

期末复习（易错题 52 题 232 个考点）

一. 因式分解-提公因式法（共 1 小题）

1. 把 $-a(x-y) - b(y-x) + c(x-y)$ 分解因式正确的结果是（ ）

A. $(x-y)(-a-b+c)$

B. $(y-x)(a-b-c)$

C. $-(x-y)(a+b-c)$

D. $-(y-x)(a+b-c)$

【答案】B

【解答】解： $-a(x-y) - b(y-x) + c(x-y)$,

$$= a(y-x) - b(y-x) - c(y-x),$$

$$= (y-x)(a-b-c).$$

故选：B.

二. 因式分解-运用公式法（共 2 小题）

2. 分解因式： $a^4 - 16a^2 = \underline{a^2(a+4)(a-4)}$.

【答案】见试题解答内容

【解答】解： $a^4 - 16a^2$,

$$= a^2(a^2 - 16),$$

$$= a^2(a+4)(a-4).$$

故答案为： $a^2(a+4)(a-4)$.

3. 若 $x^2 + 2(3-m)x + 25$ 可以用完全平方式来分解因式，则 m 的值为 -2 或 8.

【答案】见试题解答内容

【解答】解： $\because x^2 + 2(3-m)x + 25$ 可以用完全平方式来分解因式，

$$\therefore 2(3-m) = \pm 10$$

解得： $m = -2$ 或 8 .

故答案为：-2 或 8.

三. 因式分解的应用（共 2 小题）

4. 若 $2a - 3b = -1$ ，则代数式 $4a^2 - 6ab + 3b$ 的值为 1.

【答案】见试题解答内容

【解答】解： $\because 2a - 3b = -1$,

$$\therefore 4a^2 - 6ab + 3b$$

$$= 2a(2a - 3b) + 3b$$

$$=2a \times (-1) + 3b$$

$$= -2a + 3b$$

$$= - (2a - 3b)$$

$$= - (-1)$$

$$= 1$$

故答案为 1

5. 阅读材料：若 $m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0$ ，求 m, n 的值.

$$\text{解：} \because m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0, \therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 4n + 4) = 0,$$

$$\therefore (m - n)^2 + (n - 2)^2 = 0, \therefore (m - n)^2 = 0, (n - 2)^2 = 0, \therefore n = 2, m = 2.$$

根据你的观察，探究下面的问题：

$$(1) a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10 = 0, \text{ 则 } a = \underline{-3}, b = \underline{1}.$$

$$(2) \text{ 已知 } x^2 + 2y^2 - 2xy + 8y + 16 = 0, \text{ 求 } xy \text{ 的值.}$$

$$(3) \text{ 已知 } \triangle ABC \text{ 的三边长 } a, b, c \text{ 都是正整数, 且满足 } 2a^2 + b^2 - 4a - 8b + 18 = 0, \text{ 求 } \triangle ABC \text{ 的周长.}$$

【答案】见试题解答内容

【解答】(1) 解：由： $a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10 = 0$ ，得：

$$(a+3)^2 + (b-1)^2 = 0,$$

$$\because (a+3)^2 \geq 0, (b-1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a+3=0, b-1=0,$$

$$\therefore a = -3, b = 1.$$

故答案为： -3； 1.

$$(2) \text{ 由 } x^2 + 2y^2 - 2xy + 8y + 16 = 0 \text{ 得:}$$

$$(x-y)^2 + (y+4)^2 = 0$$

$$\therefore x-y=0, y+4=0,$$

$$\therefore x=y=-4$$

$$\therefore xy=16.$$

答： xy 的值为 16.

$$(3) \text{ 由 } 2a^2 + b^2 - 4a - 8b + 18 = 0 \text{ 得:}$$

$$2(a-1)^2 + (b-4)^2 = 0,$$

$$\therefore a-1=0, b-4=0,$$

$\therefore a=1, b=4;$

已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 都是正整数，由三角形三边关系知 $c=4$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为9.

