

查补培优冲刺 04. 二次函数与几何的综合压轴

题型大集合

题型一：二次函数与角度问题

题型二：二次函数与相似（全等）

题型三：二次函数与特殊三角形

题型四：二次函数与特殊四边形

题型五：二次函数与定值、定点

题型六：二次函数与几何最值（范围）

题型七：二次函数与新定义几何图形

题型大提升

题型一：二次函数与角度问题



1. 二次函数与角度综合问题，常见类型：

1) 特殊角问题：（1）利用特殊角的三角函数值找到线段之间的数量关系；（2）遇到特殊角可以构造特殊三角形，如遇到 45° 构造等腰直角三角形，遇到 30° 、 60° 构造等边三角形，遇到 90° 构造直角三角形。

2) 角的数量关系问题

(1) 等角问题：基于动点构造某个角使其与特定已知角相等，主要借助特殊图形的性质、全等和相似的性质或构造圆，利用圆周角的性质来解决；

(2) 倍角问题：基于动点构造某个角使其等于特定已知角的倍角，主要利用角平分线的性质、等腰三角形的性质、对称、辅助圆等知识来解答；

(3) 角的和差问题：角度和为 90° 、 45° 等。

例 1. （2023·江苏无锡·中考真题）已知二次函数 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 的图像与 y 轴交于点 A ，且经过点

$B(4, \sqrt{2})$ 和点 $C(-1, \sqrt{2})$. (1) 请直接写出 b ， c 的值；(2) 直线 BC 交 y 轴于点 D ，点 E 是二次函数

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 图像上位于直线 AB 下方的动点，过点 E 作直线 AB 的垂线，垂足为 F .

①求 EF 的最大值；②若 $\triangle AEF$ 中有一个内角是 $\angle ABC$ 的两倍，求点 E 的横坐标.

变式 1. (2024·江苏扬州·一模) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 已知抛物线

$y' = -x^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $C(-3, 4)$, 与 x 轴分别交于点 A, B . 连接 AC , 点 D 是线段 AC 上方抛物线上的一动点. (1)求抛物线的解析式; (2)如图 1, 在点 D 运动过程中, 连接 AD, CD , 求 $\triangle ADC$ 面积的最大值;

(3)如图 2, 在点 D 运动过程中, 连接 OD 交 AC 于点 E , 点 F 在线段 OA 上, 连接 OC, DF, EF , 若 $\angle ACO = \angle FDO + \angle DFE$, 求点 F 横坐标的最大值.

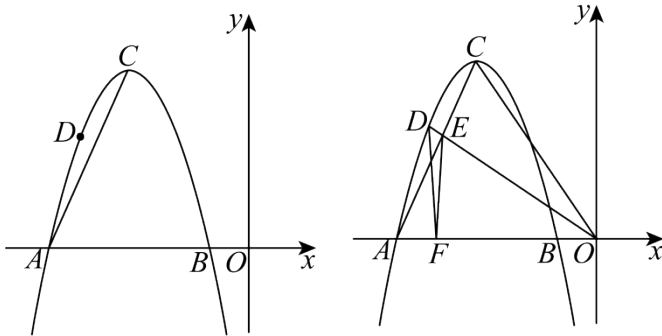
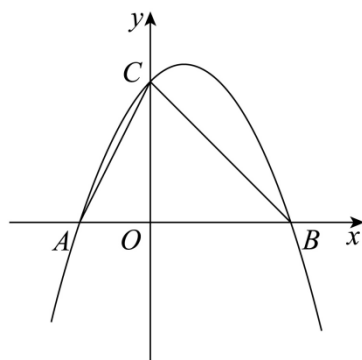
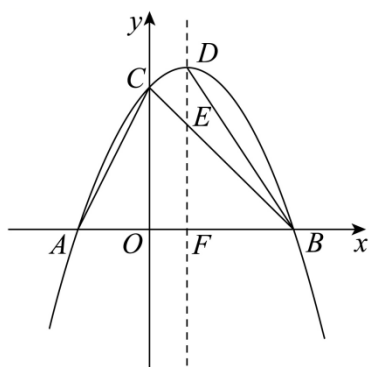


