

湖南省新化县第一中学 2023-2024 学年高三适应性调研考试数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | x(x-2) < 0\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点，则双曲线的离心率的取值范围

是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

3. 已知方程 $x|x| + y|y| = -1$ 表示的曲线为 $y = f(x)$ 的图象，对于函数 $y = f(x)$ 有如下结论：① $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减；② 函数 $F(x) = f(x) + x$ 至少存在一个零点；③ $y = f(|x|)$ 的最大值为 1；④ 若函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 图象关于原点对称，则 $y = g(x)$ 由方程 $y|y| + x|x| = 1$ 所确定；则正确命题序号为 ()

- A. ①③ B. ②③ C. ①④ D. ②④

4. 已知 $p: \exists x_0 > 1, \log_{\frac{1}{2}} x_0 > \frac{1}{2}$ ； $q: \forall x \in R, e^x > x$ ，则下列说法中正确的是 ()

- A. $p \vee q$ 是假命题 B. $p \wedge q$ 是真命题
C. $p \vee (\neg q)$ 是真命题 D. $p \wedge (\neg q)$ 是假命题

5. 函数 $y = f(x)$ ， $x \in R$ ，则“ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“ $y = f(x)$ 是奇函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = AC = 1$ ， $BC = AA_1 = \sqrt{2}$ ，点 E, O 分别是线段 C_1C, BC 的中点，

$\overline{A_1F} = \frac{1}{3} \overline{A_1A}$ ，分别记二面角 $F - OB_1 - E$ ， $F - OE - B_1$ ， $F - EB_1 - O$ 的平面角为 α, β, γ ，则下列结论正确的是 ()

- A.** $\gamma > \beta > \alpha$ **B.** $\alpha > \beta > \gamma$ **C.** $\alpha > \gamma > \beta$ **D.** $\gamma > \alpha > \beta$

7. 已知函数 $f(x) = x + e^{x-a}$, $g(x) = \ln(x+2) - 4e^{a-x}$, 其中 e 为自然对数的底数, 若存在实数 x_0 , 使

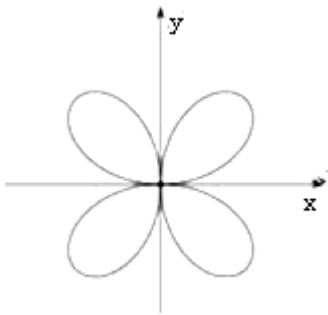
$f(x_0) - g(x_0) = 3$ 成立, 则实数 a 的值为 ()

- A.** $-\ln 2 - 1$ **B.** $-1 + \ln 2$ **C.** $-\ln 2$ **D.** $\ln 2$

8. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论：

- ①曲线 C 有四条对称轴;
- ②曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$;
- ③曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$;
- ④四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中，所有正确结论的序号是（ ）



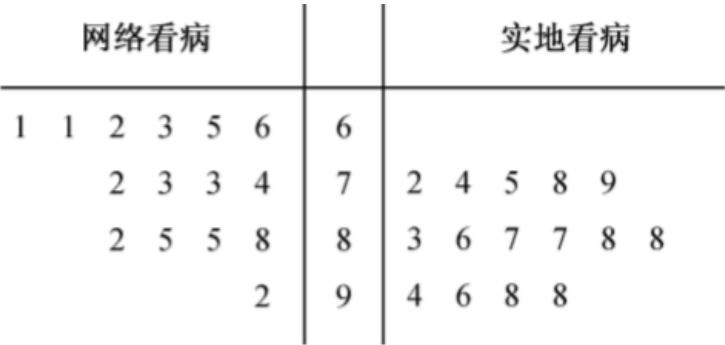
- A. ①② B. ①③ C. ①③④ D. ①②④

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 n 的值为 ()

的面积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）网络看病就是国内或者国外的单个人、多个人或者单位通过国际互联网或者其他局域网对自我、他人或者某种生物的生理疾病或者机器故障进行查找询问、诊断治疗、检查修复的一种新兴的看病方式.因此，实地看病与网络看病便成为现在人们的两种看病方式，最近某信息机构调研了患者对网络看病，实地看病的满意程度，在每种看病方式的患者中各随机抽取 15 名，将他们分成两组，每组 15 人，分别对网络看病，实地看病两种方式进行满意度测评，根据患者的评分（满分 100 分）绘制了如图所示的茎叶图：



（1）根据茎叶图判断患者对于网络看病、实地看病那种方式的满意度更高？并说明理由；

（2）若将大于等于 80 分视为“满意”，根据茎叶图填写下面的列联表：

	满意	不满意	总计
网络看病			
实地看病			
总计			

并根据列联表判断能否有 90% 的把握认为患者看病满意度与看病方式有关？

（3）从网络看病的评价“满意”的人中随机抽取 2 人，求这 2 人平分都低于 90 分的概率.

