§2 求导法则

- 一、导数的四则运算
- 二、反函数的导数
- 三、复合函数的求导法则
- 四、求导法则、公式与初等函数的导数

一、导数的四则运算

- 1、和、差、积、商的求导法则

定理 如果函数$u(x)$，$v(x)$在点x处可导，则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导，并且

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

上页 下页 返回

证(1)　设 $f(x)=u(x)+v(x)$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$=u'(x)+v'(x)$$

$\therefore f(x)$在x处可导

上页　下页　返回

证(2) 设 $f(x)=u(x)\cdot v(x)$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)\cdot v(x+h)\right]-\left[u(x)\cdot v(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x+h)+u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[v(x+h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$\therefore f(x)$在x处可导

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$\therefore\ f(x)$在x处可导

推论

$$(1)\quad \Big[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\Big]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$$

$$(2)\quad [Cf(x)]' = Cf'(x);$$

$$(3)\quad \Big[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\Big]' = f_1'(x) f_2(x)\cdots f_n(x)$$

$$+\cdots + f_1(x) f_2(x)\cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} f_i'(x) f_k(x);$$

$$(4)\quad \left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (\, g(x) \neq 0 \,)$$

以$n=3$ 为例，可证(3)：

$$[f(x)g(x)h(x)]' = \left[f(x)\big(g(x)h(x)\big)\right]'$$

$$= f'(x)\big(g(x)h(x)\big) + f(x)\big(g(x)h(x)\big)'$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\big(g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\big)$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

上页 下页 返回

2、例题分析　复习前面学过的几个求导公式

例1　求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数.

解　$y' = 3x^2 - 4x + \cos x$

例2　求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数.

解　$\because\ y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

例3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

上页 下页 返回

例4　求 $y=\sec x$ 的导数.

解　$y'=(\sec x)'=(\frac{1}{\cos x})'$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得　$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例5　求 $y=\sinh x$ 的导数.

解　$y'=(\sinh x)'=[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]'=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$

同理可得　$(\cosh x)'=\sinh x$　　$(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}$

例6 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解 当$x<0$时, $f'(x)=1$.

当$x>0$时,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{1+x})$$

$$=\frac{1}{1+x},$$

当$x=0$时,

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-\ln(1+0)}{h}=1.$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1.$$

$$\therefore\ f'(0)=1.$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}.$$

上页 下页 返回

3、小结

注意: $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)+v'(x);$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

分段函数求导时，分界点导数用左右导数求.

复习前面学过的基本初等函数的求导公式

(1) $(C)' = 0.$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}.$

(3) $(\sin x)' = \cos x.$

(4) $(\cos x)' = -\sin x.$

(5) $(a^x)' = a^x \ln a.$ $(e^x)' = e^x.$

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e.$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

返回 2、例题分析

上页 下页 返回

思考题

求曲线 $y = 2x - x^3$ 上与 x 轴平行的切线方程.

思考题解答

$y' = 2 - 3x^2$ 令 $y' = 0$ $\Rightarrow$ $2 - 3x^2 = 0$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

切点为 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

所求切线方程为 $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ 和 $y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$

练 习 题

一、填空题:

1、设 $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$，则 $y'=$ __________.

2、设 $y=3a^{x}+e^{x}-\dfrac{2}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ __________.

3、设 $y=e^{x}(x^{2}-3x+1)$, 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ __________.

4、设 $y=2\tan x+\sec x-1$, 则 $y'=$ __________.

5、设 $y=f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^{2}}{5}$, 则 $f'(0)=$ __________.

6、曲线 $y=\dfrac{\pi}{2}+\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线与 x 轴正向的夹角为__________.

二、计算下列各函数的导数:

1、$y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$; 2、$y=\dfrac{10^x-1}{10^x+1}$;

3、$y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$; 4、$f(x)=\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$, 求$f'(4)$;

5、$y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b \quad (a>0,b>0)$.

三、求抛物线$y=ax^2+bx+c$上具有水平切线的点

四、写出曲线$y=x+\dfrac{1}{x}$与x轴交点处的切线方程

练习题答案

一、1、$\sqrt{x}\left(\frac{\sin x}{2x}+\cos x\right)$；2、$3a^{x}\ln a+e^{x}+\frac{2}{x^{2}}$；

3、-2；　4、$\sec x(2\sec x+\tan x)$；5、$\frac{3}{25}$；6、$\frac{\pi}{4}$.

二、1、$-\frac{1+2x}{(1+x+x^{2})^{2}}$；　2、$\frac{10^{x}\cdot 2\ln 10}{(10^{x}+1)^{2}}$；

3、$\frac{2\csc x[(1+x^{2})\cot x+2x]}{(1+x^{2})^{2}}$；　4、$-\frac{1}{18}$；

5、$\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)$.

三、$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^{2}-4ac}{4a}\right)$.

四、$2x-y-2=0$和$2x-y+2=0$.

