一网打尽外接球、内切球与棱切球问题

目录

题型01 正方体、长方体外接球

题目 1 (2023·四川遂宁·高三射洪中学校考阶段练习)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $AB=2$,$BC=BB_1=4$,在该长方体内放置一个球,则最大球的体积为 ______.

【答案】$\frac{4}{3}\pi$/$\frac{4\pi}{3}$

【解析】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$BC=BB_1=4$,由长方体的结构特征知,长方体的内置球直径不超过最短棱长,

于是得球直径小于等于2,球半径 r 的最大值为1,此时有 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{4}{3}\pi$,

所以最大球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$.

故答案为:$\frac{4}{3}\pi$

题目 2 (2023·全国·高三专题练习)正方体的表面积为96,则正方体外接球的表面积为 ______

【答案】48π

【解析】设正方体的棱长为 a,因为正方体的表面积为96,可得 $6a^2=96$,解得 $a=4$,

则正方体的对角线长为 $l=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$,

设正方体的外接球的半径为 R,可得 $2R=4\sqrt{3}$,解得 $R=2\sqrt{3}$,

所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi R^2=48\pi$.

故答案为:48π.

题目 3 (2023·吉林·高三校联考期末)已知正方体的顶点都在球面上,若正方体棱长为 $\sqrt{3}$,则球的表面积为 ______.

【答案】9π

【解析】该球为正方体外接球,其半径 R 与正方体棱长 a 之间的关系为 $2R=\sqrt{3}a$,

由 $a=\sqrt{3}$,可得 $R=\frac{3}{2}$,所以球的表面积 $S=4\pi R^2=9\pi$.

答案:9π

题型02 正四面体外接球

题目 4 (2023·山东·高三济南一中校联考阶段练习)在正四面体 $P-ABC$ 中,以 PB 为直径作球 O,点 D 在球 O 与 PB 的中垂面相交所得的圆上运动,当三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最小值为 $\frac{2-\sqrt{2}}{12}$ 时,该正四面体 $P-ABC$ 外接球的体积为 ______.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

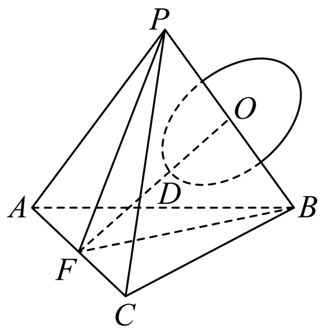
【解析】设正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 a,设点 D 到平面 ABC 的距离为 h,则

$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$,当 h 最小时,V_{D-ABC} 最小.

因为球 O 的半径为 $\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}a$,

如图所示,当 D 在如图所示的位置时 h 最小.取 AC 的中点 F,连接 PF、BF,

则 $PF=BF$,$FO\perp PB$,所以 $D\in FO$.



因为 $BF=\frac{\sqrt{3}}{2}a, OB=\frac{1}{2}a$,

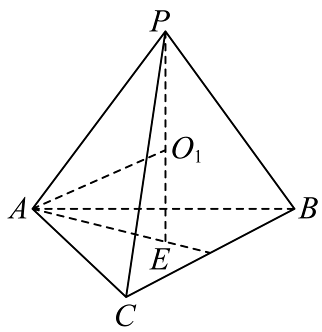
则 $FO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $FD=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}a$, $\sin\angle OFB=\frac{OB}{FB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 h 最小值为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}a\right)\sin\angle OFB=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}a\right)$,

所以 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}a\right)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{12}$,解得 $a=\sqrt{2}$.

设正四面体 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R, 球心为 O_1.

如图所示,正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 $\sqrt{2}$,过 P 作 $PE\perp$ 平面 ABC 于 E,



由于 $AB=AC=BC=\sqrt{2}$,

所以 $AE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

利用勾股定理得 $PE=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\triangle AO_1E$ 中, $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-R\right)^2=R^2$,解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以正四面体 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

题目 5 (2023·河北·统考模拟预测) 在正四面体 $P-ABC$ 中,O 为 PB 的中点,点 D 在以 O 为球心的球上运动,$PB=2OD$,且恒有 $PD=BD$,已知三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 $18\sqrt{2}+36$,则正四面体 $P-ABC$ 外接球的体积为（　　）

A. $108\sqrt{3}\pi$　　B. $124\sqrt{2}\pi$　　C. $132\sqrt{2}\pi$　　D. $144\sqrt{3}\pi$

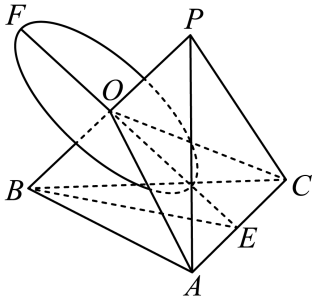
【答案】A

【解析】由题知,

O 为 PB 的中点,点 D 在以 O 为球心的球上运动, $PB=2OD$,

所以 D,P,B 都在以 O 为球心的球上,

又因 $PD=BD$，则 D 在 PB 的中垂面上，如图，



连接 AO,CO，

$\because \triangle PAB,\triangle PBC$ 都为正三角形，且 O 为 PB 的中点，

$\therefore OA\perp PB,OC\perp PB$，

$\because OA\cap OC=O$，$OA,OC\subset$ 平面 OAC，$PB\not\subset$ 平面 OAC，

$\therefore PB\perp$ 平面 OAC，平面 OAC 是 PB 的中垂面，即 D 在平面 OAC 上，

所以点 D 在平面 OAC 与以 O 为球心，OB 为半径的球的交线上，

即 D 在以 O 为圆心，OB 为半径的平面 OAC 内的圆上，

取 AC 中点 E，连接 OE,AE，延长 EO 至点 F，使 $OF=OB$，

作在平面 OAC 内，以 O 为圆心，OB 为半径的圆，

则圆 O 上的点 F 到平面 ABC 的距离最远，故 D 在 F 处，

设 $AB=a$，则 $BE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$OB=\dfrac{1}{2}a$，