图1

图2

变式 2. (2022·江苏苏州·中考真题) 如图, 在二次函数 $y = -x^2 + 2mx + 2m + 1$ (m 是常数, 且 $m > 0$) 的图像与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D . 其对称轴与线段 BC 交于点 E , 与 x 轴交于点 F . 连接 AC, BD . (1) 求 A, B, C 三点的坐标 (用数字或含 m 的式子表示), 并求 $\angle OBC$ 的度数; (2) 若 $\angle ACO = \angle CBD$, 求 m 的值; (3) 若在第四象限内二次函数 $y = -x^2 + 2mx + 2m + 1$ (m 是常数, 且 $m > 0$) 的图像上, 始终存在一点 P , 使得 $\angle ACP = 75^\circ$, 请结合函数的图像, 直接写出 m 的取值范围.



(备用图)

题型二：二次函数与相似（全等）



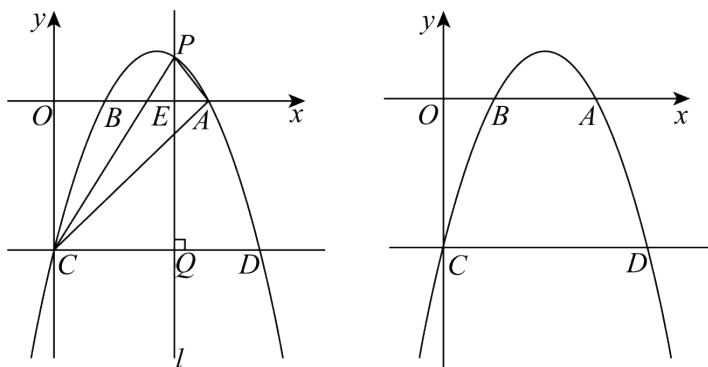
相似三角形存在性问题 (1) 若两个相似三角形对应关系已知, 则根据对应边或对应角关系 ①设点坐标; ②表示线段长 (或点坐标); ③列比例关系式求解; ④将点坐标代入到满足的函数关系中求解; (2) 若两个相似三角形对应关系未知, 则需根据已知三角形分类讨论三角形的对应边关系, 再由 (1) 中的步骤求解即可.

全等三角形存在性问题: (1

若两个全等三角形对应关系已知，则根据对应边关系：①若三角形的边长可以计算出来，则根据全等关系直接列式；②若已知三角形的顶点在抛物线上，并且可以表示出来，则将此顶点坐标代入抛物线解析式中列式。（2）若两个全等三角形对应关系未知，则需根据已知分类讨论两个三角形的对应全等关系，再由（1）中的方法求解即可。

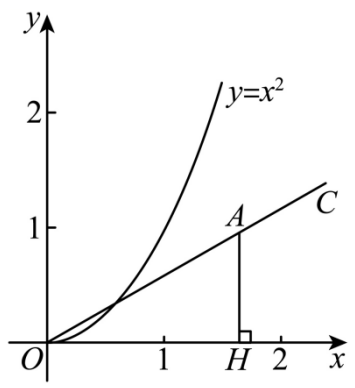
例 1. (2024·江苏苏州·一模) 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 - 8ax + 10a - 1 (a < 0)$ 与 x 轴的交点分别为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ ，其中 $(0 < x_2 < x_1)$ ，且 $AB = 4$ ，与 y 轴的交点为 C ，直线 $CD \parallel x$ 轴，在 x 轴上有一动点 $E(t, 0)$ ，过点 E 作直线 $l \perp x$ 轴，与抛物线、直线 CD 的交点分别为 P 、 Q 。

(1) 求抛物线的解析式；(2) 当 $0 < t \leq 8$ 时，求 $\triangle APC$ 面积的最大值；(3) 当 $t > 2$ 时，是否存在点 P ，使以 C 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle OBC$ 相似？若存在，求出此时 t 的值；若不存在，请说明理由。