四. 分式的值为零的条件 (共1小题)

6. 如果分式 $\frac{|x|-1}{x+1}$ 的值为0，那么 x 的值为 ()

- A. -1 B. 1 C. -1或1 D. 1或0

【答案】B

【解答】解：根据题意，得

$|x|-1=0$ 且 $x+1 \neq 0$,

解得， $x=1$.

故选：B.

五. 分式的基本性质 (共3小题)

7. 如果分式 $\frac{a^2}{a+b}$ 中的 a 、 b 都同时扩大2倍，那么该分式的值 ()

- A. 不变 B. 缩小2倍 C. 扩大2倍 D. 扩大4倍

【答案】C

【解答】解： $\because$ 分式 $\frac{a^2}{a+b}$ 中的 a 、 b 都同时扩大2倍，

$\therefore \frac{(2a)^2}{2a+2b} = \frac{2a^2}{a+b},$

$\therefore$ 该分式的值扩大2倍.

故选：C.

8. 根据分式的基本性质，分式 $\frac{-x}{x-y}$ 可变形为 ()

- A. $\frac{x}{-x-y}$ B. $\frac{x}{x+y}$ C. $-\frac{x}{x-y}$ D. $-\frac{-x}{x+y}$

【答案】C

【解答】解： $\because \frac{-x}{x-y} = -\frac{x}{x-y},$

故选：C.

9. 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ ，则 $\frac{2x-xy+2y}{3x+5xy+3y} = -\frac{3}{11}$.

【答案】见试题解答内容

【解答】解：由 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ ，得 $x+y=2xy$

$$\text{则 } \frac{2x-xy+2y}{3x+5xy+3y} = \frac{2(x+y)-xy}{3(x+y)+5xy} = \frac{2 \cdot 2xy - xy}{3 \cdot 2xy + 5xy} = \frac{3xy}{11xy} = \frac{3}{11}.$$

故答案为 $\frac{3}{11}$.

六. 分式的加减法 (共 1 小题)

10. 分式中，在分子、分母都是整式的情况下，如果分子的次数低于分母的次数，称这样的分式为真分式. 例

如，分式 $\frac{4}{x+2}$ ， $\frac{3x^2}{x^3-4x}$ 是真分式. 如果分子的次数不低于分母的次数，称这样的分式为假分式. 例如，

分式 $\frac{x+1}{x-1}$ ， $\frac{x^2}{x+1}$ 是假分式. 一个假分式可以化为一个整式与一个真分式的和. 例如，

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

(1) 将假分式 $\frac{2x-1}{x+1}$ 化为一个整式与一个真分式的和；

(2) 若分式 $\frac{x^2}{x+1}$ 的值为整数，求 x 的整数值.

【答案】见试题解答内容

【解答】解：(1) 由题可得， $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$;

$$(2) \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1},$$

$\because$ 分式的值为整数，且 x 为整数，

$$\therefore x+1 = \pm 1,$$

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } 0.$$

七. 分式的混合运算 (共 1 小题)

11. 已知一列均不为 1 的数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 满足如下关系： $a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1}$, $a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2}$, $a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3}$, $\dots$,

$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ ，若 $a_1=2$ ，则 a_{2023} 的值是 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. -3

D. 2

【答案】A

【解答】解：由题意得，

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{1+2}{1-2} = -3,$$

$$a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = \frac{1+(-3)}{1-(-3)} = -\frac{1}{2},$$

$$a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1+(-\frac{1}{2})}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3},$$

$$a_5 = \frac{1+a_4}{1-a_4} = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2,$$

.....,

$\therefore a_n$ 的值按照 2, -3, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,4 次一个循环周期的规律出现,

$$\because 2023 \div 4 = 505 \cdots 3,$$

$$\therefore a_{2023} \text{ 的值是 } -\frac{1}{2},$$

故选: A.

八. 分式的化简求值 (共 1 小题)

12. 先化简, 再求值: $(\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x+1}) \div \frac{2x^2-x}{x^2+2x+1}$, 其中 x 满足 $x^2 - 2x - 2 = 0$.