$\because PB\perp$ 平面 OAC，$OE\subset$ 平面 OAC，

$\therefore PB\perp OE$，

$\therefore OE=\sqrt{BE^2-OB^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2-\dfrac{1}{4}a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

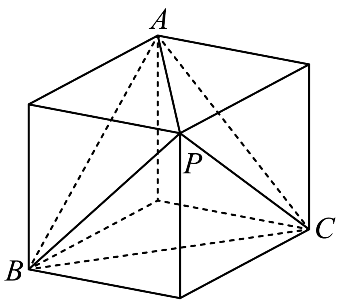
$EF=OF+OE=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

在 $Rt\triangle OBE$ 中，$\sin\angle OEB=\dfrac{OB}{BE}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

点 F 到平面 ABC 的距离 $h=EF\cdot\sin\angle OEB=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6}a$，

所以 $V_{D-ABC}=V_{F-ABC}=\dfrac{1}{3}hS_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=18\sqrt{2}+36$，

解得 $a=6\sqrt{2}$，



如图则其外接正方体的边长为 $b=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=6$，

所以正四面体 $P-ABC$ 外接球即为边长为 6 正方体的外接球，

故外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{6^2+6^2+6^2}}{2}=3\sqrt{3}$,

所以外接球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times 81\sqrt{3}=108\sqrt{3}\pi$.

故选:A

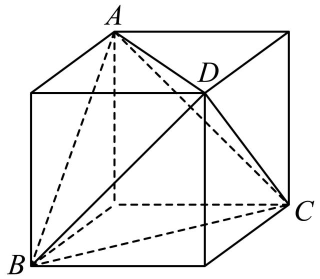
题目 6 (2023·山东济南·高三统考期末)若正四面体的表面积为 $8\sqrt{3}$,则其外接球的体积为 (　　)

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. 12π　　C. $8\sqrt{6}\pi$　　D. $32\sqrt{3}\pi$

【答案】A

【解析】设正四面体的棱长为 a,由题意可知:$4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=8\sqrt{3}$,解得:$a=2\sqrt{2}$,

所以正四面体的棱长为 $2\sqrt{2}$,



将正四面体补成一个正方体,则正方体的棱长为 2,正方体的体对角线长为 $2\sqrt{3}$,

因为正四面体的外接球的直径为正方体的体对角线长,所以外接球半径 $R=\sqrt{3}$,

则外接球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$,

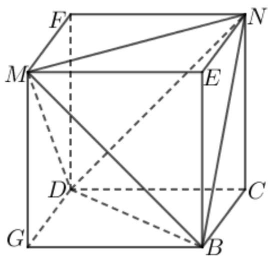
故选:A.

题目 7 (2023·河南·西平县高级中学校联考模拟预测)一个正四面体的棱长为2,则这个正四面体的外接球的体积为 (　　)

A. $\sqrt{6}\pi$　　B. 2π　　C. 3π　　D. $2\sqrt{2}\pi$

【答案】A

【解析】如图,四面体 $BDMN$ 是正四面体,棱长 $BD=2$,将其补形成正方体 $GBCD-MENF$,



则正方体 $GBCD-MENF$ 的棱长 $GB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$,此正方体的体对角线长为 $\sqrt{6}$,

正四面体 $BDMN$ 与正方体 $GBCD-MENF$ 有相同的外接球,则正四面体 $BDMN$ 的外接球半径 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

所以正四面体 $BDMN$ 的外接球体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$.

故选:A

题型 03 对棱相等的三棱锥外接球

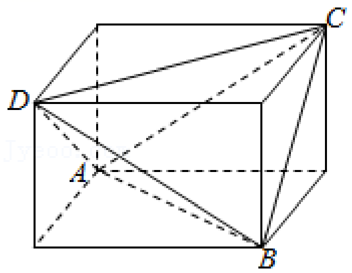
题目 8 (2023· 罗湖区月考) 已知在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=2\sqrt{2}$, $AD=AC=BC=BD=\sqrt{5}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球表面积为 ______.

【解析】解：如下图所示，将四面体 $ABCD$ 放在长方体 $AEBF-GCHD$ 内，在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=2\sqrt{2}$, $AD=AC=BC=BD=\sqrt{5}$，设该长方体的长、宽、高分别为 2、2、1，

则长方体的体对角线长即为长方体的外接球直径，设该长方体的外接球半径为 R，

所以，该四面体的外接球直径为 $2R=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，

因此，四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\pi\times(2R)^2=9\pi$，



故答案为：9π.

题目 9 (2023· 孟津县校级期末) 若四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=BC=AD=\sqrt{5}$，$AC=BD=\sqrt{2}$，则四面体的外接球的表面积为__6π__.

【解析】解：由题意可采用割补法，考虑到四面体 $ABCD$ 的四个面为全等的三角形，

所以可在其每个面补上一个以 $\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$ 为三边的三角形作为底面，

且以分别 x，y，z 长、两两垂直的侧棱的三棱锥，

从而可得到一个长、宽、高分别为 x，y，z 的长方体，

并且 $x^2+y^2=5$，$x^2+z^2=5$，$y^2+z^2=2$，

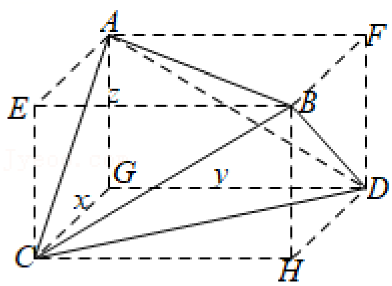
则有 $(2R)^2=x^2+y^2+z^2=6$(R 为球的半径)，

所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=6\pi$.

