2024届上海市格致中学高三上学期10月月考数学试题

一、填空题

1．已知集合 $A=\mathbf{N}$，$B=\left\{x\middle||2x-1|<5\right\}$，则 $A\cap B=$__________（用列举法表示）

【答案】$\{0,1,2\}$

【分析】解不等式得到 $B=\{x|-2<x<3\}$，从而求出交集.

【详解】$B=\left\{x\middle||2x-1|<5\right\}=\{x|-2<x<3\}$，故 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

故答案为：$\{0,1,2\}$

2．已知复数 z 满足 $z(1-i)=4$（i为虚数单位），则 $|z|=$_________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】求出 $z=\dfrac{4}{1-i}$，再根据复数模的求法即可求解.

【详解】$z=\dfrac{4}{1-i}$，所以 $|z|=\dfrac{4}{|1-i|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$

3．已知 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-3$，则 $\tan\alpha=$________.

【答案】2

【分析】由两角和的正切公式，有 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-3$，解得 $\tan\alpha=2$.

4．已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点 $\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$，且 $f(m-2)>1$，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】$(3,+\infty)$

【分析】根据 $f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$ 可求得 α，由此可得 $f(x)$ 解析式；将所求不等式化为 $f(m-2)>f(1)$，根据幂函数的单调性解不等式即可求得结果.

【详解】$\because f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{\alpha}=2\sqrt{2}$，$\therefore\alpha=3$，即 $f(x)=x^3$，$\therefore$ $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

又 $f(1)=1$，$\therefore f(m-2)>1$ 可化为 $f(m-2)>f(1)$，$\therefore m-2>1$，

解得：$m>3$，即实数 m 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

故答案为：$(3,+\infty)$.

5．在$\triangle ABC$中，若$AB=2$，$\angle B=\frac{5\pi}{12}$，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，则$BC=$_______.

【答案】$\sqrt{6}$

【解析】由内角和求得A，然后由正弦定理求得BC.

【详解】$A=\pi-B-C=\pi-\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，所以$BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{6}$.

故答案为：$\sqrt{6}$.

6．若圆锥的侧面积为20π，且母线与底面所成角为$\arccos\frac{4}{5}$，则该圆锥的体积为_____.

【答案】16π

【分析】设出圆锥的底面半径，表达出母线长和圆锥的高，根据圆锥的侧面积列出方程，求出半径，从而求出圆锥的体积.

【详解】设圆锥的底面半径为r，

因为母线与底面所成角为$\arccos\frac{4}{5}$，所以圆锥母线长为$l=\frac{5}{4}r$，

由勾股定理得：圆锥的高为$\sqrt{\left(\frac{5}{4}r\right)^2-r^2}=\frac{3}{4}r$，

故$\pi rl=\frac{5}{4}r^2=20\pi$，解得：$r=4$，

故圆锥的高为$\frac{3}{4}\times4=3$，圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi\times4^2\times3=16\pi$

故答案为：16π.

7．在$(x+\sqrt{2})^7$的二项展开式中任取一项，则该项系数为有理数的概率为_______.（用数字作答）

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】根据二项展开式的通项，确定有理项所对应的r的值，从而确定其概率.

【详解】$(x+\sqrt{2})^7$展开式的通项为$T_{r+1}=C_7^r x^{7-r}\left(\sqrt{2}\right)^r=C_7^r 2^{\frac{r}{2}}x^{7-r}$，

$0\le r\le7, r\in N$，

当且仅当r为偶数时，该项系数为有理数，

故有$r=0,2,4,6$满足题意，

故所求概率 $P=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

【点睛】(1)二项式定理的核心是通项公式，求解此类问题可以分两步完成：第一步根据所给出的条件(特定项)和通项公式，建立方程来确定指数(求解时要注意二项式系数中 n 和 r 的隐含条件，即 n，r 均为非负整数，且 $n\geq r$，如常数项指数为零、有理项指数为整数等)；第二步是根据所求的指数，再求所求解的项.

(2)求两个多项式的积的特定项，可先化简或利用分类加法计数原理讨论求解.