附 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.（12 分）已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，若矩阵 $M = BA$ ，求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

19. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为

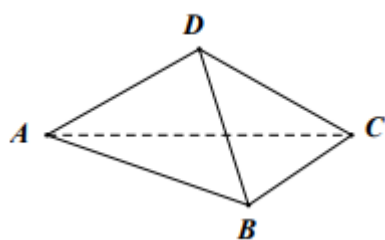
$$\rho = 2\sin\theta + 2a\cos\theta (a > 0); \text{ 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 分别交于 } M, N \text{ 两}$$

点.

(1) 写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 若点 P 的极坐标为 $(2, \pi)$, $|PM| + |PN| = 5\sqrt{2}$, 求 a 的值.

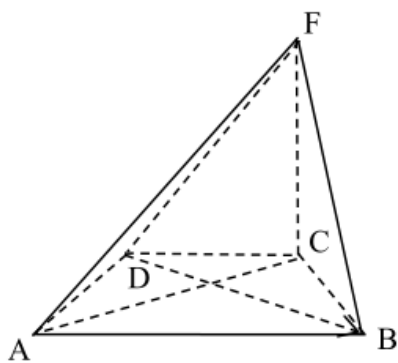
20. (12分) 如图, 在四面体 $DABC$ 中, $AB \perp BC$, $DA = DC = DB$.



(1) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD ;

(2) 若 $AD = 2$, $AB = 2BC$, $\angle CAD = 30^\circ$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.

21. (12分) 在如图所示的四棱锥 $F-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 60^\circ$, $FC \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \perp BF$, $CB = CD = 1$.



(1) 求证: $AC \perp$ 平面 BCF ;

(2) 已知二面角 $F-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求直线 AF 与平面 DFB 所成角的正弦值.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$;

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $ab + b$ 的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

先解 A、B 集合, 再取交集。

【详解】

$x(x-2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$, 所以 B 集合与 A 集合的交集为 $\{1\}$, 故选 A

【点睛】

一般地, 把不等式组放在数轴中得出解集。

2、C

【解析】

求得双曲线的渐近线方程, 可得圆心 $(0, 2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$, 由点到直线的距离公式可得 a 的范围, 再由离心率公式计算即可得到所求范围。

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$, 即 $x - ay = 0$,

由题意知, 直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离, 则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$,

解得 $a \geq 1$, 因此, 双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$.

故选: C.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围, 注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径, 考查化简整理的运算能力, 属于中档题。

3、C

【解析】

分四类情况进行讨论，然后画出相对应的图象，由图象可以判断所给命题的真假性.

【详解】

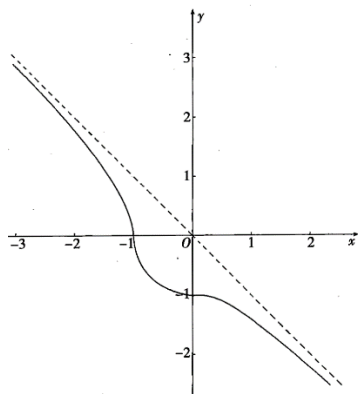
(1) 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $x^2 + y^2 = -1$, 此时不存在图象;

(2) 当 $x \geq 0, y < 0$ 时, $y^2 - x^2 = 1$, 此时为实轴为 y 轴的双曲线一部分;

(3) 当 $x < 0, y \geq 0$ 时, $x^2 - y^2 = 1$, 此时为实轴为 x 轴的双曲线一部分;

(4) 当 $x < 0, y < 0$ 时, $x^2 + y^2 = 1$, 此时为圆心在原点, 半径为 1 的圆的一部分;

画出 $y = f(x)$ 的图象,



由图象可得:

对于①, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 所以①正确;

对于②, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = -x$ 的图象没有交点, 即 $F(x) = f(x) + x$ 没有零点, 所以②错误;

对于③, 由函数图象的对称性可知③错误;

对于④, 函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 图象关于原点对称, 则 $x|x| + y|y| = -1$ 中用 $-x$ 代替 x , 用 $-y$ 代替 y , 可得

$y|y| + x|x| = 1$, 所以④正确.

故选: C

【点睛】

本题主要考查了双曲线的简单几何性质, 函数的图象与性质, 函数的零点概念, 考查了数形结合的数学思想.

4、D

【解析】

举例判断命题 p 与 q 的真假, 再由复合命题的真假判断得答案.

【详解】

当 $x_0 > 1$ 时, $\log_{\frac{1}{2}} x_0 < 0$, 故 p 命题为假命题;

记 $f(x) = e^x - x$ 的导数为 $f'(x) = e^x - 1$,

易知 $f(x) = e^x - x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

$\therefore f(x) > f(0) = 1 > 0$, 即 $\forall x \in R, e^x > x$, 故 q 命题为真命题;

$\therefore p \wedge (\neg q)$ 是假命题

故选 D

【点睛】

本题考查复合命题的真假判断, 考查全称命题与特称命题的真假, 考查指数函数的图象与性质, 是基础题.

