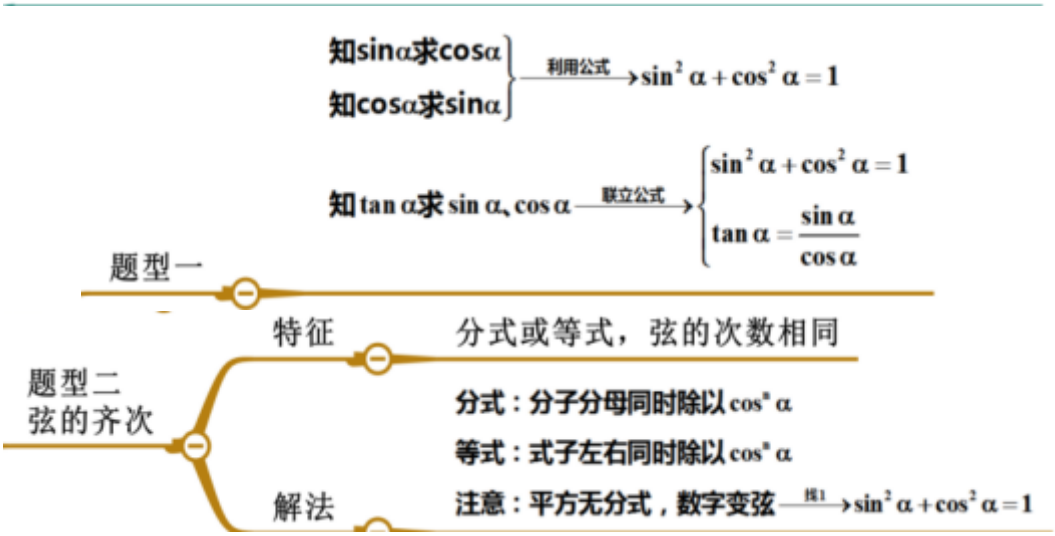
第 03 讲 5.2.2 同角三角函数的基本关系

01 学习目标

课程标准	学习目标
①掌握同角三角函数的基本关系式。 ②能正确运用同角三角函数的基本关系式进行求值、化简和证明。	会用同角三角函数的基本关系进行求值、化简、证明

02 思维导图

	关系式	文字表述
平方关系	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	同一个角α的正弦、余弦的平方和等于 1
商数关系	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)$	同一个角α的正弦、余弦的商等于角α的正切



$$(1)\sin\alpha\pm\cos\alpha\xrightarrow{\text{平方}}1\pm2\sin\alpha\cos\alpha=1\pm\sin 2\alpha$$

$$(2)\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\end{cases}\xrightarrow{\text{联立方程}}\begin{cases}\sin\alpha=\\ \cos\alpha=\end{cases}\Rightarrow\tan\alpha$$

$$(3)A\sin\alpha\pm B\cos\alpha=k\xrightarrow[\text{ii.除1}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\ \text{iii.分子分母同除}\cos^2\alpha]{\text{i.左右同时平方}}\tan\alpha$$

$$\text{注意：}(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$$

题型三



知识点 01：同角三角函数的基本关系

1、平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2、商数关系：$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$（$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$）

【即学即练 1】（2023·全国·高一随堂练习）已知$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求$\tan\alpha$的值.

【答案】$-\dfrac{4}{3}$

【详解】因为$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，

所以$\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$，

所以$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.

知识点 02：关系式的常用等价变形

1、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{cases}$

2、$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha\\ \cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\end{cases}$

【即学即练 2】（2023 秋·山东·高三校联考开学考试）已知$\cos\alpha\neq0$，$3\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=1$，则$\tan 2\alpha=$_____.