【答案】见试题解答内容

$$\text{【解答】解: } (\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x+1}) \div \frac{2x^2-x}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{x^2-1-x^2+2x}{x(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x(2x-1)}$$

$$= \frac{2x-1}{x(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x(2x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{x^2},$$

$$\because x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\therefore x^2 = 2x+2,$$

$$\therefore \text{当 } x^2 = 2x+2 \text{ 时, 原式} = \frac{x+1}{2x+2} = \frac{x+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

九. 分式方程的解 (共 1 小题)

13. 已知关于 x 的方程 $\frac{x}{x-2} - \frac{m}{2-x} = -1$ 的解大于 1, 则实数 m 的取值范围是 $m < 0$, 且 $m \neq -2$.

【答案】见试题解答内容

【解答】解: 方程两边乘 $x-2$ 得: $x+m=2-x$,

移项得: $2x=2-m$,

系数化为 1 得: $x=\frac{2-m}{2}$,

$\because$ 方程的解大于 1,

$\therefore \frac{2-m}{2} > 1$, 且 $\frac{2-m}{2} \neq 2$, 解得 $m < 0$, 且 $m \neq -2$.

故答案为: $m < 0$, 且 $m \neq -2$.

一十. 分式方程的增根 (共 2 小题)

14. 若方程 $\frac{6}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$ 有增根, 则它的增根是 ()

A. 0

B. 1

C. -1

D. 1 和 -1

【答案】B

【解答】解: 方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$, 得

$$6 - m(x+1) = (x+1)(x-1),$$

由最简公分母 $(x+1)(x-1)=0$, 可知增根可能是 $x=1$ 或 -1 .

当 $x=1$ 时, $m=3$,

当 $x=-1$ 时, 得到 $6=0$, 这是不可能的,

所以增根只能是 $x=1$.

故选: B.

15. 关于 x 的方程 $\frac{x-1}{x-3} = 2 + \frac{k}{x-3}$ 有增根, 则 k 的值为 ()

A. ± 3

B. 3

C. -3

D. 2

【答案】D

【解答】解: $\because$ 原方程有增根,

$\therefore$ 最简公分母 $x-3=0$,

解得 $x=3$,

方程两边都乘 $(x-3)$,

得: $x-1=2(x-3)+k$,

当 $x=3$ 时, $k=2$, 符合题意,

故选: D .

一十一. 不等式的性质 (共 1 小题)

16. 若 $a>b$, 下列不等式不一定成立的是 ()

- A. $a-5>b-5$ B. $-5a<-5b$ C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ D. $a+c>b+c$

【答案】 C

【解答】解: A . $\because a>b$,

$\therefore a-5>b-5$, 故本选项不符合题意;

B . $\because a>b$,

$\therefore -5a<-5b$, 故本选项不符合题意;

C . $\because a>b$,

$\therefore$ 当 $c>0$ 时, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; 当 $c<0$ 时, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, 故本选项符合题意;

D . $\because a>b$,

$\therefore a+c>b+c$, 故本选项不符合题意;

故选: C .

一十二. 解一元一次不等式 (共 1 小题)

17. 已知 m, n 为常数, 若 $mx+n>0$ 的解集为 $x<\frac{1}{3}$, 则 $nx-m<0$ 的解集是 ()

- A. $x>3$ B. $x<3$ C. $x>-3$ D. $x<-3$

【答案】 D

【解答】解: 由 $mx+n>0$ 的解集为 $x<\frac{1}{3}$, 不等号方向改变,

$$\therefore m<0 \text{ 且 } -\frac{n}{m}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{n}{m}=-\frac{1}{3}<0,$$

$$\therefore m<0.$$

$$\therefore n>0;$$

$$\text{由 } nx-m<0 \text{ 得 } x<\frac{m}{n}=-3,$$

所以 $x<-3$;

故选: D .