备用图

变式 1. (23-24 九年级·江苏连云港·阶段练习) 如图，在第一象限内作与 x 轴的夹角为 30° 的射线 OC ，在射线 OC 上取一点 A ，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H 。在抛物线 $y = x^2 (x > 0)$ 上取一点 P ，在 y 轴上取一点 Q ，使得以 P, O, Q 为顶点的三角形与 $\triangle AOH$ 全等，则符合条件的点 A 的坐标是_____。



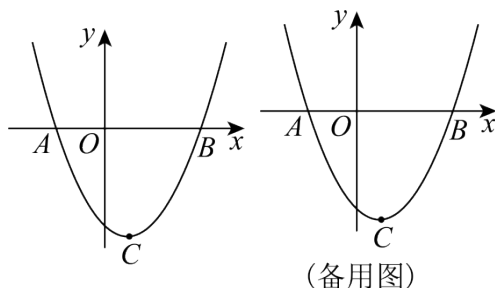
题型三：二次函数与特殊三角形



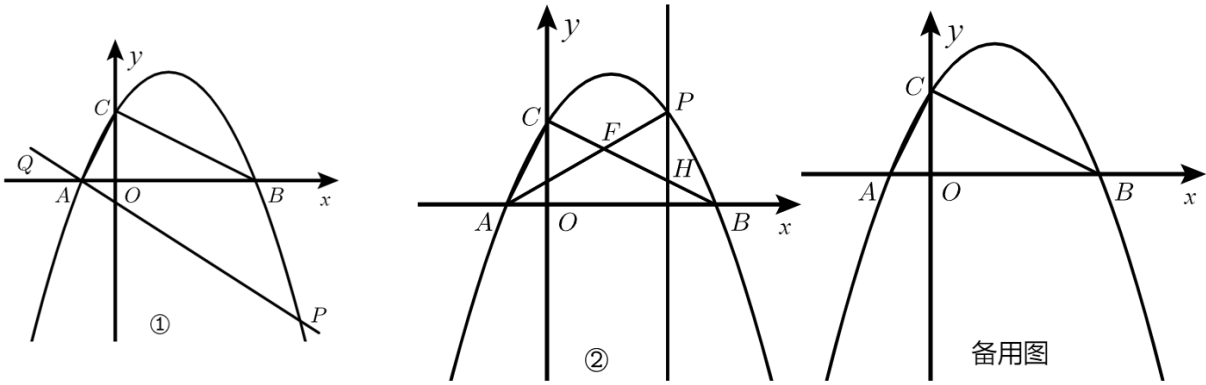
1) **等腰三角形存在性问题处理技巧:** 需注意分类讨论思想的应用, 找准顶角与底角分类讨论的关键, 借助等腰三角形的等边对等角、等角对等边、三线合一等性质来转化已知条件是常用的处理手段。

2) **直角三角形存在性问题处理技巧:** 需注意分类讨论思想的应用, 找准直角顶点是分类讨论的关键, 借助直角三角形的勾股定理, 两锐角互补等性质来转化已知条件是常用的处理手段。

例 1. (2023·江苏·中考真题) 如图, 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 4$ 的图像与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ 、 B , 其顶点是 C . (1) $b =$ _____; (2) D 是第三象限抛物线上的一点, 连接 OD , $\tan \angle AOD = \frac{5}{2}$; 将原抛物线向左平移, 使得平移后的抛物线经过点 D , 过点 $(k, 0)$ 作 x 轴的垂线 l . 已知在 l 的左侧, 平移前后的两条抛物线都下降, 求 k 的取值范围; (3) 将原抛物线平移, 平移后的抛物线与原抛物线的对称轴相交于点 Q , 且其顶点 P 落在原抛物线上, 连接 PC 、 QC 、 PQ . 已知 $\triangle PCQ$ 是直角三角形, 求点 P 的坐标.