【答案】$\dfrac{3}{4}$/0.75

【详解】由同角三角函数的平方关系及已知条件可知：

$\begin{cases}\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1\\ 3\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow \sin^2 2\alpha+(3\sin 2\alpha-1)^2=1\Rightarrow 10\sin^2 2\alpha-6\sin 2\alpha=0$，

当$\sin 2\alpha=0,\cos 2\alpha=-1$，此时$\cos\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}=0$，不合题意；

当$\sin 2\alpha=\dfrac{3}{5},\cos 2\alpha=\dfrac{4}{5}$，符合题意；

所以$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{3}{4}$.

故答案为：$\dfrac{3}{4}$



题型 01 同角三角函数的基本关系

【典例 1】（2023·全国·高一课堂例题）已知α是第二象限角，且$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，则$\tan\alpha$的值是（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$-2\sqrt{2}$

【答案】D

【详解】解：方法一 $\because\alpha$为第二象限角，

$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$.

方法二 $\because\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$角α终边上一点P的坐标为$\left(-1,2\sqrt{2}\right)$，

则$\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{-1}=-2\sqrt{2}$.

故选：D

【典例 2】（2023·全国·高一课堂例题）已知$\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$，并且$\alpha$是第四象限角，求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

【答案】$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$.

【详解】由$\sin\alpha$，$\cos\alpha$之间的关系式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$及第四象限角的余弦$\cos\alpha>0$得

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$，

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=-\frac{5}{12}$.

【变式 1】（2023 春·四川遂宁·高一射洪中学校考阶段练习）若 $\tan\theta=\frac{4}{3}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\cos\theta$ 的值为（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

【答案】A

【详解】因为 $\tan\theta=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$；

因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\frac{16}{9}\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$，解得 $\cos\theta=\pm\frac{3}{5}$；

因为 $\tan\theta=\frac{4}{3}>0,\theta\in(0,\pi)$，所以 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\theta=\frac{3}{5}$.

故选：A.

【变式 2】（2023 春·云南曲靖·高一校考阶段练习）若 α 是第四象限的角，且 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，则 $\cos\alpha=$_____.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【详解】因为 α 是第四象限的角，且 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，

所以 $\alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

所以 $\cos\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

【变式 3】（2023 春·新疆和田·高一校考阶段练习）已知 θ 是第四象限角，且 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，那么 $\tan\theta$ 的值为__

【答案】$-\frac{3}{4}$/-0.75

【详解】由 θ 是第四象限角，则 $\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{3}{5}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$.

故答案为：$-\frac{3}{4}$.

题型 02 平方关系

【典例 1】（2023·全国·高三专题练习）已知 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $5x^2-x+5m=0$ 的两根，则实数 $m=$_____.

【答案】$-\frac{12}{25}$

【详解】由$\sin\theta$，$\cos\theta$是关于x的方程$5x^2-x+5m=0$的两根，所以$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}\\ \sin\theta\cos\theta=m\\ \Delta=1-100m>0\end{cases}$，

由$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，可得$\left(\frac{1}{5}\right)^2=1+2m$，则$m=-\frac{12}{25}$，

经检验符合题意，所以实数m的值为$-\frac{12}{25}$.

故答案为：$-\frac{12}{25}$

【典例 2】（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{25}{\cos^2 x}$的最小值为_____，此时$\tan^2 x=$_____.

【答案】 49 $\frac{2}{5}$/0.4

【详解】由题意得$f(x)=\left(\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{25}{\cos^2 x}\right)(\sin^2 x+\cos^2 x)=29+\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{25\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\geq 29+2\sqrt{\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{25\sin^2 x}{\cos^2 x}}=49$，

当且仅当$\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{25\sin^2 x}{\cos^2 x}$，即$\tan^2 x=\frac{2}{5}$时，等号成立.