一十三. 解一元一次不等式组（共 1 小题）

18. 如果不等式组 $\begin{cases} x < 8 \\ x > m \end{cases}$ 无解，那么 m 的取值范围是（ ）

- A. $m > 8$ B. $m \geq 8$ C. $m < 8$ D. $m \leq 8$

【答案】B

【解答】解：因为不等式组无解，

即 $x < 8$ 与 $x > m$ 无公共解集，

利用数轴可知 $m \geq 8$ 。

故选：B。

一十四. 一元一次不等式组的整数解（共 1 小题）

19. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5-2x \geq -1 \\ x-a > 0 \end{cases}$ 有 5 个整数解，则 a 的取值范围是 $-2 \leq a < -1$ 。

【答案】见试题解答内容

【解答】解： $\begin{cases} 5-2x \geq -1 \text{ ①} \\ x-a > 0 \text{ ②} \end{cases}$ ，

由①得： $x \leq 3$ ，

由②得： $x > a$ ，

$\therefore$ 不等式的解集为： $a < x \leq 3$ ，

$\because$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5-2x \geq -1 \\ x-a > 0 \end{cases}$ 有 5 个整数解，

$\therefore x = -1, 0, 1, 2, 3$ ，

$\therefore a$ 的取值范围是： $-2 \leq a < -1$ 。

故答案为： $-2 \leq a < -1$ 。

一十五. 一元一次不等式组的应用（共 1 小题）

20. 一方有难八方支援，某市政府筹集了抗旱必需物资 120 吨打算运往灾区，现有甲、乙、丙三种车型供选择，每辆车的运载能力和运费如下表所示：（假设每辆车均满载）

车型	甲	乙	丙
汽车运载量（吨/辆）	5	8	10
汽车运费（元/辆）	300	400	500

（1）若全部物资都用甲、乙两种车型来运送，需运费 6400 元，问分别需甲、乙两种车型各几辆？

（2）为了节约运费，该市政府决定甲、乙、丙三种车型至少两种车型参与运送，已知它们的总辆数为

18 辆，请通过列方程组的方法分别求出三种车型的数量；

(3) 求出哪种方案的运费最省？最省是多少元.

【答案】(1) 需甲车型 8 辆，需车型 10 辆；

(2) 有三种运送方案：

①甲车型 12 辆，乙车型 0 辆，丙车型 6 辆；

②甲车型 10 辆，乙车型 5 辆，丙车型 3 辆；

③甲车型 8 辆，乙车型 10 辆，丙车型 0 辆.

(3) 甲车型 8 辆，乙车型 10 辆，丙车型 0 辆，最少运费是 6400 元.

【解答】解：(1) 设需甲车型 x 辆，乙车型 y 辆，得：
$$\begin{cases} 5x+8y=120 \\ 300x+400y=6400 \end{cases}$$

解得，
$$\begin{cases} x=8 \\ y=10 \end{cases}$$
.

答：需甲车型 8 辆，需车型 10 辆；

(2) 设需甲车型 x 辆，乙车型 y 辆，丙车型 z 辆，得：
$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ 5x+8y+10z=120 \end{cases}$$

消去 z ，得 $5x+2y=60$ ， $x=12-\frac{2}{5}y$ ，

因 x, y 是整数，且不大于 18，得 $y=0, 5, 10, 15$ ，

由 z 是整数，解得
$$\begin{cases} x=12 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=10 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=8 \\ y=10 \\ z=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=6 \\ y=15 \\ z=-3 \end{cases} \text{ (舍)};$$

有三种运送方案：

①甲车型 12 辆，乙车型 0 辆，丙车型 6 辆；

②甲车型 10 辆，乙车型 5 辆，丙车型 3 辆；

③甲车型 8 辆，乙车型 10 辆，丙车型 0 辆.

