# 华师一附中 2024 届高三数学《数列每日一题》

## 一、多选题

1．已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=n^2$，数列$\{b_n\}$是首项和公比均为 2 的等比数列，将数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中的项按照从小到大的顺序排列构成新的数列$\{c_n\}$，则（　）

A．$c_{12}=16$

B．数列$\{c_n\}$中$b_n$与$b_{n+1}$之间共有$2^{n-1}$项

C．$b_n=c_{2^{n-1}+n-1}$

D．$c_{1022}=2023$

2．设等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，$a_{15}>0$，且$a_{14}+a_{17}<0$，则（　）

A．$\{2^{a_n}\}$是等比数列

B．$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是递增的等差数列

C．当$S_n>0$时，$n$的最大值为 28

D．V$1<m<15$，$m$ e*，$\frac{S_m}{m}>\sqrt{a_1a_m}$

3．欧拉函数$\Psi(n)(n$ e*$)$的函数值等于所有不超过正整数$n$，且与$n$互质的正整数的个数（公约数只有 1 的两个正整数称为互质整数），例如：$\Psi(3)=2$，$\Psi(4)=2$，则（　）

A. $\Psi(4).\Psi(6)=\Psi(10)$

B．当$n$为奇数时，$\Psi(n)=n-1$

C．数列$\{\Psi(2^n)\}$为等比数列

D．数列$\left\{\frac{\Psi(2_n)}{\Psi(3^n)}\right\}$的前$n$项和小于$\frac{3}{2}$

4．在边长为 2 的等边三角形$ABC$纸片中，取边$BC$的中点$M_1$，在该纸片中剪去以$BM_1$为斜边的等腰直角三角形$P_1BM_1$得到新的纸片$K_1$，再取$M_1C$的中点$M_2$，在纸片$K_1$中剪去以$M_1M_2$为斜边的等腰直角三角形$P_2M_1M_2$得到新的纸片$K_2$，以此类推得到纸片$K_3$，$K_4$，……，$K_n$，……，设$K_n$的周长为$L_n$，面积为$S_n$，则（　）

A．$L_{n+1}-L_n=\frac{\sqrt{2}-1}{2^n}$

B．$L_n=4+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2^{n-1}}$

C． $S_n - S_{n+1} = \frac{1}{4^n}$　　D． $S_n = \sqrt{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^n}$

## 二、填空题

5．在 $xOy$ 平面上有一系列点 $P_1\left(x_1, y_1\right), P_2\left(x_2, y_2\right),, P_n\left(x_n, y_n\right)$，对每个正整数 $n$，点 $P_n$ 位于函

数$y=x^2\ (x\ \ 0)$的图象上，以点$P_n$为圆心的。$P_n$都与$x$轴相切，且。$P_n$与。$P_{n+1}$外切．若$x_1=1$，

且$x_{n+1}<x_n\ (n=*^*),T_n=x_nx_{n+1},\{T_n\}$的前$n$项之和为$S_n$，则$S_{20}=$__________.

**三、解答题**

6．已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n^2+a_n\ (n=*^*)$，且$a_1=\frac{1}{3}$，数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}\ (n=*^*)$，

且$b_1=\left[\sum_{i=1}^{2023}\frac{1}{a_i+1}\right]$（$[x]$表示不超过$x$的最达整数），$b_2=32$．

(1)求$b_1$；

(2)令$c_n=\frac{1}{\sqrt{\log_2 b_n}}\ (n=*^*)$，记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n>\frac{\sqrt{4n+1}}{2}-1\ (n=*^*)$．

7．已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是公比不为 1 的等比数列，$a_2=6$，$a_4+a_5=22$，$3a_1=4b_1$，

且$2b_2$是$3b_1$与$b_3$的等差中项.

(1)求：数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

(2)设$d_n=\begin{cases}(-1)^n\frac{a_nb_n}{2},\ n为奇数\\ \frac{8n^2+36n-36}{b_n},\ n为偶数\end{cases}$，求$\sum_{i=1}^{2n}d_i$．

(3)若对于数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，在$a_k$和$a_{k+1}$之间插入$b_k$个$2\ (k=*^*)$，组成一个新的数列$\{c_n\}$，

记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_{2024}$．

8．已知函数$y=f(x)$的图象经过坐标原点，且$f(x)=x^2-x+b$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和

$S_n=f(n)$（$n=*^*$）.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$a_n+\log_3 n=\log_3 b_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$；

(3)令$d_n=\frac{a_n+2}{2}$，若$c_n=3^{d_n}-\lambda(-2)^n$（$\lambda$为非零整数，$n=*^*$），试确定$\lambda$的值，使得对任

意$n=*^*$，都有$c_{n+1}>c_n$成立.

9．设数列$\left\{a_n\right\}$的前 $n$ 项之积为$T_n$，满足$2a_n + T_n = 1$（ $n = *^*$ ）．

(1)设$b_n = 1+\frac{1}{T_n}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式$b_n$；

(2)设数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项之和为$S_n$，证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < S_n < \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}\ 1}-\frac{1}{4}$.

10．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，且$2a_{n+1}=a_n+2$.

(1)求证：数列$\{a_n-2\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_m=(m-3)^2+\lambda^2$，$c_n=n\lambda\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{a_n-2}{3}\right)$，其中$\lambda>0$，若对任意$m,n=*^{*}$，总有

$b_m-c_n>\frac{7}{3}$成立，求$\lambda$的取值范围.