8．若随机变量 X 服从正态分布 $N\left(3,\sigma^2\right)$，$P\left(1\leq X\leq 5\right)=0.6$，则 $P\left(X>5\right)=$_________.

【答案】0.2 / $\frac{1}{5}$

【分析】利用正态密度曲线的对称性可求得结果.

【详解】因为随机变量 X 服从正态分布 $N\left(3,\sigma^2\right)$，$P\left(1\leq X\leq 5\right)=0.6$，

则 $P\left(X>5\right)=\frac{1-P\left(1\leq X\leq 5\right)}{2}=\frac{1-0.6}{2}=0.2$.

故答案为：0.2.

9．已知椭圆 Γ_1 与双曲线 Γ_2 的离心率互为倒数，且它们有共同的焦点 F_1、F_2，P 是 Γ_1 与 Γ_2 在第一象限的交点，当 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{6}$ 时，双曲线 Γ_2 的离心率等于_____.

【答案】$2+\sqrt{3}$ / $\sqrt{3}+2$

【分析】根据 P 点是椭圆和双曲线的交点，结合椭圆双曲线的定义表示出 $\left|PF_1\right|$，$\left|PF_2\right|$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中结合余弦定理即可列出方程求解.

【详解】设椭圆 Γ_1 标准方程为 $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1\left(a_1>b_1>0\right)$，椭圆离心率为 e_1，

设双曲线 Γ_2 标准方程为 $\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1\left(a_2>0,b_2>0\right)$，双曲线离心率为 e_2，

由题可知：$e_1\cdot e_2=1$.

设 $\left|PF_1\right|=m$，$\left|PF_2\right|=n$，

则 $\begin{cases} m+n=2a_1, ① \\ m-n=2a_2, ② \\ 4c^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos\frac{\pi}{6}, ③ \end{cases}$，

由①②得，$m=a_1+a_2$，$n=a_1-a_2$，

代入③整理得，$4c^2=\left(2-\sqrt{3}\right)a_1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)a_2^2$，

两边同时除以c^2得，$4=\dfrac{2-\sqrt{3}}{e_1^2}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{e_2^2}$，

即$4=\left(2-\sqrt{3}\right)e_2^2+\dfrac{2+\sqrt{3}}{e_2^2}$，

即$\left(2-\sqrt{3}\right)e_2^4-4e_2^2+2+\sqrt{3}=0$，

解得$e_2^2=(2+\sqrt{3})^2$，即$e_2=2+\sqrt{3}$.

故答案为：$2+\sqrt{3}$

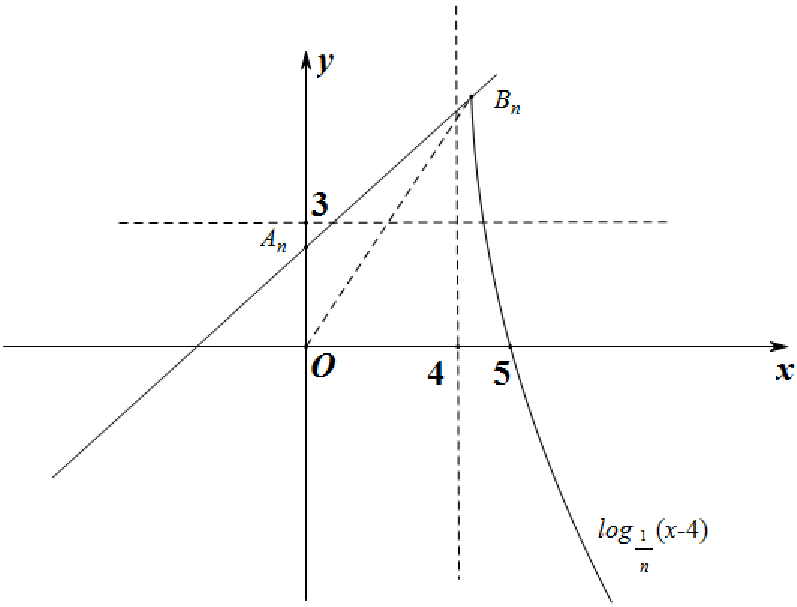
【点睛】本题综合考查椭圆和双曲线的几何性质，解题关键是熟练应用椭圆和双曲线的定义，结合焦点三角形中的余弦定理，列出方程组即可求解.