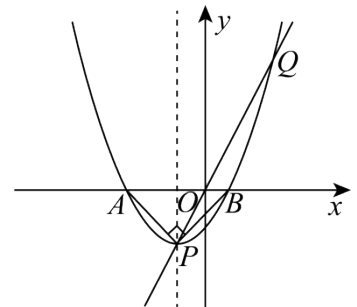
变式 1. (2021·江苏宿迁·中考真题) 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 连接 AC , BC , 点 P 在抛物线上运动. (1) 求抛物线的表达式; (2) 如图①, 若点 P 在第四象限, 点 Q 在 PA 的延长线上, 当 $\angle CAQ = \angle CBA + 45^\circ$ 时, 求点 P 的坐标; (3) 如图②, 若点 P 在第一象限, 直线 AP 交 BC 于点 F , 过点 P 作 x 轴的垂线交 BC 于点 H , 当 $\triangle PFH$ 为等腰三角形时, 求线段 PH 的长.



变式 2. (2023·江苏无锡·模拟预测) 如图, 已知二次函数 $y = ax^2 + 2ax + c (a > 0)$ 的图象与 x 轴相交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左侧), 它的对称轴 l 与图象交于点 P , 直线 OP 所对应的函数表达式为 $y = 2x$

(1) 请直接写出点 P 的坐标. (2) 若 $\triangle PAB$ 为直角三角形, 设直线 OP 与这个二次函数的图象的另一个交点为 Q .

① 求 a 、 c 的值与点 Q 的坐标; ② 若 M 为直线 l 上的点, 且以 M 、 B 、 Q 为顶点的三角形是锐角三角形, 请直接写出点 M 的纵坐标 t 的取值范围.



题型四：二次函数与特殊四边形



1) 平行四边形存在性问题处理技巧: (平移或中点思想)

关键: 对角线互相平分, 即对角线中点重合 \rightarrow 中点公式。

① 当 AB 为对角线: $x_A + x_B = x_C + x_D$; $y_A + y_B = y_C + y_D$; ② 当 AC 为对角线: $x_A + x_C = x_B + x_D$; $y_A + y_C = y_B + y_D$;

③当 AD 为对角线: $x_A+x_D=x_B+x_C$; $y_A+y_D=y_B+y_C$ 。

2) 菱形存在性问题处理技巧: 先用中点公式证平行四边形, 再构造等腰三角形, 即邻边相等的点。

3) 矩形存在性问题处理技巧: 先用中点公式证平行四边形, 再构造证直角三角形, 即邻边垂直的点。

4) 正方形存在性问题处理技巧: 先用中点公式证平行四边形, 再构造证等腰直角三角形的点。

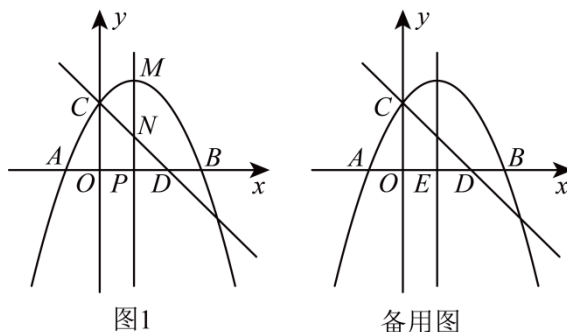
注意: “四边形 $ABCD$ 是 ...” 和 “以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是...” 的区别, 前者顺序已定, 后者可以随机顺序, 需进一步讨论。

例 1. (2024·江苏宿迁·一模) 材料一: 《见微知著》谈到: 从一个简单的经典问题出发, 从特殊到一般, 由简单到复杂, 从部分到整体, 由低维到高维, 知识与方法上的类比是探索题 发展的重要途径, 是思想闸门发现新问题、新结论的重要方法, 在数学学习和研究中, 我们会经常用到类比、转化、从特殊到一般等思想方法, 请利用上述有关思想, 解答下列问题。