故答案为：6π.

题目 10 (2023· 三模拟) 在四面体 $ABCD$ 中，$AC=BD=2$，$AD=BC=\sqrt{5}$，$AB=CD=\sqrt{7}$，则其外接球的表面积为 ______.

【解析】解：如下图所示，



将四面体 $ABCD$ 放在长方体 $AEBF-GCHD$ 内，设该长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，

则长方体的体对角线长即为长方体的外接球直径，设该长方体的外接球半径为 R，

由勾股定理得 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\y^2+z^2=5\\z^2+x^2=7\end{cases}$，

上述三个等式全加得 $2(x^2+y^2+z^2)=16$，

所以，该四面体的外接球直径为 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{2}$，

因此，四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\pi\times(2R)^2=8\pi$，

故答案为：8π.

题型 04 直棱柱外接球

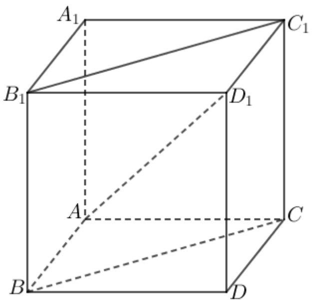
题目 11 (2023·陕西西安·高三高新一中校考阶段练习) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AC=AA_1=2$，$BC=2\sqrt{2}$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球体积等于（　　）

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. 12π　　C. 16π　　D. 4π

【答案】A

【解析】在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因 $AB\perp AC$，即 $\angle BAC=90°$，则 $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=2$，

于是得 $AB=AC=AA_1=2$，将其补形成棱长为 2 的正方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$，如图，



则直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球即为棱长为 2 的正方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$ 的外接球，

球半径 $R=\frac{1}{2}AD_1=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，因此，$V=\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球体积等于 $4\sqrt{3}\pi$.

故选：A

题目 12 (2023·重庆渝中·高三重庆巴蜀中学校考阶段练习) 已知球 O 为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1，高为 3，则球 O 的表面积是（　　）

A. 4π　　B. $\frac{31\pi}{3}$　　C. $\frac{16\pi}{3}$　　D. $\frac{31\pi}{12}$

【答案】B

【解析】设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h，底边边长为 a．设球 O 的半径为 R，

则三棱柱底面三角形的外接圆半径 r 满足：$2r=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}$，解得：$r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

由题知，$a=1$，$h=3$

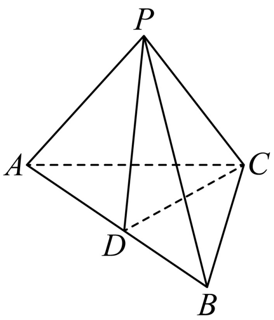
$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}h\right)^2=\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}=\frac{1}{3}+\frac{9}{4}=\frac{31}{12}$，

故球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{31\pi}{3}$，

故选：B.

题型 05 直棱锥外接球

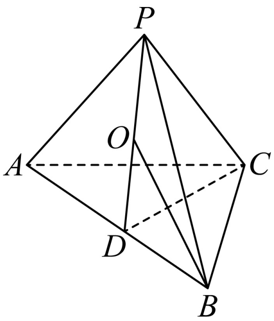
题目 13 (2023·河南·高三安阳一中校联考阶段练习) 如图，在体积为 $\frac{4}{3}$ 的三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC\perp BC$，$AD=BD$，$PD\perp$ 底面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球体积的最小值为（　　）



A. $\dfrac{9\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{8}$　　D. $\dfrac{7\pi}{24}$

【答案】A

【解析】如图所示，



由题意$\triangle ABC$是直角三角形，AB的中点为D，连结PD，很明显球心在PD上，

设球心为O，$PD=h$，$AC=x$，$BC=y$，$OC=R$，则$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}xyh=\dfrac{4}{3}$，解得$h=\dfrac{8}{xy}$，

在$Rt\triangle OCD$中，$OC^2=CD^2+OD^2$，$CD=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，则$R^2=\dfrac{x^2+y^2}{4}+(h-R)^2$，

解得$R=\dfrac{x^2+y^2}{8h}+\dfrac{h}{2}=\dfrac{(x^2+y^2)xy}{64}+\dfrac{4}{xy}\geqslant\dfrac{2x^2y^2}{64}+\dfrac{4}{xy}$，当且仅当$x=y$时等号成立，

即$R\geqslant\dfrac{x^4}{32}+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^4}{32}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}\geqslant 3\times\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{32}\cdot\dfrac{2}{x^2}\cdot\dfrac{2}{x^2}}=3\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{3}{2}$，当且仅当$\dfrac{x^4}{32}=\dfrac{2}{x^2}$，即$x=2$时等号成立，

即R的最小值是在$x=y=h=2$时取得$\dfrac{3}{2}$，经检验正确，

即满足题意时三棱锥的高为2，$R=\dfrac{3}{2}$，故外接球体积的最小值为：$\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{9}{2}\pi$，

故选：A.