10．已知$n\in N$，$n\geq 2$，函数$y=\dfrac{n}{n^2+3}x+\dfrac{3n}{n+3}$的图像与$y$轴相交于点$A_n$、与函数$y=\log_{\frac{1}{n}}(x-4)$的图像相交于点$B_n$，$\triangle OA_nB_n$的面积为$S_n$($O$为坐标原点)，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_________.

【答案】6

【解析】根据题意先画出大致图象，当$n\to\infty$时，先确定A_n趋近于$A\left(0,3\right)$，再确定B_n趋近于$B(4,3)$，从而可知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的值就是$\triangle OAB$的面积.

【详解】依题意画出大致图象，如下图：



易得 $A_n\left(0,\dfrac{3n}{n+3}\right)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+3}=3$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+3}=0$，

当 $n\to\infty$ 时，直线 $y=\dfrac{n}{n^2+3}x+\dfrac{3n}{n+3}$ 趋近于 $y=3$，A_n 趋近于 $A(0,3)$，

当 $n\to\infty$ 时，曲线 $y=\log_{\frac{1}{n}}(x-4)$ 趋近于渐近线 $x=4$，B_n 趋近于 $B(4,3)$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$.

故答案为：6.

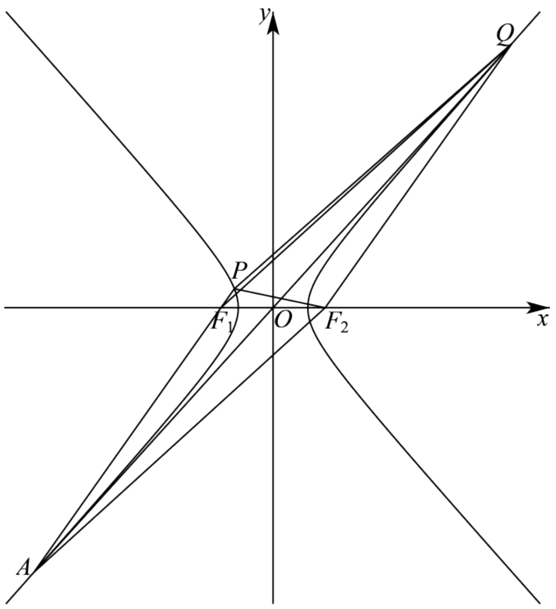
【点睛】方法点睛：当 $n\to\infty$ 时，先确定 A_n，再确定 B_n，从而求得极限值.

11．已知双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，直线 l 与 Γ 的左、右支分别交于点 P、Q（P、Q 均在 x 轴上方）.若直线 PF_1、QF_2 的斜率均为 k，且四边形 PQF_2F_1 的面积为 $20\sqrt{6}$，则 $k=$_________.

【答案】$\pm\sqrt{2}$

【分析】设点 Q 关于原点的对称点为点A，连接 AF_1，分析可知四边形 AF_1QF_2 为平行四边形，可得出 $S_{四边形PQF_2F_1}=S_{\triangle PAF_2}$，设 $m=\dfrac{1}{k}$，可得出直线 AP 的方程为 $x=my-3$，设点 $A(x_1,y_1)$、$P(x_2,y_2)$，将直线 AP 的方程与双曲线的方程联立，列出韦达定理，求出 m^2 的取值范围，利用三角形的面积公式可求得 m^2 的值，即可求得 k 的值.

【详解】解：设点 Q 关于原点的对称点为点A，连接 AF_1，如下图所示：



在双曲线Γ中，$a=2$，$b=\sqrt{5}$，则$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，即点$F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$，

因为原点O为AQ、F_1F_2的中点，则四边形AF_1QF_2为平行四边形，所以，$AF_1//QF_2$且$|AF_1|=|QF_2|$，

因为$PF_1//QF_2$，故A、P、F_1三点共线，

所以，$S_{\triangle PQF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}$，故$S_{四边形PQF_2F_1}=S_{\triangle PQF_2}+S_{\triangle PF_1F_2}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle PF_1F_2}=S_{\triangle PAF_2}$，