(3) 三种方案的运费分别是：

① $300 \times 12 + 400 \times 0 + 500 \times 6 = 6600$ (元)；

② $300 \times 10 + 400 \times 5 + 500 \times 3 = 6500$ (元)；

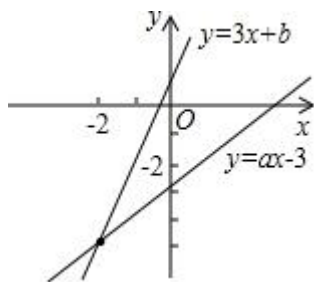
③ $300 \times 8 + 400 \times 10 + 500 \times 0 = 6400$ (元)；

答：甲车型 8 辆，乙车型 10 辆，丙车型 0 辆，最少运费是 6400 元.

一十六. 一次函数与一元一次不等式 (共 2 小题)

21. 如图，已知：函数 $y=3x+b$ 和 $y=ax-3$ 的图象交于点 $P(-2, -5)$ ，则根据图象可得不等式 $3x+b >$

$ax-3$ 的解集是 ()



- A. $x > -5$ B. $x > -2$ C. $x > -3$ D. $x < -2$

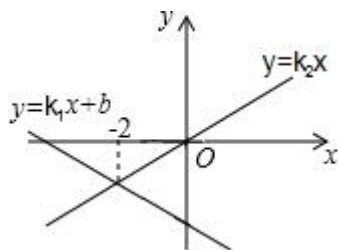
【答案】B

【解答】解：∵函数 $y = 3x + b$ 和 $y = ax - 3$ 的图象交于点 $P(-2, -5)$,

则根据图象可得不等式 $3x + b > ax - 3$ 的解集是 $x > -2$,

故选：B.

22. 同一平面直角坐标系中，一次函数 $y_1 = k_1x + b$ 与正比例函数 $y_2 = k_2x$ 的图象如图所示，则满足 $y_1 \geq y_2$ 的 x 取值范围是 ()



- A. $x \leq -2$ B. $x \geq -2$ C. $x < -2$ D. $x > -2$

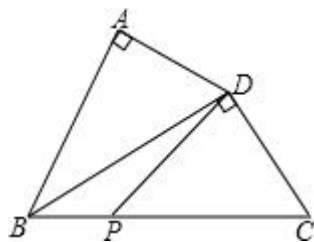
【答案】A

【解答】解：当 $x \leq -2$ 时，直线 $l_1: y_1 = k_1x + b_1$ 都在直线 $l_2: y_2 = k_2x$ 的上方，即 $y_1 \geq y_2$.

故选：A.

一十七. 角平分线的性质 (共 2 小题)

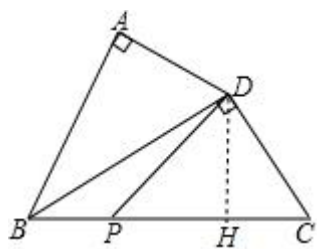
23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD = 3$ ，连接 BD ， $BD \perp CD$ ， $\angle ADB = \angle C$. 若 P 是 BC 边上一动点，则 DP 长的最小值为 ()



- A. 1 B. 6 C. 3 D. 12

【答案】C

【解答】解：过点 D 作 $DH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，如图所示：



$$\because BD \perp CD,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle C + \angle BDC + \angle DBC = 180^\circ,$$

$$\angle ADB + \angle A + \angle ABD = 180^\circ$$

$$\angle ADB = \angle C, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$\therefore BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线，

$$\text{又} \because AD \perp AB, DH \perp BC,$$

$$\therefore AD = DH,$$

$$\text{又} \because AD = 3,$$

$$\therefore DH = 3,$$

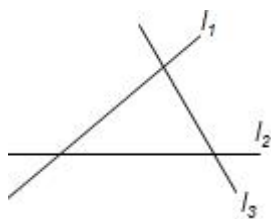
又 $\therefore$ 点 D 是直线 BC 外一点，

$\therefore$ 当点 P 在 BC 上运动时，点 P 运动到与点 H 重合时 DP 最短，其长度为 DH 长等于 3，

即 DP 长的最小值为 3.

故选：C.