故答案为：49，$\frac{2}{5}$

【变式 1】（多选）（2023 秋·高一课时练习）下列命题是真命题的是（　　）

A．若$\sin\alpha=m$，则$\cos\alpha=\sqrt{1-m^2}$

B．若$\sin\alpha=m$，则$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-m^2}$

C．若$\tan\alpha=m$，则$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

D．若$\tan\alpha=m$，则$\sin\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

【答案】BD

【详解】对于 AB，当$\sin\alpha=m$时，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-m^2$，$\therefore\cos\alpha=\pm\sqrt{1-m^2}$，A 错误，B 正确；

对于 CD，由$\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$得：$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，$\sin\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$，C 错误，D 正确.

故选：BD.

【变式 2】（多选）（2023 秋·河南周口·高一统考期末）已知$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$，$\tan\theta=\frac{m-3}{4-2m}$，且$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

下面选项正确的是（　）

A．$m=8$　　B．$m=0$或$m=8$

C．$\sin\theta>\cos\theta$　　D．$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=-\frac{95}{169}$

【答案】ACD

【详解】由$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$，$\tan\theta=\frac{m-3}{4-2m}$，可得$\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta=\frac{m-3}{m+5}$，

$\because\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

$\therefore\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^2+\left(\frac{4-2m}{m+5}\right)^2=1$，

解得$m=0$或$m=8$.

$\because\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，经检验，当$m=0$时，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}>0$，不合题意，

$\therefore m=8$，

此时$\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=-\frac{12}{13}$，$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=-\frac{95}{169}$.

故 A 项正确，B 项错误，CD 项正确.

故选：ACD.

【变式 3】（2023 秋·上海徐汇·高二上海市南洋模范中学校考阶段练习）已知$\sin\alpha=\frac{2m-5}{m+1}$，$\cos\alpha=-\frac{m}{m+1}$，且$\alpha$为第二象限角，则$\tan\alpha=$_____.

【答案】$-\frac{3}{4}$/-0.75

【详解】$\because\alpha$为第二象限角，$\therefore\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2m-5}{m+1}>0\\ \cos\alpha=-\frac{m}{m+1}<0\end{cases}$，解得：$m<-1$或$m>\frac{5}{2}$；

$\because\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{(2m-5)^2+m^2}{(m+1)^2}=1$，即$(2m-5)^2+m^2=(m+1)^2$，

$\therefore 2m^2-11m+12=0$，解得：$m=\frac{3}{2}$（舍）或$m=4$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

故答案为：$-\frac{3}{4}$.

题型 03 已知正弦，余弦，正切中其一求另外两个量

【典例 1】（2023 春·山东济南·高一校考阶段练习）若 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 为第三象限角，则 $\tan\alpha=$（　）

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】D

【详解】∵ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 为第三象限角，

$$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5},$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}.$$

故选：D.

【典例 2】（2023 春·新疆·高二统考学业考试）若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，且 α 为第二象限角，则 $\cos\alpha=$_____.

【答案】$-\frac{\sqrt{3}}{2}$/$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

【详解】因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，且 α 为第二象限角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【典例 3】（2023 秋·甘肃天水·高一秦安县第一中学校考期末）计算：

(1)已知 $\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，$\tan\alpha=2$，求 $\cos\alpha$ 的值.

(2)已知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值

【答案】(1) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$；

(2)答案见解析.

【详解】（1）由 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得：$4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

又 $\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）因为 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，所以 α 为第二或第三象限角，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

若α为第二象限角，则$\sin\alpha=\frac{15}{17},\tan\alpha=-\frac{15}{8}$；

若α为第三象限角，则$\sin\alpha=-\frac{15}{17},\tan\alpha=\frac{15}{8}$.

【变式 1】（2023 春·云南文山·高二校考阶段练习）已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\cos\alpha=$（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

【答案】C

【详解】因为$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

故$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$，

故选：C

【变式 2】（2023 秋·上海静安·高三上海市市西中学校考开学考试）设θ为第二象限角，若$\tan\theta=-\frac{1}{2}$，则$\sin\theta+\cos\theta=$_____.

