)^b$

9. 已知 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ ，那么 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 是 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 的 ()

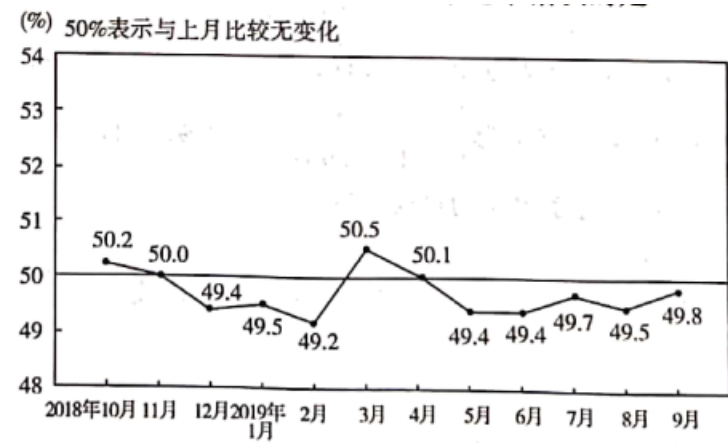
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P, Q 分别为 AB, AD 的中点，过点 D 作平面 α 使 $B_1P \parallel$ 平面 α ， $A_1Q \parallel$ 平面 α 若直线 $B_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = M$ ，则 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

11.

国家统计局服务业调查中心和中国物流与采购联合会发布的 2018 年 10 月份至 2019 年 9 月份共 12 个月的中国制造业采购经理指数(PMI)如下图所示.则下列结论中错误的是 ()



- A. 12 个月的 PMI 值不低于 50%的频率为 $\frac{1}{3}$
- B. 12 个月的 PMI 值的平均值低于 50%
- C. 12 个月的 PMI 值的众数为 49.4%
- D. 12 个月的 PMI 值的中位数为 50.3%

12. 已知焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线与 x 轴交于点 A ，点 M 在抛物线 C 上，则当 $\frac{|MA|}{|MF|}$ 取得最大值时，直线 MA 的方程为 ()

- A. $y = x + 1$ 或 $y = -x - 1$
- B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
- C. $y = 2x + 2$ 或 $y = -2x - 2$
- D. $y = -2x + 2$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)=\sqrt{\lg \frac{2}{x}-1}$ 的定义域为_____.

14. 设 $x_1、x_2、x_3、x_4$ 为互不相等的正实数，随机变量 X 和 Y 的分布列如下表，若记 $DX，DY$ 分别为 X,Y 的方差，则 DX _____ DY . (填 $>$ ， $<$ ， $=$)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
Y	$\frac{x_1+x_2}{2}$	$\frac{x_2+x_3}{2}$	$\frac{x_3+x_4}{2}$	$\frac{x_4+x_1}{2}$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

15. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq x \\ x + y \geq 6 \\ y \leq 6 \end{cases}$, 则 $z = -2x + y$ 的最小值为_____.

16. 袋中有形状、大小都相同的 4 只球, 其中 1 只白球, 1 只红球, 2 只黄球, 从中一次随机摸出 2 只球, 则这 2 只球颜色不同的概率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ ($a > b > 0$, φ 为参数), 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C_2 是圆心在极轴上, 且经过极点的圆. 已知曲线 C_1 上的点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 对应的

参数 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 与曲线 C_2 交于点 $D\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程;

(2) 若点 A, B 为曲线 C_1 上的两个点且 $OA \perp OB$, 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

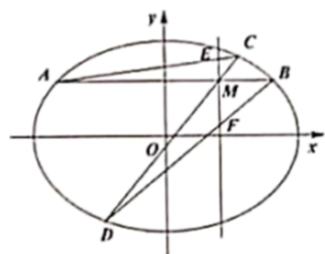
18. (12 分) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 设函数 $f(x) = x^2 - ax - b\sqrt{x^2 + 1}$

(I) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0, 求 $a + \sqrt{5}b$ 的最大值. 注: $e = 2.71828...$ 为自然对数的底数.

19. (12 分) 如图, 过点 $M(2, 2)$ 且平行与 x 轴的直线交椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = m$ ($m > 0$) 于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$.

(1) 求椭圆的标准方程;



(2) 过点 M 且斜率为正的直线交椭圆于点 C, D , 直线 AC, BD 分别交直线 $x = 2$ 于点 E, F , 求证: $\frac{1}{|ME|} - \frac{1}{|MF|}$

是定值.

20. (12 分) 已知直线 $y = x - 1$ 是曲线 $f(x) = a \ln x$ 的切线.