题目 14 (2023·广东广州·高三广州市第十七中学校考阶段练习)在三棱锥$A-BCD$中，$AD\perp$平面BCD，$\angle ABD+\angle CBD=\dfrac{\pi}{2}$，$BD=BC=1$，则已知三棱锥$A-BCD$外接球表面积的最小值为（　　）

A. $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{4}\pi$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\pi$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}-1}{4}\pi$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\pi$

【答案】B

【解析】如图，设$\angle ABD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，K为$\triangle BCD$的外心，O为三棱锥$A-BCD$外接球的球心，则$OK\perp$平面BCD，又$AD\perp$平面BCD，所以$OK/\!/AD$，$KD\subset$平面BCD，则$OK\perp DK$，四边形$OKDA$是直角梯形，

设$OK=h$，$DK=r$，$OD=R$，

由 $AD\perp$ 平面 BCD，$BD\subset$ 平面 BCD，得 $AD\perp BD$，

则 $AD=\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan\beta}$，$CD=2\sin\dfrac{\beta}{2}$，$2r=\dfrac{2\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\beta}$，即 $r=\dfrac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}}$，

又 $\begin{cases}h^2+r^2=R^2\\(AD-h)^2+r^2=R^2\end{cases}$，则 $h=\dfrac{1}{2}AD$，$R^2=r^2+\left(\dfrac{AD}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{4\tan^2\beta}=\dfrac{1}{2(1+\cos\beta)}+\dfrac{\cos^2\beta}{4(1-\cos^2\beta)}$

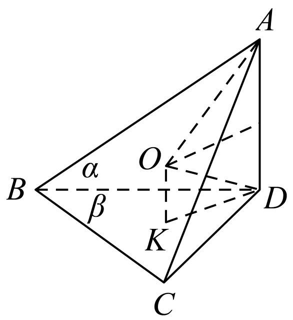
$=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3-2\cos\beta}{4(1-\cos^2\beta)}$，

令 $t=3-2\cos\beta$，则 $\cos\beta=\dfrac{3-t}{2}$，$t\in(1,3)$，

$R^2=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{t}{t^2-6t+5}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{t+\frac{5}{t}-6}\geqslant-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{5}{t}}-6}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2(3-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{8}$，当且仅当 $t=\dfrac{5}{t}$，即 $t=\sqrt{5}$ 时等号成立，

所以三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积 $S=4\pi R^2\geqslant4\pi\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{8}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\pi$，

故选：B.



题目 15 (2023·浙江温州·统考模拟预测) 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，$\angle ABD+\angle CBD=\dfrac{\pi}{2}$，$BD=BC=2$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积的最小值为（　　）

A. $(2\sqrt{5}-2)\pi$　　B. $(2\sqrt{5}-1)\pi$　　C. $(2\sqrt{5}+1)\pi$　　D. $(2\sqrt{5}+2)\pi$

【答案】D

【解析】设 $\angle CBD=\alpha$，在等腰 $\triangle BCD$ 中，$CD=2\cdot BC\sin\dfrac{\alpha}{2}=4\sin\dfrac{\alpha}{2}$，设 $\triangle BCD$ 的外心是 M，外接圆半径是 r，则 $2r=\dfrac{CD}{\sin\alpha}=\dfrac{4\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，$\therefore r=\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，

设外接球球心是 O，则 $OM\perp$ 平面 BCD，$DM\subset$ 平面 BCD，则 $OM\perp DM$，同理 $AD\perp BD$，$AD\perp DM$，

又 $AD\perp$ 平面 BCD，所以 $AD\parallel OM$，$OMDA$ 是直角梯形，

设 $OM=h$，外接球半径为 R，即 $OD=OA=R$，

则 $\begin{cases}r^2+h^2=R^2\\r^2+(AD-h)^2=R^2\end{cases}$，所以 $AD=2h$，

在直角 $\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$\angle BAD=\alpha$，

$\tan\alpha=\dfrac{2}{AD}$，$AD=\dfrac{2}{\tan\alpha}$，$\therefore h=\dfrac{1}{\tan\alpha}$，

$R^2=\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{2}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\dfrac{2}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+2-2\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=-1+$

$\dfrac{2\left(\frac{3}{2}-\cos\alpha\right)}{1-\cos^2\alpha}$,

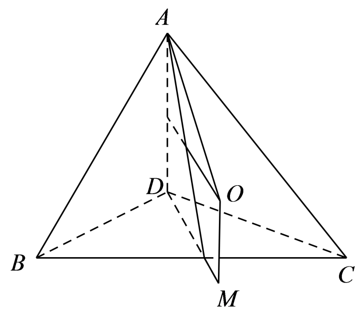
令 $\dfrac{3}{2}-\cos\alpha=t$,则 $t\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,

$R^2=-1+\dfrac{2t}{1-\left(\frac{3}{2}-t\right)^2}=-1+\dfrac{2t}{-t^2+3t-\frac{5}{4}}=-1+\dfrac{2}{3-\left(t+\frac{5}{4t}\right)}\geqslant-1+\dfrac{2}{3-2\sqrt{t\cdot\frac{5}{4t}}}=-1+\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}=$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,当且仅当 $t=\dfrac{5}{4t}$, $t=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立,

所以 $4\pi R^2$ 的最小值是 $4\pi\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=(2+2\sqrt{5})\pi$.

故选:D.



题目 16 (2023·河南开封·高三河南省杞县高中校联考开学考试) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 为正方形,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,且 $PA=6, AB=8$,则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的表面积之比为 ( )

A. $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ B. $\dfrac{41}{4}$ C. 3 D. $\dfrac{11}{2}$

【答案】B

【解析】设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的半径分别为 R,r.

因为 $V_{\text{四棱锥 }P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times8^2\times6=128$,

四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积 $S=8^2+\dfrac{1}{2}\times6\times8\times2+\dfrac{1}{2}\times8\times10\times2=192$,

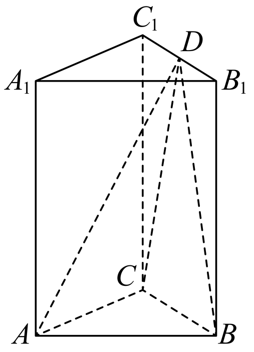
所以 $r=\dfrac{3V_{\text{四棱锥 }P-ABCD}}{S}=2$,

因为 PA,AB,AD 两两垂直,四棱锥可补形为长方体,所以 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{8^2+8^2+6^2}=\sqrt{41}$,

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的表面积之比为 $\dfrac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=\dfrac{41}{4}$.