由题意可知，$k\neq 0$，设$m=\frac{1}{k}$，则直线AP的方程为$x=my-3$，设点$A(x_1,y_1)$、$P(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my-3\\5x^2-4y^2=20\end{cases}$，可得$(5m^2-4)y^2-30my+25=0$，

所以，$\begin{cases}5m^2-4\neq 0\\\Delta=900m^2-100(5m^2-4)>0\end{cases}$，可得$m^2\neq\frac{4}{5}$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=\frac{30m}{5m^2-4}$，$y_1y_2=\frac{25}{5m^2-4}<0$，可得$m^2<\frac{4}{5}$，

$$S_{\triangle PAF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|(|y_1|+|y_2|)=3|y_1-y_2|=3\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=3\sqrt{\left(\frac{30m}{5m^2-4}\right)^2-\frac{100}{5m^2-4}}=\frac{60\sqrt{m^2+1}}{|5m^2-4|}=20\sqrt{6}$$，

整理可得$50m^4-83m^2+29=0$，即$(2m^2-1)(25m^2-29)=0$，解得$m^2=\frac{1}{2}$或$\frac{29}{25}$（舍），

所以，$k^2=\frac{1}{m^2}=2$，解得$k=\pm\sqrt{2}$.

故答案为：$\pm\sqrt{2}$.

12．对任意闭区间I，用M_I表示函数$y=\sin x$在I上的最大值，若有且仅有一个正数a使得$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$成立，则实数k的取值范围是_______.

【答案】$\left(\frac{1}{2},1\right)$

【分析】讨论a的范围得出k的表达式，求出$k=f\left(a\right)$的值域即可.

【详解】①当$a\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$时，$2a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],M_{[0,a]}=\sin a,M_{[a,2a]}=\sin 2a$，

由$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$，得$\sin a=k\sin 2a$，所以$k=\frac{1}{2\cos a}$，

此时$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos a\le 1$，即$\sqrt{2}\le 2\cos a\le 2$，则$\frac{1}{2}<\frac{1}{2\cos a}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$k\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$；

②当$a\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$2a\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right],M_{[0,a]}=\sin a,M_{[a,2a]}=1$，

由$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$，得$k=\sin a$，

此时$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin a\le 1$，即$k\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$；

③当$a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$2a\in\left(\pi,2\pi\right),M_{[0,a]}=1,M_{[a,2a]}=\sin a$，

由$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$，得$1=k\sin a$，所以$k=\frac{1}{\sin a}$，

此时$0<\sin a<1$，则$\frac{1}{\sin a}>1$，即$k\in\left(1,+\infty\right)$；

④当$a=\pi$时，$2a=2\pi$，则$M_{[0,a]}=1,M_{[a,2a]}=0$，

由$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$，得$1=0$不成立，此时k不存在；

⑤当$a\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$时，$2a\in\left(2\pi,\frac{5}{2}\pi\right),M_{[0,a]}=1,M_{[a,2a]}=\sin 2a$，

由$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$，得$1=k\sin 2a$，所以$k=\frac{1}{\sin 2a}$，

此时$0<\sin 2a<1$，则$\frac{1}{\sin 2a}>1$，即$k\in\left(1,+\infty\right)$；

⑥当$a\in\left[\frac{5\pi}{4},+\infty\right)$时，$2a\in\left[\frac{5}{2}\pi,+\infty\right),M_{[0,a]}=1,M_{[a,2a]}=1$，

由$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$，得$k=1$，

综上，由有且仅有一个正数a使得$M_{[0,a]}=kM_{[a,2a]}$成立，实数k的取值范围是$\left(\frac{1}{2},1\right)$.

【点睛】本题考查三角函数最值的求解，解题的关键是分段讨论a的范围，根据a的不同取值范围得出k的表达式，再利用三角函数的性质求解.

