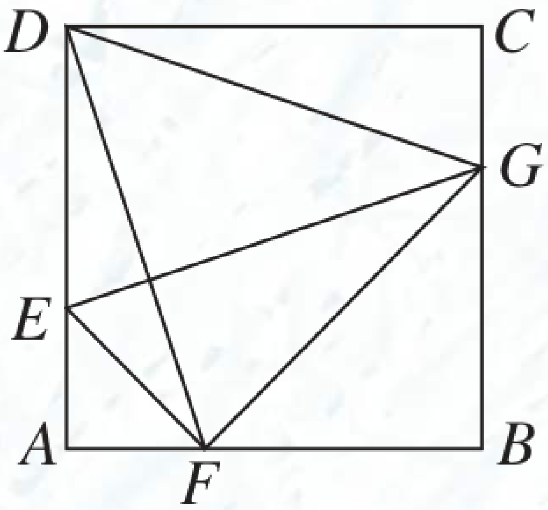
阶段拔尖专训15 新定义型问题

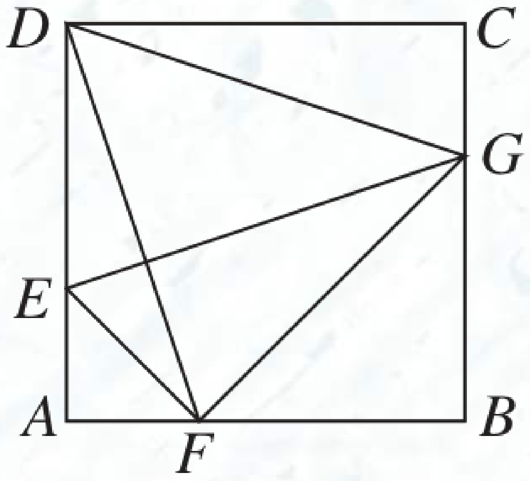
题型1 特殊平行四边形中的新定义问题

1.[2024·泰安模拟] 定义：有一组邻边垂直且对角线相等的四边形称为垂等四边形.



（1）写出一个已学的特殊平行四边形中是垂等四边形的是<u>矩形</u>；

（2）如图，在正方形$ABCD$中，点E，F，G分别在AD，AB，BC上，四边形$DEFG$是垂等四边形，且$\angle EFG=90^{\circ}$，$AF=CG$.



①求证：$EG = DG$；

【证明】∵ 四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore AD = CD$，$\angle A = \angle C$.

又∵ $AF = CG$，$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDG(\text{SAS})$. $\therefore DF = DG$.

∵ 四边形$DEFG$是垂等四边形，$\therefore EG = DF$，

$\therefore EG = DG$.

②若$BC = n \cdot BG$，求n的值；

【解】过点G作$GH \perp AD$，垂足为H，

易得四边形$CDHG$为矩形，$\therefore CG = DH$.

由①知$EG = DG$，$\therefore DH = EH$.

由题知$\angle A = \angle B = 90^\circ$，$AB = BC = AD$，$AF = CG$，

$\therefore AB - AF = BC - CG$，即$BF = BG$，

$\therefore \triangle BFG$为等腰直角三角形.$\therefore \angle GFB = 45^\circ$.

又$\because \angle EFG = 90^\circ$，$\therefore \angle EFA = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

$\therefore \triangle AEF$为等腰直角三角形.

$\therefore AE = AF. \therefore AE = CG = DH = EH.$

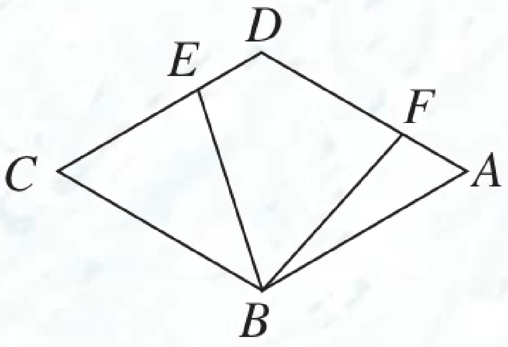
$\therefore BC = AD = 3AE. \therefore BG = 2AE.$

$\because BC = n \cdot BG$，$\therefore n = \frac{BC}{BG} = \frac{3}{2}$.

2.[2024·威海模拟] **【理解新定义】**若一个四边形具备一组对角互补和一组邻边相等，则称该四边形为“补等四边形”.如正方形和筝形，它们都具备这样的特征，所以称为补等四边形.