24. 如图，直线 l_1, l_2, l_3 表示三条交叉的公路. 现在要建一个加油站，要求它到三条公路的距离相等，则可供选择的地点有 ()



A. 四处

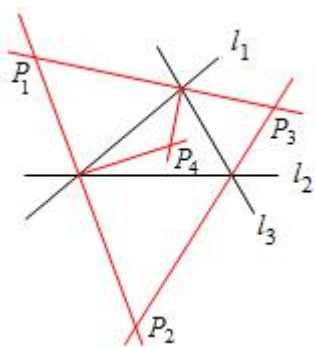
B. 三处

C. 两处

D. 一处

【答案】A

【解答】解：满足条件的有：



(1) 三角形两个内角平分线的交点，共一处；

(2) 三角形外角平分线的交点，共三处。

故选：A.

一十八. 等腰三角形的性质（共 1 小题）

25. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 30° ，则它的顶角为 60° 或 120° 。

【答案】见试题解答内容

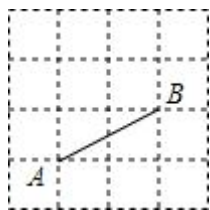
【解答】解：当高在三角形内部时，顶角是 60° ；

当高在三角形外部时，顶角是 120° 。

故答案为： 60° 或 120° 。

一十九. 等腰三角形的判定（共 1 小题）

26. 如图，网格中的每个小正方形的边长为 1，A、B 是格点，以 A、B、C 为等腰三角形顶点的所有格点 C 的个数为（ ）



A. 7 个

B. 8 个

C. 9 个

D. 10 个

【答案】B

【解答】解：如图所示，以 A 为圆心，AB 长为半径画弧，则圆弧经过的格点 C_3 、 C_8 、 C_7 即为点 C 的位置；

以 B 为圆心，AB 长为半径画弧，则圆弧经过的格点 C_1 、 C_2 、 C_6 、 C_4 、 C_5 即为点 C 的位置；

作线段 AB 的垂直平分线，垂直平分线没有经过格点。

故以 A、B、C 为等腰三角形顶点的所有格点 C 的个数为 8 个。

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle ACB = 90^\circ,$$

设 $\angle CBE = \alpha$, 则 $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle BDC - \angle ABC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle CBE;$$

② $\because \angle BFD$ 是 $\triangle CBF$ 的一个外角,

$$\therefore \angle BFD = \angle CBE + \angle BCD = \alpha + 2\alpha = 3\alpha,$$

分三种情况:

当 $BD = BF$ 时,

$$\therefore \angle BDC = \angle BFD = 3\alpha,$$

$$\because \angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore 90^\circ - \alpha = 3\alpha,$$

$$\therefore \alpha = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 2\alpha = 45^\circ;$$

当 $DB = DF$ 时,

$$\therefore \angle DBE = \angle BFD = 3\alpha,$$

$$\because \angle DBE = \angle ABC - \angle CBE = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore 90^\circ - 2\alpha = 3\alpha,$$

$$\therefore \alpha = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 2\alpha = 36^\circ;$$

当 $FB = FD$ 时,

$$\therefore \angle DBE = \angle BDF,$$

$$\because \angle BDF = \angle ABC > \angle DBF,$$

$$\therefore \text{不存在 } FB = FD,$$

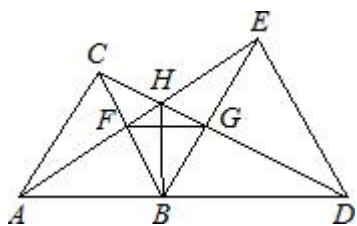
综上所述: 如果 $\triangle BDF$ 是等腰三角形, $\angle A$ 的度数为 45° 或 36° .