故选:B.

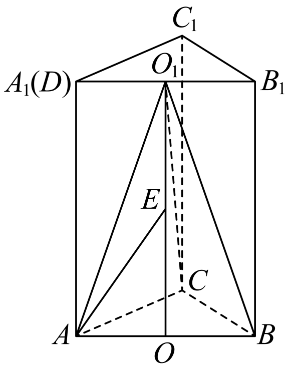
题目 17 (2023·浙江丽水·高三统考期末) 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1\perp$ 底面 ABC,$AA_1=2$,$AC=BC=1$,$\angle ACB=90°$,D 在上底面 $A_1B_1C_1$(包括边界) 上运动,则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球体积的最大值为 ( )



A. $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$　　B. $\sqrt{3}\pi$　　C. $\sqrt{6}\pi$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

【答案】C

【解析】



如图,取 AB 中点为 O, A_1B_1 中点为 O_1,连接 OO_1,取 OO_1 的中点为 E,连接 AE.

因为 $\triangle ACB$ 为直角三角形,所以 $\triangle ACB$ 外接圆的圆心即为 O.

同理, $\triangle A_1C_1B_1$ 外接圆的圆心即为 O_1.

所以,当 D 位于 $\triangle A_1B_1C_1$ 顶点时(不妨假设点 D 与点 A_1 重合),三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心恰好与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心重合,即三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的半径等于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径,此时体积有最大值.

因为 O,O_1 分别为 AB,A_1B_1 的中点,

根据三棱柱的性质可知, $AO /\!/ A_1O_1$,且 $AO=A_1O_1$,

所以,四边形 AOO_1A_1 是平行四边形,

所以 $OO_1 /\!/ AA_1$,且 $OO_1=AA_1=2$, $OE=\frac{1}{2}OO_1=1$.

根据三棱柱的性质可知 $AA_1\perp$ 平面 ABC,

所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC.

又 O,O_1 分别为 $\triangle ACB$ 以及 $\triangle A_1C_1B_1$ 外接圆的圆心,

所以,线段 OO_1 的中点 E 即为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心,

所以,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径即等于 AE.

又 $AC=BC=1$,所以 $AB=\sqrt{2}$, $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

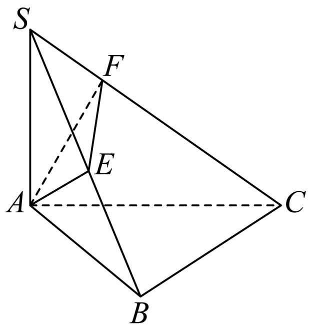
因为 $OO_1\perp$ 平面 ABC, $OA\subset$ 平面 ABC,所以 $OO_1\perp OA$,即 $OE\perp OA$,

所以, $AE=\sqrt{OA^2+OE^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以,三棱锥 $D-ABC$ 的外接球体积的最大值为 $\frac{4}{3}\pi\cdot(AE)^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$.

故选：C.

题目 18 (2023·河北邯郸·统考三模) 三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB=BC$．过点 A 分别作 $AE\perp SB$，$AF\perp SC$ 交 SB、SC 于点 E、F，记三棱锥 $S-FAE$ 的外接球表面积为 S_1，三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积为 S_2，则 $\dfrac{S_1}{S_2}=$ (　　)



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $\dfrac{1}{3}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】取 SA 的中点 O_1，SC 的中点 O_2，连 O_1E，O_1F，O_2A，O_2B，

因为 $SA\perp$ 平面 ABC，$AB,BC,AC\subset$ 平面 ABC，所以 $SA\perp AB$，$SA\perp BC$，$SA\perp AC$，

因为 $AB\perp BC$，$SA\cap AB=A$，$SA,AB\subset$ 平面 SAB，所以 $BC\perp$ 平面 SAB，

因为 $SB\subset$ 平面 SAB，所以 $BC\perp SB$，

在直角三角形 SAC 中，O_2 是斜边 SC 的中点，所以 $O_2A=O_2S=O_2C$，

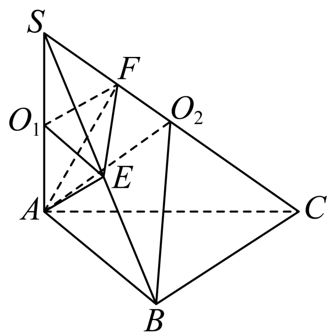
在直角三角形 SBC 中，O_2 是斜边 SC 的中点，所以 $O_2B=O_2S=O_2C$，

所以 O_2 是三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心，SC 为该球的直径.

因为 $AE\perp SB$，O_1 是斜边 SA 的中点，所以 $O_1E=O_1A=O_1S$，

因为 $AF\perp SC$，O_1 是斜边 SA 的中点，所以 $O_1F=O_1A=O_1S$，

所以 O_1 是三棱锥 $S-FAE$ 的外接球的球心，SA 为该球的直径.



设 $SA=AB=BC=a$，则 $SC=\sqrt{SA^2+AB^2+BC^2}=\sqrt{3}a$，

则 $S_1=4\pi\cdot\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2=a^2\pi$，$S_2=4\pi\cdot\left(\dfrac{SC}{2}\right)^2=4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2=3a^2\pi$，

所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{a^2\pi}{3a^2\pi}=\dfrac{1}{3}$.