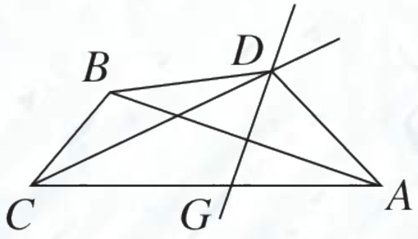
【解决新问题】

(1) 如图①，点E，F分别在菱形$ABCD$的边CD,AD上，$CE=DF$，$\angle A=60^{\circ}$.四边形$BEDF$是否为补等四边形？__【解】是__.（填“是”或“否”）



①

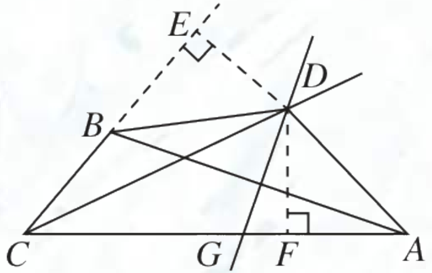
（2）如图②，在$\triangle ABC$中，$\angle CBA > 90^{\circ}$.$\angle ACB$的平分线和边AB的中垂线交于点D，边AB的中垂线交边AC于点G，连接DA,DB.四边形$ADBC$是否为补等四边形？若是，进行证明；若不是，说明理由.



②

四边形$ADBC$是补等四边形.

证明：如图，过点D作$DE \perp CB$交CB的延长线于点E,$DF \perp CA$于点F.



$\therefore \angle DEB = \angle DFC = 90°$.

$\therefore \angle ECA + \angle EDF = 180°$.

$\because CD$平分$\angle ECA$，$\therefore DE = DF$.

$\because DG$垂直平分线段AB,

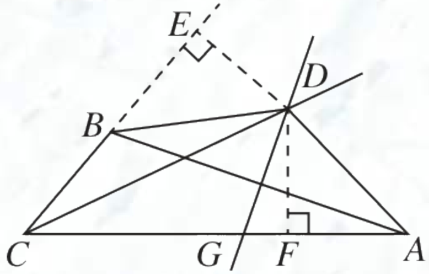
$\therefore DB = DA.$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DEB \cong \mathrm{Rt}\triangle DFA.$

$\therefore \angle EDB = \angle FDA. \therefore \angle EDF = \angle BDA.$

$\therefore \angle ECA + \angle BDA = 180^\circ$.

∴ 四边形$ADBC$是补等四边形.



题型2 二次根式中的新定义问题

3.[2024·潍坊期末] 定义一种新运算：对于任意实数a，b，都有$a※b=(a-1)^2+b^2$，则$(\sqrt{2}-1)※(-\sqrt{3})=$__$9-4\sqrt{2}$__.

4.[2024·济宁期中] 定义：我们将$(\sqrt{a}+\sqrt{b})$与$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$称为一对“对偶式”.因为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$，可以有效地去掉根号，所以有一些题可以通过构造“对偶式”来解决.例如：$\sqrt{18-x}-\sqrt{11-x}=1$，求$\sqrt{18-x}+\sqrt{11-x}$的值，可以这样解答：

因为$(\sqrt{18-x}-\sqrt{11-x})\times(\sqrt{18-x}+\sqrt{11-x})=(\sqrt{18-x})^2-(\sqrt{11-x})^2=18-x-11+x=7$，所以$\sqrt{18-x}+\sqrt{11-x}=7.$

（1）代数式$\sqrt{10-x}+\sqrt{x-2}$中x的取值范围是 $2\le x\le 10$ ；

（2）已知：$\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8$，求：

【解】

①$\sqrt{20-x}-\sqrt{4-x}=$ 2 ；

②结合已知条件和第①问的结果，解方程：

$\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8.$

由题意可得$\begin{cases}\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8\\ \sqrt{20-x}-\sqrt{4-x}=2\end{cases}$，则$2\sqrt{20-x}=10$，解得

$x=-5$，经检验，$x=-5$是方程$\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8$的根.

∴ 方程$\sqrt{20-x}+\sqrt{4-x}=8$的解为$x=-5$.

题型3 一元二次方程中的新定义问题

5.定义新运算：规定$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$，例如$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 2 \times 8 - 4 \times 6 =- 8$，若$\begin{bmatrix} 3x & 1 - 8x \\ 1 & x \end{bmatrix} = 2$，则$x$的值为$\underline{\frac{1}{3}或-3}$.

【点拨】$\because \begin{bmatrix} 3x & 1 - 8x \\ 1 & x \end{bmatrix} = 2$，$\therefore 3x^2 - (1 - 8x) = 2$，即$3x^2 + 8x - 3 = 0$，解得$x =- 3$或$x = \frac{1}{3}$.

6.[2024·菏泽模拟] 将关于x的一元二次方程$m(x-a)^2+b=0$与$n(x-a)^2+b=0$称为“同类方程”.如$2(x-1)^2+3=0$与$6(x-1)^2+3=0$是“同类方程”.

(1) $2x^2-4x+b=0$与$a(x-1)^2+3=0$是“同类方程”，求b的值；

【解】$2x^2-4x+b=0$与$a(x-1)^2+3=0$是“同类方程”，

即$2(x-1)^2+b-2=0$与$a(x-1)^2+3=0$是“同类方程”，

$\therefore b-2=3$，解得$b=5$.