材料二: 分类讨论是一种重要的数学思想, 也是一种解题策略, 在数学中的应用相当多, 它能使许多看似非常复杂的问题简单化. 因此在用分类讨论解决数学问题时遵循一定的规则, 注意合理的分类, 对全体对象的分类必须做到不重复、不遗漏, 每次分类必须保持在同一标准。

请阅读上述材料, 完成题目:

如图, 抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 直线 $CD: y = -x + 2$ 与 x 轴交于点 D . 动点 M 在抛物线上运动, 过点 M 作 $MP \perp x$ 轴, 垂足为 P , 交直线 CD 于点 N . (1) 求抛物线的解析式; (2) 当点 P 在线段 OD 上时, $\triangle CDM$ 的面积是否存在最大值, 若存在, 请求出最大值; 若不存在, 请说明理由; (3) 点 E 是抛物线对称轴与 x 轴的交点, 点 F 是 x 轴上一动点, 点 M 在运动过程中, 若以 C 、 E 、 F 、 M 为顶点的四边形是平行四边形时, 请直接写出点 F 的坐标。



变式 1. (2024·江苏徐州·一模) 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图象交 x 轴于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C , 点 P 在线段 OB 上, 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴, 交抛物线于点 D

, 交直线 BC 于点 E . (1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) 在点 P 运动过程中, 若 $\triangle CDE$ 是直角三角形, 求点 P 的坐标;

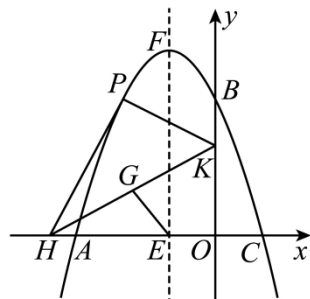
(3) 在 y 轴上是否存在点 F , 使得以点 C, D, E, F 为顶点的四边形为菱形? 若存在, 请直接写出点 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

变式 2. (2024·江苏徐州·一模) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的顶点坐标为

$F(-1, 4)$ 交 x 轴于 A, C 两点, 交 y 轴于点 B , 抛物线的对称轴交 x 轴于点 E . (1) 求抛物线的解析式; (2)

已知抛物线上点 $P(-2, 3)$, 以点 P 为直角顶点构造 $\text{Rt}\triangle PHK$, 使点 H 在 x 轴上, 点 K 在 y 轴上, G 为 HK

的中点, 求 EG 的最小值; (3) M 为平面直角坐标系中一点, 在抛物线上是否存在一点 N , 使得以 A, B, M, N 为顶点的四边形为矩形? 若存在, 求出点 N 的横坐标; 若不存在, 请说明理由.



题型五：二次函数与定值、定点

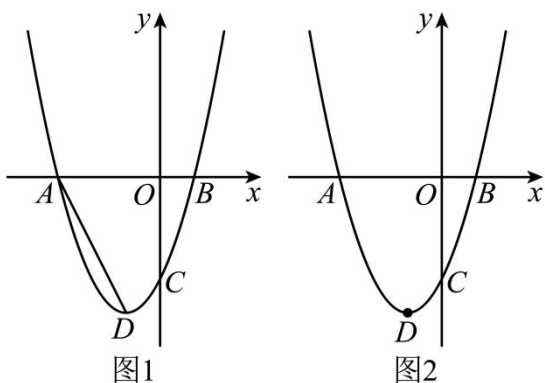


1.直线过定点：设点的坐标，用字母表示出直线的解析式，再分离变量，得到定点坐标或直线的横（纵）坐标为定值。

2.线段比值为定值、线段乘积为定值、线段和差为定值：设点的坐标，用字母表示出线段的长，寻找等量关系，在恒等变换中消去字母，得到定值。

3.线段倒数和为定值：一种是与角平分线有关的纯几何问题，此时可通过角平分线上的点向角的两边作垂线，利用面积法用两种方式表示出三角形的面积，再通过恒等变换得到倒数和为定值，另一种是与抛物线的性质有关的代数问题（直线过交点），先设点的坐标，用字母表示出线段的长，利用根与系数的关系及恒等变换消去字母，得到定值。