故选：B.

题型 06 正棱锥与侧棱相等模型

题目 19 (2023·云南保山·高三统考期末) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱与底面所成的角为 60°，高为 $4\sqrt{3}$，则该三棱锥外接球的表面积为 ______.

【答案】$\dfrac{256\pi}{3}$/$\dfrac{256}{3}\pi$

【解析】设顶点 P 在底面 ABC 的投影为 G(G 为等边 $\triangle ABC$ 的中心)，则该三棱锥外接球的球心 O 在 PG 上，连接 GA,OA，

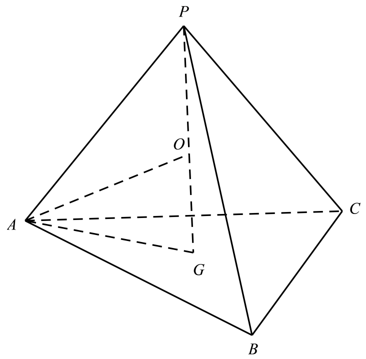
因为 $PG\perp$ 底面 ABC，则侧棱与底面所成的角为 $\angle PAG=60^\circ$，可得 $GA=\dfrac{PG}{\tan60^\circ}=4$，

设棱锥外接球的半径为 R，

因为 $OA^2=OG^2+GA^2$，即 $R^2=(4\sqrt{3}-R)^2+4^2$，解得 $R=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，

所以外接球的表面积为 $S_{表}=4\pi R^2=\dfrac{256\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{256\pi}{3}$.



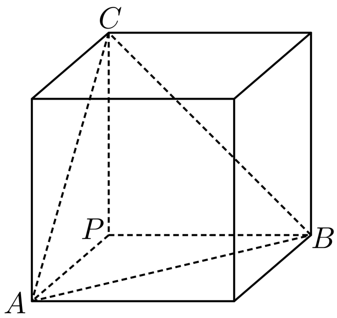
题目 20 (2023·广东佛山·高三佛山市南海区第一中学校考阶段练习) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=1$，$AB=\sqrt{2}$，该三棱锥的外接球体积为 ______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

【解析】在正三棱锥 $P-ABC$ 中 $\triangle ABC$ 为等边三角形，顶点 P 在底面的射影为底面的重心，所以 $PA=PB=PC$，

又 $PA=1$，$AB=\sqrt{2}$，所以 $PA^2+PB^2=AB^2$，所以 $PA\perp PB$，同理可得 $PA\perp PC$、$PC\perp PB$，

即 PA，PB，PC 两两垂直，把该三棱锥补成一个正方体，该三棱锥的外接球就是正方体的外接球，



正方体的体对角线就是外接球的直径，易得三棱锥的外接球半径 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以三棱锥的外接球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

题目 21 (2023·上海闵行·高三上海市文来中学校考期中) 已知正四棱锥的各顶点都在同一个球面上，球的体积为 36π，则该正四棱锥的体积最大值为 ______.

【答案】$\dfrac{64}{3}/21\dfrac{1}{3}$

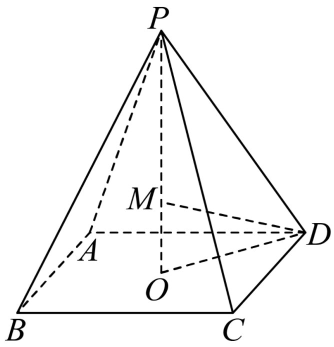
【解析】因为球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$，所以球的半径为 $R=3$，

如图，设正四棱锥的底面边长 $AB=2a$，高 $PO=h$，外接球的球心为 M，

根据正四棱锥的几何特征可知外接球的球心在其高上，又 $OD=\sqrt{2}a$，

在 $Rt\triangle MOD$ 中，$MD^2=OD^2+OM^2$，即 $3^2=2a^2+(h-3)^2$，

所以正四棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 4a^2h=\frac{2}{3}[9-(h-3)^2]h$,



整理得 $V=-\frac{2}{3}h^3+4h^2(h>0)$, $V'=-2h^2+8h=-2h(h-4)$,

当 $0<h<4$ 时, $V'>0$, 当 $h>4$ 时, $V'<0$,

所以 $V=-\frac{2}{3}h^3+4h^2(h>0)$ 在 $(0,4)$ 上递增, 在 $(4,+\infty)$ 上递减,

所以当 $h=4$ 时, V 取得最大值 $-\frac{2}{3}\times 4^3+4\times 4^2=\frac{64}{3}$,

故答案为: $\frac{64}{3}$.

题目 22 (2023·江苏扬州·统考模拟预测) 已知正四棱锥的侧面是边长为3的正三角形,它的侧棱的所有三等分点都在同一个球面上,则该球的表面积为 ______.

【答案】10π

【解析】如图,正四棱锥的侧棱的所有三等分点构成一个正四棱台,

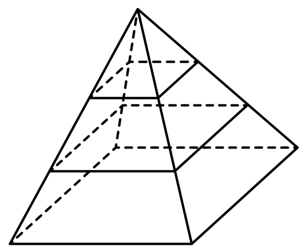
棱台上底面是边长为1的正方形,棱台下底面是边长为2的正方形,侧棱长为1,

可求得棱台的高为 $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

设该棱台的外接球的半径为 r,

球心到下底面的距离 $\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}$,

球心到上底面的距离 $\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$,



①球心在两个底面之间时,

所以 $\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}+\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $r^2\geqslant 2$, 则 $\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}+\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$, 则上式无解;

②球心在下底面下方时,

$\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

两边同时平方: $r^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2r^2-4}+r^2-2$,

$\sqrt{2r^2-4}=1$, 解得: $r^2=\frac{5}{2}$,

表面积 $S=4\pi r^2=10\pi$,

故答案为: 10π.