20. (12 分) 已知直线 $y = x - 1$ 是曲线 $f(x) = a \ln x$ 的切线.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式,

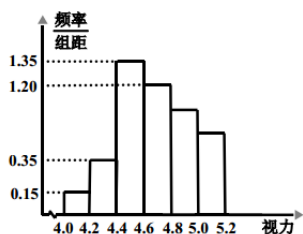
(2) 若 $t \leq 3 - 4 \ln 2$, 证明: 对于任意 $m > 0$, $h(x) = mx - \sqrt{x} + f(x) + t$ 有且仅有一个零点.

21. (12 分) 眼保健操是一种眼睛的保健体操, 主要是通过按摩眼部穴位, 调整眼及头部的血液循环, 调节肌肉, 改善眼的疲劳, 达到预防近视等眼部疾病的目的. 某学校为了调查推广眼保健操对改善学生视力的效果, 在应届高三年全体 800 名学生中随机抽取了 100 名学生进行视力检查, 并得到如图的频率分布直方图.

(1) 若直方图中后三组的频数成等差数列, 试估计全年级视力在 5.0 以上的人数;

(2) 为了研究学生的视力与眼保健操是否有关系, 对年级不做眼保健操和坚持做眼保健操的学生进行了调查, 得到下表中数据, 根据表中的数据, 能否在犯错的概率不超过 0.005 的前提下认为视力与眼保健操有关系?

(3) 在 (2) 中调查的 100 名学生中, 按照分层抽样在不近视的学生中抽取 8 人, 进一步调查他们良好的护眼习惯, 在这 8 人中任取 2 人, 记坚持做眼保健操的学生人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.



是否做操	不做操	做操
是否近视		
近视	44	32
不近视	6	18

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$K^2 \geq k$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2S_n + a_n = 1 (n \in N^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{1}{1+a_n} + \frac{1}{1-a_{n+1}}$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和. 求证: $T_n > 2n - \frac{1}{3}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

易知 $f(x)$ 单调递增,由 $f(1)=0$ 可得唯一零点 $m=1$,通过已知可求得 $0 \leq n \leq 2$,则问题转化为使方程

$x^2 - ax - a + 3 = 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有解,化简可得 $a = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$,借助对勾函数即可解得实数 a 的取值范围.

【详解】

易知函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ 单调递增且有惟一的零点为 $m=1$, 所以 $|1-n| \leq 1$, $\therefore 0 \leq n \leq 2$, 问题转化为: 使方程

$x^2 - ax - a + 3 = 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有解, 即 $a = \frac{x^2 + 3}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$

在区间 $[0, 2]$ 上有解, 而根据“对勾函数”可知函数 $y = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2$ 在区间 $[0, 2]$ 的值域为 $[2, 3]$, $\therefore 2 \leq a \leq 3$.

故选 D.

【点睛】

本题考查了函数的零点问题,考查了方程有解问题,分离参数法及构造函数法的应用,考查了利用“对勾函数”求参数取值范围问题,难度较难.

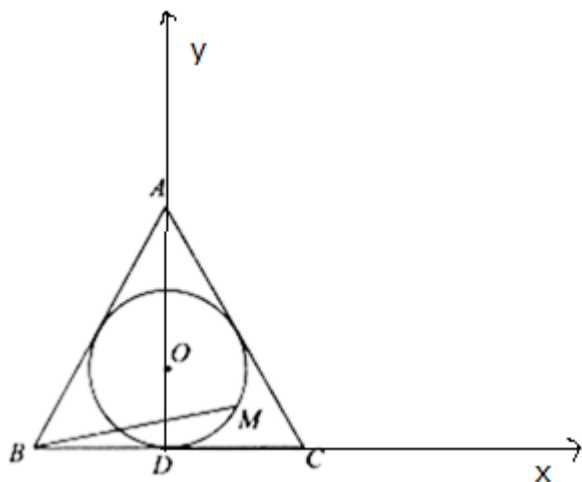
2、C

【解析】

建立坐标系, 写出相应的点坐标, 得到 $2x + y$ 的表达式, 进而得到最大值.

【详解】

以 D 点为原点, BC 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, 建立坐标系,



设内切圆的半径为 1, 以 $(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆;

根据三角形面积公式得到 $\frac{1}{2} \times l_{\text{周长}} \times r = S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ$,

可得到内切圆的半径为1;

可得到点的坐标为: $B(-\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{3}, 0), A(0, 3), D(0, 0), M(\cos \theta, 1 + \sin \theta)$

$$\overrightarrow{BM} = (\cos \theta + \sqrt{3}, 1 + \sin \theta), \overrightarrow{BA} = (\sqrt{3}, 3), \overrightarrow{BD} = (\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{故得到 } \overrightarrow{BM} = (\cos \theta + \sqrt{3}, 1 + \sin \theta) = (\sqrt{3}x + \sqrt{3}y, 3x)$$

$$\text{故得到 } \cos \theta = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}, \sin \theta = 3x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sin \theta}{3} \\ y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta}{3} + \frac{2}{3} \end{cases}, 2x + y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \frac{\sin \theta}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \sin(\theta + \varphi) + \frac{4}{3} \leq 2.$$

故最大值为: 2.