【答案】$-\frac{\sqrt{5}}{5}$/$\frac{-\sqrt{5}}{5}$

【详解】θ为第二象限角，则$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，

若$\tan\theta=-\frac{1}{2}$，则有$\begin{cases}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2}\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，

所以$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【变式 3】（2023 秋·上海徐汇·高二上海民办南模中学校考阶段练习）已知$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，则$\tan\alpha=$_____；

【答案】$\sqrt{2}$

【详解】因为$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，所以$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，

则$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

题型 04 利用平方关系求参数

【典例 1】（2023 春·上海·高一上海市敬业中学校考期中）若 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 是关于 x 的方程 $2x^2-4kx-3k=0$ 的两个实根，则实数 k 的值为_____

【答案】$\frac{1}{4}$

【详解】因为 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 是关于 x 的方程 $2x^2-4kx-3k=0$ 的两个实根，

则 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{-4k}{2}=2k$，$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3k}{2}$，

因为 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$ 且 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

所以 $4k^2=1+2\times\left(-\frac{3}{2}k\right)$，即 $4k^2+3k-1=0$，

解得：$k=-1$ 或 $k=\frac{1}{4}$，

因为方程 $2x^2-4kx-3k=0$ 有两个实根，

所以 $\Delta=16k^2-8(-3k)\geq 0$，解得：$k\leq-\frac{3}{2}$ 或 $k\geq 0$，

所以 $k=\frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{4}$.

【典例 2】（2023·全国·高三专题练习）已知 $\sin\alpha=\frac{4-2m}{m+5},\cos\alpha=\frac{m-3}{m+5}$，$\alpha$ 是第四象限角，则 $\tan\alpha=$_____.

【答案】$-\frac{12}{5}$

【详解】由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{4-2m}{m+5}\right)^2+\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^2=1$，解得 $m=0$ 或 8，

Q α 是第四象限角，$\therefore m=8$，

$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4-2m}{m-3}=-\frac{12}{5}$.

故答案为：$-\frac{12}{5}$.

【变式 1】（2023·全国·高一随堂练习）已知 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$，且 $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$，求实数 m 的值.

【答案】8

【详解】解：因为 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$，且 $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$，

则 $\sin\theta\geq 0$，

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $(\frac{m-3}{m+5})^2+(\frac{4-2m}{m+5})^2=1$，解得 $m=0$ 或 $m=8$，

当$m=0$时，$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，不满足题意，

当$m=8$时，$\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=-\frac{12}{13}$，满足题意．

所以$m=8$

【变式 2】（2023·高一课时练习）已知$\sin\theta=\frac{1-a}{1+a},\cos\theta=\frac{3a-1}{1+a}$，且$\theta$是第二象限角，求实数 a 的值.

【答案】$a=\frac{1}{9}$

【详解】因为θ是第二象限角，所以$\sin\theta=\frac{1-a}{1+a}>0,\cos\theta=\frac{3a-1}{1+a}<0$，解得$a\in(-1,\frac{1}{3})$，

由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$得到$(\frac{1-a}{1+a})^2+(\frac{3a-1}{1+a})^2=1$，解得$a=\frac{1}{9}$或$a=1$（舍）．

题型 05 已知$\tan\alpha$,求关于$\sin\alpha$和$\cos\alpha$的齐次式的值

【典例 1】（2023 秋·广西·高二广西大学附属中学校考开学考试）已知$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，则$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}$的值为（　）

A．-1　　B．1　　C．$\frac{5}{16}$　　D．$\frac{5}{4}$

【答案】C

【详解】因为$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，

所以$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+2}{5-\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{3}+2}{5-(-\frac{1}{3})}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{16}{3}}=\frac{5}{16}$.

故选：C.

【典例 2】（2023 秋·陕西咸阳·高三校考阶段练习）已知$\sin\alpha+\cos\alpha=3\cos\alpha\tan\alpha$，则$\cos^2\alpha\tan\alpha-1=$（　）

A．$-\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

【答案】A

【详解】因为$\sin\alpha+\cos\alpha=3\cos\alpha\tan\alpha=3\sin\alpha$，可得$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

可得$\cos^2\alpha\tan\alpha=\cos\alpha\sin\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{5}$，

所以$\cos^2\alpha\tan\alpha-1=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$.