题型07 侧棱为外接球直径模型

题目 23 (2023• 保山期末) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上, ΔABC 是边长为6的正三角形, SC 为球 O 的直径,且此三棱锥的体积为 $12\sqrt{3}$,则球 O 的表面积为 ( )

A. 16π　　B. 32π　　C. 48π　　D. 64π

【解析】解: $\because\Delta ABC$ 是边长为6的正三角形, $\therefore\Delta ABC$ 外接圆的半径 $r=\frac{6}{2\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$,

设点 S 到平面 ABC 的距离为 d,

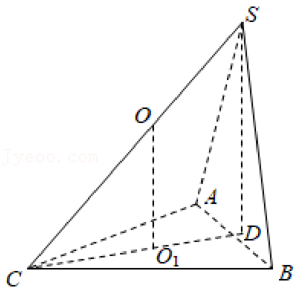
则棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}d=12\sqrt{3}$，解得 $d=4$，

又 SC 为球 O 的直径，

$\therefore$ 点 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{d}{2}=2$，则三棱锥外接球 O 的半径 $R=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+r^2}=4$，

可得球的表面积 $S=4\pi R^2=64\pi$.

故选：D.



题目 24 (2023•大连模拟) 球 O 的直径 $SC=4$，A，B 是该球球面上的两点，$AB=2$，$\angle ASC=\angle BSC=\frac{\pi}{4}$，则棱锥 $A-SBC$ 的体积为 (　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】解：$\because$ 球 O 的直径 $SC=4$，A，B 是该球球面上的两点，

$AB=2$，$\angle ASC=\angle BSC=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore$ 由题意知，在棱锥 $S-ABC$ 中，

ΔSAC，ΔSBC 都是等腰直角三角形，其中 $AB=2$，$SC=4$，

$SA=AC=SB=BC=2\sqrt{2}$.

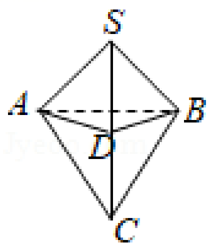
取 SC 的中点 D，则 $AD\perp SC$，$BD\perp SC$，

$\therefore SC$ 垂直于面 ABD，

$\therefore$ 棱锥 $S-ABC$ 的体积为两个棱锥 $S-ABD$ 和 $C-ABD$ 的体积和，

$\therefore$ 棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}SC\cdot S_{\Delta ADB}=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

故选：D.



题目 25 (2023•迎泽区校级月考) 已知球 O 的直径 $SC=4$，A、B 是该球面上的两点，且 $AB=2$，$\angle ASC=30^\circ$，$\angle BSC=45^\circ$，则三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

【解析】解：设球心为 O，连结 AO、BO，

$\because SC$ 为球的直径，A、B 是球面上的点，$\therefore\angle SAC=\angle SBC=90^\circ$.

又 $\because\angle ASC=30^\circ$，$\angle SCB=45^\circ$，$SC=4$，$\therefore AC=2$，$AS=2\sqrt{3}$，$BS=BC=2\sqrt{2}$.

又 $\because AB=2$，$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，

$\therefore\Delta ABC$ 为直角 $\triangle$，ΔABC 的外心为 BC 中点 M，

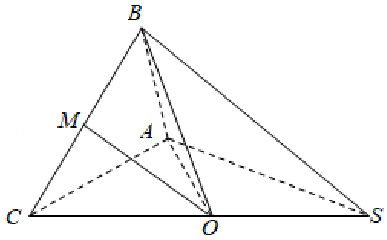
连接 OM，根据球的性质，可得 $OM\perp$ 面 ABC，

在 ΔBOC 中，$BO=CO=2$，$BC-2\sqrt{2}$，$\therefore OM=\sqrt{2}$，

$\therefore V_{O-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot OM=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore V_{S-ABC}=2V_{O-ABC}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

故选:C.



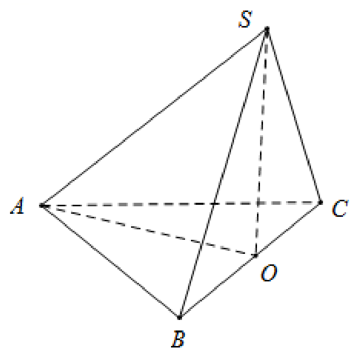
题型 08 共斜边拼接模型

题目 26 (2023·全国·高三专题练习) 在三棱锥 $S-ABC$ 中,$\angle SBA=\angle SCA=\frac{\pi}{2}$,底面 ABC 是边长为 2 的等边三角形 若二面角 $S-BC-A$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$,则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积大小为 (　　)

A. $\frac{16}{3}\pi$　　B. $\frac{17}{3}\pi$　　C. $\frac{19}{3}\pi$　　D. $\frac{20}{3}\pi$

【答案】C

【解析】解:取 BC 的中点 O,连接 SO,AO,



因为 $\angle SBA=\angle SCA=\frac{\pi}{2}$,$BA=CA,SA=SA$,

所以 $\triangle SBA\cong\triangle SCA$,

所以 $SB=SC$,所以 $SO\perp BC,OA\perp BC$,

因此 $\angle SOA=\frac{2\pi}{3}$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角,

设 $SO=x$,则 $SB=\sqrt{x^2+1}$,

$\because\angle SBA=\frac{\pi}{2}$,$\therefore SA=\sqrt{x^2+5}$,

在 $\triangle SOA$ 中,由余弦定理得 $SO^2+OA^2-2SO\cdot OA\cos\frac{2\pi}{3}=SA^2$,

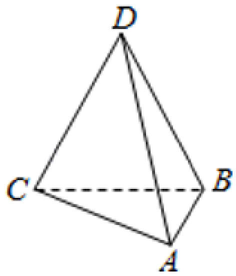
即 $x^2+3+\sqrt{3}x=x^2+5$,解得:$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

所以三棱锥的外接球的直径 $2R=SA=\sqrt{x^2+5}=\sqrt{\frac{19}{3}}$,

所以三棱锥的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{19}{3}\pi$.