5、B

【解析】

根据函数奇偶性的性质, 结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

设 $g(x) = |xf(x)|$, 若函数 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数, 则 $g(-x) = |-xf(-x)| = |xf(x)| = g(x)$, 所以, 函数 $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称.

所以, “ $y = f(x)$ 是奇函数” $\Rightarrow$ “ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”;

若函数 $y = f(x)$ 是 R 上的偶函数, 则 $g(-x) = |-xf(-x)| = |-xf(x)| = |xf(x)| = g(x)$, 所以, 函数 $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称.

所以, “ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称” $\nRightarrow$ “ $y = f(x)$ 是奇函数”.

因此, “ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称” 是 “ $y = f(x)$ 是奇函数” 的必要不充分条件.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合函数奇偶性的性质判断是解决本题的关键, 考查推理能力, 属于中等题.

6、D

【解析】

过点 C 作 $Cy \parallel AB$, 以 C 为原点, CA 为 x 轴, Cy 为 y 轴, CC_1 为 z

轴，建立空间直角坐标系，利用向量法求解二面角的余弦值得答案。

【详解】

解：因为 $AB = AC = 1$ ， $BC = AA_1 = \sqrt{2}$ ，所以 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ，即 $AB \perp AC$

过点 C 作 $Cy \parallel AB$ ，以 C 为原点， CA 为 x 轴， Cy 为 y 轴， CC_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $F(1, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ， $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ， $E(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $B_1(1, 1, \sqrt{2})$ ，

$\vec{OB_1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$ ， $\vec{OE} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

$\vec{OF} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ， $\vec{EB_1} = (1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $\vec{EF} = (1, 0, \frac{\sqrt{2}}{6})$ ，

设平面 OB_1E 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{OB_1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{2}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{OE} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{得 } \vec{m} = (1, -1, 0),$$

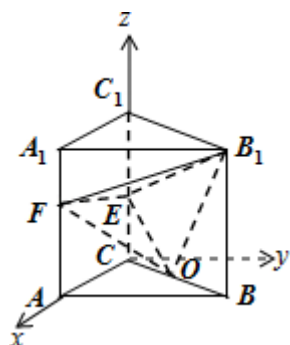
同理可求平面 OB_1F 的法向量 $\vec{n} = (-5\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$ ，

平面 OEF 的法向量 $\vec{p} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}, 3)$ ，平面 EFB_1 的法向量 $\vec{q} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, 3)$ 。

$$\therefore \cos \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{61}}{61}, \cos \beta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{p}|}{|\vec{m}| |\vec{p}|} = \frac{4\sqrt{34}}{34}, \cos \gamma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{q}|}{|\vec{m}| |\vec{q}|} = \frac{\sqrt{46}}{46}.$$

$$\therefore \gamma > \alpha > \beta.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查二面角的大小的判断，考查空间中直线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，属于中档题。

7、A

【解析】

$$\text{令 } f(x) - g(x) = x + e^{x-a} - \ln(x+1) + 4e^{a-x},$$

$$\text{令 } y = x - \ln(x+1), y' = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2},$$

故 $y = x - \ln(x+1)$ 在 $(-1, -1)$ 上是减函数, $(-1, +\infty)$ 上是增函数,

故当 $x = -1$ 时, y 有最小值 $-1 - 0 = -1$,

而 $e^{x-a} + 4e^{a-x} \geq 4$, (当且仅当 $e^{x-a} = 4e^{a-x}$, 即 $x = a + \ln 4$ 时, 等号成立);

故 $f(x) - g(x) \geq 3$ (当且仅当等号同时成立时, 等号成立);

故 $x = a + \ln 4 = -1$, 即 $a = -1 - \ln 4$. 故选: A.

8、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数; ②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值; ③将面积转化为 x, y 的关系式, 然后根据基本不等式求解出最大值; ④根据 x, y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系, 从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

①: 当 x 变为 $-x$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 y 轴对称;

当 y 变为 $-y$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 x 轴对称;

当 y 变为 x 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 $y = x$ 轴对称;

当 y 变为 $-x$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 $y = -x$ 轴对称;

综上所述: 有四条对称轴, 故正确;

②: 因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$,

所以 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, 取等号时 $x^2 = y^2 = \frac{1}{8}$,

所以最大距离为 $\frac{1}{2}$, 故错误;

③: 设任意一点 $P(x, y)$, 所以围成的矩形面积为 xy ,

因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^3 \geq (2xy)^3$, 所以 $xy \leq \frac{1}{8}$,

取等号时 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以围成矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$, 故正确;

④: 由②可知 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以四叶草包含在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的内部,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318010031027006062>