上页　下页　返回

二、反函数的导数

- **定理(反函数求导法则)** 如果函数 $x=\varphi(y)$ 满足:

(1) 在 y_0 的邻域 $U(y_0)$ 内严格单调(增加或减少),且连续;

(2) 在 y_0 处可导,且 $\varphi'(y_0)\neq 0$

那末 (1) 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内,$x=\varphi(y)$ 有反函数

$$y=f(x)$$

(2) 在 $x_0=\varphi(y_0)$ 的邻域内,$y=f(x)$ 严格增加(或减少),

且持续。

(3) $y=f(x)$ 在 x_0 处可导,且有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}$

证：(1)与(2)，由上一章，即知。

证(3)：给 x_0 以增量 $\Delta x\,(\Delta x \neq 0, x_0 + \Delta x \in U(x_0))$

则函数 $y = f(x)$ 将获得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\therefore f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y \qquad \therefore \Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$

由 $y = f(x)$ 的严格单调性与 $\Delta x \neq 0$ 可知 $\Delta y \neq 0$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x / \Delta y},$$

□ 在 $f(x)$ x_0 连续，当 $\Delta x \to 0$ 时，

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$$

上页 下页 返回

$$\therefore f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x / \Delta y} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

即

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

y 在 $= f(x)$ y_0 处可导，且有 $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(x)}$

上述定理中，把x_0 换成 x y_0 换成 y 得

推论 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内严格单调、可导，且$\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

即　反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例1　求函数$y=\arcsin x$的导数

解　$\because x=\sin y$在$I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调、可导，

且$(\sin y)'=\cos y>0$，　$\therefore$ 在$I_x\in(-1,1)$内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\quad (\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

上页　下页　返回

例2　求函数 $y=\log_a x$ 的导数

解　Q $x=a^y$ 在 $I_y\in(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导，

且 $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$,　$\therefore$ 在 $I_x\in(0,+\infty)$ 内有，

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

阐明：

改用莱布尼兹记号

①公式 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(x)}$ 容易记忆；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

②从几何直观来看反函数的导数公式，方程 $y=f(x)$ 与

$x=\varphi(y)$ 表示同一曲线，该曲线在点 (x_0,y_0) 的切线

l 关于 x 轴和 y 轴的倾角分别是 α 和 β

则 $f'(x_0)=\tan\alpha$　$\varphi'(y_0)=\tan\beta$　即 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

因此应有：$\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan\beta}$　$f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$

③计算反函数的导数，应先将函数、反函数，及其定义域单调性搞清。

④切记新得到的几个初等函数的导数公式。

三、复合函数的求导法则

定理　设函数 $y = f(u)$　构成复合函数 $u = \varphi(x)$

$$y = f[\varphi(x)]$$

如果函数$u = \varphi(x)$在点x_0可导，而$y = f(u)$在点$u_0 = \varphi(x_0)$可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即　因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

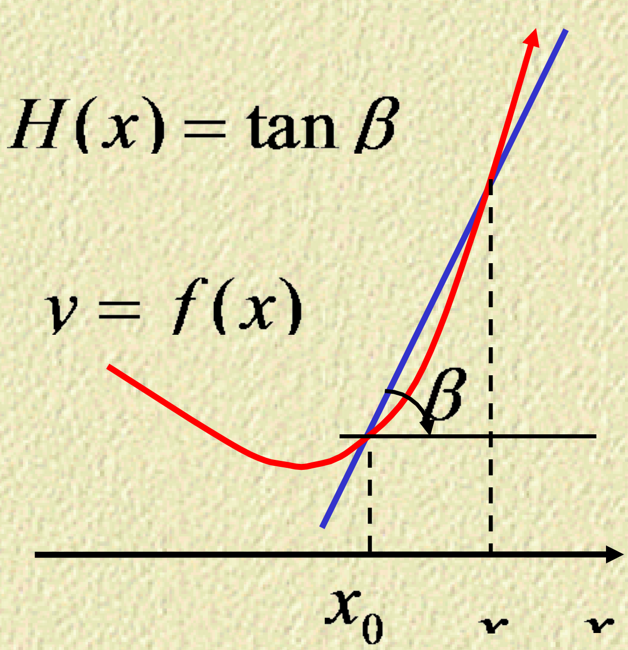
简写为:
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0}$$

引理 $f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Leftrightarrow$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内，存在一个在点 x_0 的连续函数 $H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0) \quad 且 \quad f'(x_0)=H(x_0)$$

证明：设在点可导，令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^{\circ}(x_0)\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$$



则因

$$\lim_{x\to x_0}H(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f'(x_0)=H(x_0)$$

所以 $H(x)$ 在点 x_0 连续,

且 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0) \quad x\in \mathring{U}(x_0)$

反之，设存在 $H(x)$ $x\in \mathring{U}(x_0)$，它在 x_0 点连续,

且 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0) \quad x\in U^{\circ}(x_0)$

因极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}H(x)=H(x_0)$$

存在, 所以 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=H(x_0)$

上页 下页 返回

证明（法1）：因为 $f(u)$ 在点 u_0 可导，由引理，

存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$，使得

$$f'(u_0)=F(u_0)$$

且 $f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0)\quad u\in U(u_0)$

又因为 $\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，同理存在一个在点 x_0

连续的函数 $\Phi(x)$ 使得 $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$

且 $\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0)\quad x\in U(x_0)$