故选：A.

【典例 3】（2023 秋·高一课时练习）若$\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}=-1$，则$\tan\alpha=$_____.

【答案】2

【详解】Q$\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha-3}{4\tan\alpha-9}=-1$，$\therefore 2\tan\alpha-3=-4\tan\alpha+9$，解得：$\tan\alpha=2$.

故答案为：2.

【典例 4】（2023 秋·高一课时练习）（1）已知$\tan\alpha=2$，求$\frac{\cos\alpha-5\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$.

（2）已知$\frac{3\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}=\frac{1}{5}$，求$\sin\alpha\cos\alpha$的值.

【答案】（1）$-\frac{9}{5}$；（2）$\frac{2}{5}$.

【详解】（1）$\frac{\cos\alpha-5\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-5\tan\alpha}{3+\tan\alpha}=\frac{1-10}{3+2}=-\frac{9}{5}$；

（2）由$\frac{3\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}=\frac{1}{5}$得：$15\cos\alpha-5\sin\alpha=\cos\alpha+2\sin\alpha$，$\therefore 2\cos\alpha=\sin\alpha$；

方法一：$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2}{5}$；

方法二：由$2\cos\alpha=\sin\alpha$得：$\tan\alpha=2$，

$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$.

【变式 1】（2023 春·江西萍乡·高一统考期中）已知$\tan\theta=2$，则$\frac{\cos\theta-2\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=$（　）

A．0　　B．$-\frac{5}{3}$　　C．-1　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】C

【详解】由题知，$\tan\theta=2$，

则$\frac{\cos\theta-2\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1-2\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$=\frac{1-2\times2}{1+2}=\frac{-3}{3}=-1$.

故选：C.

【变式 2】（2023·全国·高二专题练习）已知$\tan\alpha=2$，则$\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}=$（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】C

【详解】因为$\tan\alpha=2$，所以$\cos\alpha\neq0$.

所以$\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}=\dfrac{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{2\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{2\tan\alpha-1}{2+3\tan\alpha}=\dfrac{2\times2-1}{2+3\times2}=\dfrac{3}{8}$.

故选：C.

【变式 3】（2023 秋·宁夏石嘴山·高三平罗中学校考阶段练习）若$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，则$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=$_____.

【答案】$\dfrac{1}{7}$

【详解】Q$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}=\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\dfrac{\dfrac{4}{3}-1}{\dfrac{4}{3}+1}=\dfrac{1}{7}$.

故答案为：$\dfrac{1}{7}$.

【变式 4】（2023 春·辽宁大连·高一大连八中校考阶段练习）已知角θ终边上$P(x,2x-3),(x\neq0)$，且$\tan\theta=-x$，求$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$的值.

【答案】2 或 0

【详解】由于$\tan\theta=\dfrac{2x-3}{x}$，故$\dfrac{2x-3}{x}=-x$，解得$x=-3$或$x=1$.

当$x=-3$时，$\tan\theta=3$，$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=2$

当$x=1$时，$\tan\theta=-1$，$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=0$.

题型 06 利用$\sin\alpha+\cos\alpha$,$\sin\alpha-\cos\alpha$与$\sin\alpha\cos\alpha$之间的关系求值

【典例 1】（2023 春·新疆塔城·高一塔城地区第一高级中学校考阶段练习）已知$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，且$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{17}{13}$则$\tan\alpha$的值为（　）

A．$\dfrac{12}{5}$　　B．$-\dfrac{12}{5}$　　C．$\dfrac{5}{12}$　　D．$-\dfrac{5}{12}$

【答案】C

【详解】由$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{17}{13}$，两边平方得$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{289}{169}$，

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{120}{169}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/317131031065010000