例 1. （2024·湖北武汉·三模）如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D 。其中 $A(-3, 0)$ ， $D(-1, -4)$ 。(1)直接写出该抛物线的解析式；(2)如图 1，在第三象限内抛物线上找点 E ，使 $\angle OCE = \angle OAD$ ，求点 E 的坐标；(3)如图 2，过抛物线对称轴上点 P 的直线交抛物线于 F, G 两点，线段 FG 的中点是 M ，过点 M 作 y 轴的平行线交抛物线于点 N 。若 $\frac{FG}{MN}$ 是一个定值，求点 P 的坐标。



变式 1. （2024·江苏无锡·一模）如图 1，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 $A(0, 3)$ ， $B(4, 3)$ 两点，作 BC 垂直 x 轴于点 C 。(1)求该抛物线的解析式；(2)若点 D 是抛物线上一点，满足 $\angle BOC = \angle OBD$ ，求点 D 的坐标；(3)若点 P 为抛物线上一点，且在第四象限内。已知直线 PA, PB 与 x 轴分别交于 E, F 两点。当点 P 运动时， $\frac{1}{OE} + \frac{1}{CF}$ 是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由。

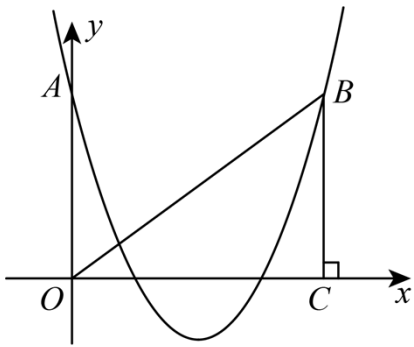


图 1

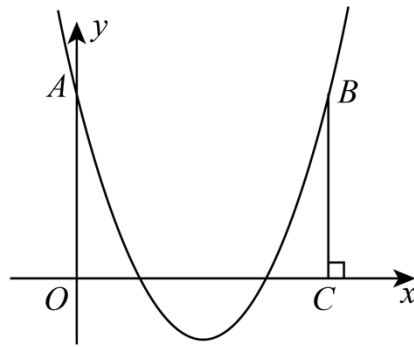
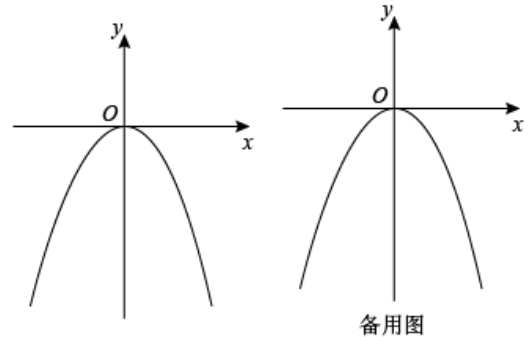


图 2

变式 2. (2022·四川成都·中考真题) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=kx-3(k \neq 0)$ 与抛物线 $y=-x^2$ 相交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 点 B 关于 y 轴的对称点为 B' .

(1) 当 $k=2$ 时, 求 A, B 两点的坐标; (2) 连接 OA, OB, AB', BB' , 若 $\triangle VB'AB$ 的面积与 $\triangle VOAB$ 的面积相等, 求 k 的值; (3) 试探究直线 AB' 是否经过某一定点. 若是, 请求出该定点的坐标; 若不是, 请说明理由.



题型六: 二次函数与几何最值 (范围)



二次函数的几何最值 1 (代数法): 引入新的变量, 将所求的长度、面积、坐标等用新的变量表示出来, 再运用二次函数的最值解决即可。

二次函数的几何最值 2 (几何法): 将我们要求的线段、多线段和差的最值问题转化为基本的几何模型 (将军饮马、胡不归、费马点、阿氏圆、瓜豆原理等) 进行解决即可。

例 1. (2024·江苏淮安·二模) 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$ 的图象与 x

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318070050026007005>