二十一. 等边三角形的性质 (共 1 小题)

28. 如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等边三角形, 且 A 、 B 、 D 三点共线. 下列结论: ① $AE = CD$;

② $BF = BG$; ③ HB 平分 $\angle AHD$; ④ $\angle AHC = 60^\circ$, ⑤ $\triangle BFG$ 是等边三角形; ⑥ $FG \parallel AD$. 其中正确

的有 ()



A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

【答案】D

【解答】解：∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDE$ 为等边三角形，

∴ $AB=BC$, $BD=BE$, $\angle ABC=\angle DBE=60^\circ$,

∴ $\angle ABE=\angle CBD$,

即 $AB=BC$, $BD=BE$, $\angle ABE=\angle CBD$

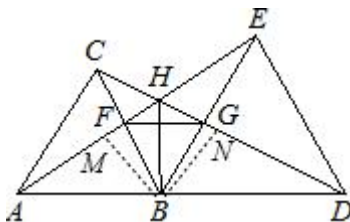
∴ $\triangle ABE \cong \triangle CBD$,

∴ $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBD}$, $AE=CD$, $\angle BDC=\angle AEB$,

又∵ $\angle DBG=\angle FBE=60^\circ$,

∴ $\triangle BGD \cong \triangle BFE$,

∴ $BG=BF$, $\angle BFG=\angle BGF=60^\circ$,



过 B 作 $BM \perp AE$ 于 M, $BN \perp CD$ 于 N,

∵ $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBD}$, $AE=CD$,

∴ $\frac{1}{2} \times AE \times BM = \frac{1}{2} \times CD \times BN$,

∴ $BM=BN$,

∴ BH 平分 $\angle AHD$, ∴ ①②③ 正确;

∵ $\triangle ABE \cong \triangle CBD$,

∴ $\angle EAB=\angle BCD$,

∵ $\angle CBA=60^\circ$,

∴ $\angle AHC=\angle CDB+\angle EAB=\angle CDB+\angle BCD=\angle CBA=60^\circ$, ∴ ④ 正确;

∵ $BF=BG$, $\angle FBG=60^\circ$,

$\therefore \triangle BFG$ 是等边三角形, $\therefore$ ⑤ 正确;

$\therefore \angle GFB = \angle CBA = 60^\circ$,

$\therefore FG \parallel AD$, $\therefore$ ⑥ 正确;

故选: D.

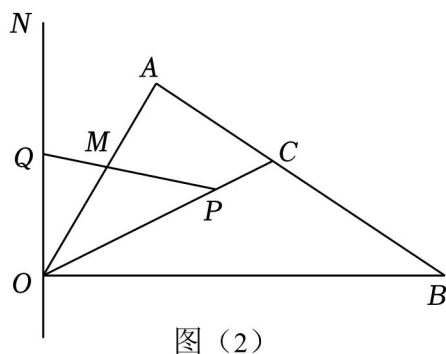
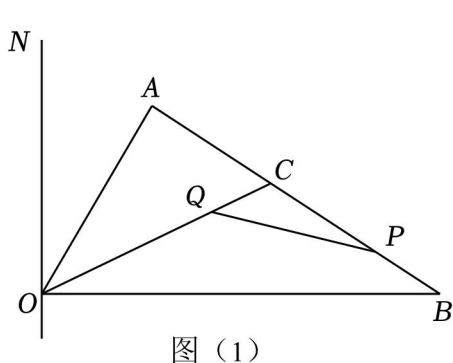
二十二. 含 30° 角的直角三角形 (共 2 小题)

29. 如图 (1), $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$, $OB = 2\sqrt{3}$, $\angle AOB$ 的平分线 OC 交 AB 于 C , 过 O 点作与 OB 垂直的直线 ON . 动点 P 从点 B 出发沿折线 $BC - CO$ 以每秒 1 个单位长度的速度向终点 O 运动, 运动时间为 t 秒, 同时动点 Q 从点 C 出发沿折线 $CO - ON$ 以相同的速度运动, 当点 P 到达点 O 时 P 、 Q 同时停止运动.

(1) 求 OC 、 BC 的长;

(2) 设 $\triangle CPQ$ 的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系式;

(3) 当 P 在 OC 上 Q 在 ON 上运动时, 如图 (2), 设 PQ 与 OA 交于点 M , 当 t 为何值时, $\triangle OPM$ 为等腰三角形? 求出所有满足条件的 t 值.