故答案为 C.

【点睛】

这个题目考查了向量标化的应用, 以及参数方程的应用, 以向量为载体求相关变量的取值范围, 是向量与函数、不等式、三角函数等相结合的一类综合问题. 通过向量的运算, 将问题转化为解不等式或求函数值域, 是解决这类问题的一般方法.

3、A

【解析】

由点到直线距离公式建立 a, b, c 的等式, 变形后可求得离心率.

【详解】

由题意 $A(a, 0)$, 一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 即 $bx - ay = 0$, $\therefore d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}c$,

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{1}{4}c^2, \text{ 即 } \frac{a^2(c^2 - a^2)}{c^2} = \frac{1}{4}c^2, e^4 - 4e^2 + 4 = 0, e = \sqrt{2}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率, 掌握渐近线方程与点到直线距离公式是解题基础.

4、B

【解析】

先找到与平面 A_1C_1B 平行的平面, 利用面面平行的定义即可得到.

【详解】

考虑与平面 A_1C_1B 平行的平面 $P_1P_4P_8$ ，平面 $P_{10}P_{11}P_6$ ，平面 $P_9P_5P_2P_3P_7P_{12}$ ，

共有 $C_3^2 + C_3^2 + C_6^2 = 21$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查线面平行的判定定理以及面面平行的定义，涉及到了简单的组合问题，是一中档题.

5、A

【解析】

由垂心的性质，得到 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，可转化 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}$ ，又 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$ 即得解.

【详解】

因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 $BH \perp AC$ ，

所以 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，而 $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BM}$ ，

所以 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}$ ，

因为 M 是 AC 的中点，

所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2) = \frac{1}{2}(64 - 36) = 14.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了利用向量的线性运算和向量的数量积的运算率，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

6、D

【解析】

设胡夫金字塔的底面边长为 a ，由题可得 $\frac{4a}{2h} = \pi$ ，所以 $a = \frac{\pi h}{2}$ ，

该金字塔的侧棱长为 $\sqrt{h^2 + (\frac{\sqrt{2}a}{2})^2} = \sqrt{h^2 + \frac{\pi^2 h^2}{8}} = \frac{h\sqrt{2\pi^2 + 16}}{4}$ ，

所以需要灯带的总长度约为 $4 \times \frac{h\sqrt{2\pi^2 + 16}}{4} + 4 \times \frac{\pi h}{2} = (2\pi + \sqrt{2\pi^2 + 16})h$ ，故选 D.

7、B

【解析】

人每天走的路程构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，设此人第一天走的路程为 a_1 ，计算 $a_1 = 192$ ，代入得到答案.

【详解】

由题意可知此人每天走的路程构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，设此人第一天走的路程为 a_1 ，

$$\text{则 } \frac{a_1 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 378, \text{ 解得 } a_1 = 192, \text{ 从而可得 } a_2 = 192 \times \frac{1}{2} = 96, a_4 = 192 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 24, \text{ 故}$$

$$a_2 - a_4 = 96 - 24 = 72.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列的应用，意在考查学生的计算能力和应用能力.

8、D

【解析】

根据指数函数的单调性，即当底数大于1时单调递增，当底数大于零小于1时单调递减，对选项逐一验证即可得到正确答案.

【详解】

因为 $0 < a < 1$ ，所以 $0 < 1 - a < 1$ ，所以 $y = (1 - a)^x$ 是减函数，

又因为 $0 < b < 1$ ，所以 $\frac{1}{b} > b$ ， $b > \frac{b}{2}$ ，

所以 $(1 - a)^{\frac{1}{b}} < (1 - a)^b$ ， $(1 - a)^b < (1 - a)^{\frac{b}{2}}$ ，所以A,B两项均错；

又 $1 < 1 + a < 1 + b$ ，所以 $(1 + a)^a < (1 + b)^a < (1 + b)^b$ ，所以C错；

对于D， $(1 - a)^a > (1 - a)^b > (1 - b)^b$ ，所以 $(1 - a)^a > (1 - b)^b$ ，

故选D.

【点睛】

这个题目考查的是应用不等式的性质和指数函数的单调性比较大小，两个式子比较大小的常用方法有：做差和0比，作商和1比，或者直接利用不等式的性质得到大小关系，有时可以代入一些特殊的数据得到具体值，进而得到大小关系.

9、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/317043114052006116>