故选:C.

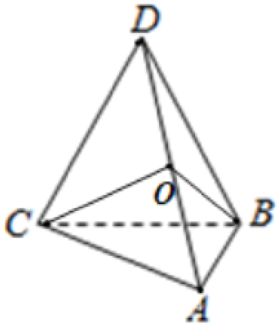
题目 27 (2023·全国·高三专题练习) 三棱锥 $D-ABC$ 中,$AB=DC=3$,$AC=DB=2$,$AC\perp CD$,$AB\perp DB$. 则三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积是 (　　).



A. 9π　　B. 13π　　C. 36π　　D. 52π

【答案】B

【解析】取 AD 的中点为 O，连接 OC,OB，因为 $AC\perp CD$，$AB\perp DB$



$\therefore OC=OA=OD=OB$ 即 O 为棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心，

又 $AB=DC=3$，$AC=DB=2$，

$\therefore AD=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore$ 三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积为 13π.

故选：B.

题目 28 (多选题) (2023·山东·泰安一中高一期中) 三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAB\perp$ 平面 ABC，$\angle SAB=\angle ABC=3\angle BAC=90^\circ$，$SA=AC=2$，则（　　）

A. $SA\perp BC$

B. 三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为 $\dfrac{8\pi}{3}$

C. 点 A 到平面 SBC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

D. 二面角 $S-BC-A$ 的正切值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】AD

【解析】对于 A，因为平面 $SAB\perp$ 平面 ABC，$\angle SAB=90^\circ$，即 $SA\perp AB$，

平面 $SAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$SA\subset$ 平面 SAB，所以 $SA\perp$ 平面 ABC，

又因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $SA\perp BC$，故 A 正确；

对于 B，因为 $SA\perp BC$，$AB\perp BC$，$SA\cap AB=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 SAB，因为 $SB\subset$ 平面 SAB，

所以 $BC\perp SB$. 又 $SA\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $SA\perp AC$，即 $\angle SAC=\angle SBC=90^\circ$，

所以三棱锥 $S-ABC$ 外接球的直径为 SC. 因为 $SA=AC=2$，

所以 $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2\sqrt{2}$，

所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积 $S=4\pi\left(\dfrac{SC}{2}\right)^2=4\pi(\sqrt{2})^2=8\pi$，故 B 错误；

对于 C，因为 $BC\perp$ 平面 SAB，$BC\subset$ 平面 SBC，

所以平面 $SAB\perp$ 平面 SBC，过点 A 作 $AG\perp SB$，交 SB 于点 G，

根据面面垂直的性质定理，可得 $AG\perp$ 平面 SBC，

故点 A 到平面 SBC 的距离为 AG，由 $\angle ABC=3\angle BAC=90^\circ$，$AC=2$，

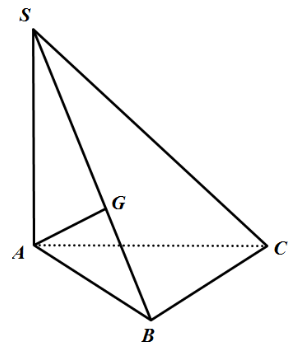
得 $AB=\sqrt{3}$，则 $SB=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

则 $AG=\dfrac{AB\times SA}{SB}=\dfrac{\sqrt{3}\times 2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，故 C 错误；

对于 D，$SB\perp BC$，$AB\perp BC$，所以 $\angle SBA$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角，

在 $Rt\triangle SAB$ 中，$\tan\angle SBA=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确；

故选：AD.



题型 09 垂面模型

题目 29 (2023·贵州贵阳·校联考模拟预测) 在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知 $AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$AD=BD=\sqrt{6}$，且平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为（　　）

A. 8π　　B. 9π　　C. 10π　　D. 12π

【答案】B

【解析】如图，设外接球的半径为 R，取 AB 的中点 O_1，连接 O_1D，则由 $AD=BD$，得 $O_1D\perp AB$，

因为平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，$O_1D\subset$ 平面 ABD，

所以 $O_1D\perp$ 平面 ABC，则球心 O 在直线 O_1D 上.

连接 OA，则 $OD=OA=R$，

因为 $AC\perp BC$，$AC=BC=2$，所以 $AB=2\sqrt{2}$；

因为 $AD=BD=\sqrt{6}$，所以 $AO_1=\sqrt{2}$，$O_1D=2$.

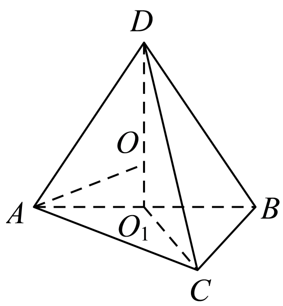
因为 $O_1D>AO_1$，所以球心在线段 O_1D 上.

在 $Rt\triangle O_1OA$ 中，由勾股定理，得 $OO_1^2+O_1A^2=OA^2$，

即 $(2-R)^2+2=R^2$，解得 $R=\dfrac{3}{2}$，

所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=9\pi$.

故选：B.



题目 30 (2023·四川·四川省金堂中学校校联考三模) 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB=4$，$BC=CD=DA=2$，将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 折起，使得点 D 翻折到点 P，若面 $PAC\perp$ 面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为（　　）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/318033102123006033