二、单选题

13．设$x \in \mathbf{R}$，则“$x<1$”是“$\frac{1}{x}>1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

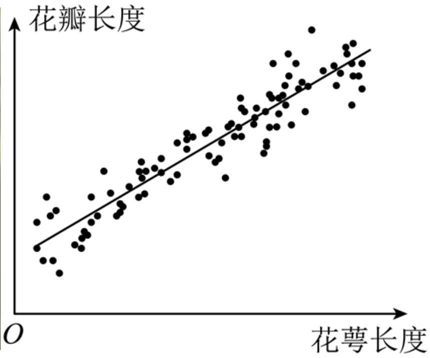
【分析】根据充分必要条件的定义判断.

【详解】$x=-1<1$，但$\frac{1}{x}=-1<1$，不充分，

$\frac{1}{x}>1$时$0<x<1$，必要性满足，故是必要不充分条件.

故选：B.

14．调查某种群花萼长度和花瓣长度，所得数据如图所示，其中相关系数$r=0.8245$，下列说法正确的是（　）



A．花瓣长度和花萼长度没有相关性

B．花瓣长度和花萼长度呈现负相关

C．花瓣长度和花萼长度呈现正相关

D．若从样本中抽取一部分，则这部分的相关系数一定是0.8245

【答案】C

【分析】根据散点图的特点可分析出相关性的问题，从而判断ABC选项，根据相关系数的定义可以判断D选项.

【详解】根据散点的集中程度可知，花瓣长度和花萼长度有相关性，A选项错误

散点的分布是从左下到右上，从而花瓣长度和花萼长度呈现正相关性，B选项错误，C选项正确；

由于$r=0.8245$

是全部数据的相关系数，取出来一部分数据，相关性可能变强，可能变弱，即取出的数据的相关系数不一定是0.8245，D选项错误

故选：C

15．伟大的数学家欧拉28岁时解决了困扰数学界近一世纪的“巴赛尔级数”难题.当$n\in\mathbf{N}$，$n\geq 2$时，$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$，又根据泰勒展开式可以得到

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，根据以上两式可求得$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=$（　　）

A．$\frac{\pi^2}{6}$　　B．$\frac{\pi^2}{3}$　　C．$\frac{\pi^2}{8}$　　D．$\frac{\pi^2}{4}$

【答案】A

【分析】推导出$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$，由

$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$得到展开式中$x^2$的系数，由此得到结论.

【详解】由$n\in\mathbf{N}$，$n\geq 2$，$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，两边同时除以$x$，得

$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$，

又$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$展开式中$x^2$的系数为

$-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)$，

所以$-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{3!}$，

所以$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

故选：A

16．双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$绕坐标原点O旋转适当角度可以成为函数$f(x)$的图象，关于此函数$f(x)$有如下四个命题：

①$f(x)$是奇函数；

②$f(x)$的图象过点$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$或$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$；

③$f(x)$ 的值域是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$；

④函数 $y=f(x)-x$ 有两个零点.

则其中所有真命题的序号为（　）

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ①②④

【答案】B

【分析】求出双曲线的对称中心和顶点坐标和渐近线方程，画出 $f(x)$ 的图象（位于一三象限），对选项一一判断，由对称性可得 $f(x)$ 的图象在二四象限的情况，即可得到答案.

【详解】解：双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 关于坐标原点对称，

可得旋转后得到的函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，

即有 $f(x)$ 为奇函数，故①对；

由双曲线的顶点为 $(\pm\sqrt{3}$，$0)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

可得 $f(x)$ 的图象的渐近线为 $x=0$ 和 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

图象关于直线 $y=\sqrt{3}x$ 对称，

可得 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$，或 $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$，

由对称性可得 $f(x)$ 的图象按逆时针 $60°$ 旋转位于一三象限；

按顺时针旋转 $60°$ 位于二四象限；

故②对；

$f(x)$ 的图象按逆时针旋转 $60°$ 位于一三象限，

由图象可得顶点为点 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$，或 $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$，

不是极值点，则 $f(x)$ 的值域不是 $(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$；

$f(x)$ 的图象按顺时针旋转 $60°$ 位于二四象限，

由对称性可得 $f(x)$ 的值域也不是 $(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$.

故③不对；

当 $f(x)$ 的图象位于一三象限时，$f(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 有两个交点，

函数 $y=f(x)-x$ 有两个零点；

当 $f(x)$ 的图象位于二四象限时，$f(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 没有交点，

函数 $y=f(x)-x$ 没有零点.