【答案】(1) 2, 2;

$$(2) S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t & (0 < t < 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \sqrt{3} & (2 < t < 4) \\ \sqrt{3} & (t = 4) \end{cases};$$

$$(3) \frac{8}{3} \text{ 或 } \frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$$

【解答】(1) 解: $\because \angle A = 90^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$, $OB = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \angle B = 30^\circ$,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}OB = \sqrt{3},$$

由勾股定理得: $AB = 3$,

$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 30^\circ = \angle B$,

$\therefore OC = BC$,

在 $\triangle AOC$ 中, $AO^2 + AC^2 = CO^2$,

$\therefore (\sqrt{3})^2 + (3 - OC)^2 = OC^2$,

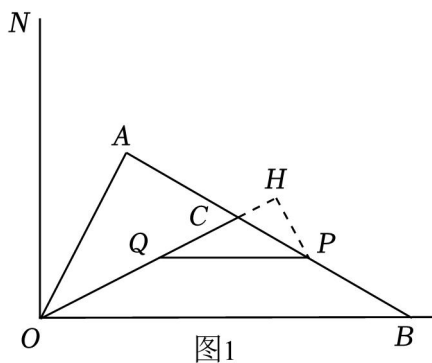
$\therefore OC = 2 = BC$,

答: $OC = 2$, $BC = 2$;

(2) 解: ①当 P 在 BC 上, Q 在 OC 上时, $0 < t < 2$,

则 $CP = 2 - t$, $CQ = t$,

过 P 作 $PH \perp OC$ 于 H , 则 $\angle HCP = 60^\circ$, $\angle HPC = 30^\circ$,



$\therefore CH = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}(2 - t)$, $HP = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - t)$,

$\therefore S_{\triangle CPQ} = \frac{1}{2}CQ \times PH = \frac{1}{2} \times t \times \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - t)$,

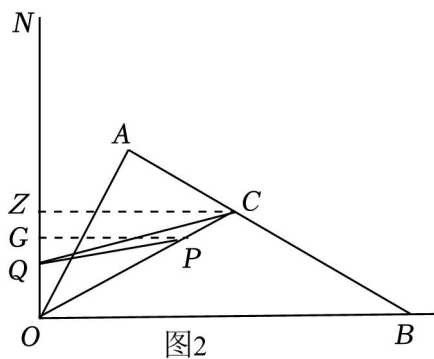
即 $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t$;

②当 $t = 2$ 时, P 和 C 重合, Q 和 O 重合, 此时 $\triangle CPQ$ 不存在;

③当 P 在 OC 上, Q 在 ON 上时, 过 P 作 $PG \perp ON$ 于 G , 过 C 作 $CZ \perp ON$ 于 Z ,

分为两种情况:

第一种情况: $2 < t \leq \sqrt{3}$,



$$\because CO=2, \angle NOC=60^\circ,$$

$$\therefore CZ=\sqrt{3},$$

$$CP=t-2, OQ=t-2,$$

$$\because \angle NOC=60^\circ,$$

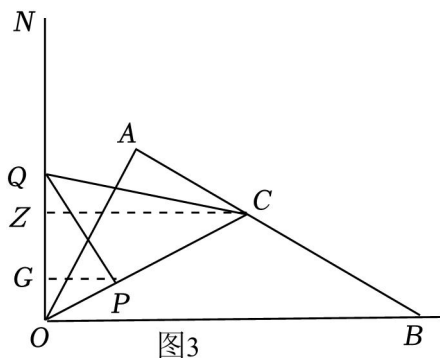
$$\therefore \angle GPO=30^\circ,$$

$$\therefore OG=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}(4-t), PG=\frac{\sqrt{3}}{2}(4-t),$$

$$\therefore S_{\triangle CPQ}=S_{\triangle COQ}-S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times(t-2)\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times(t-2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}(4-t),$$

$$\text{即 } S=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2+\sqrt{3};$$

第二种情况：如图 3， $\sqrt{3}<t<4$ 时，



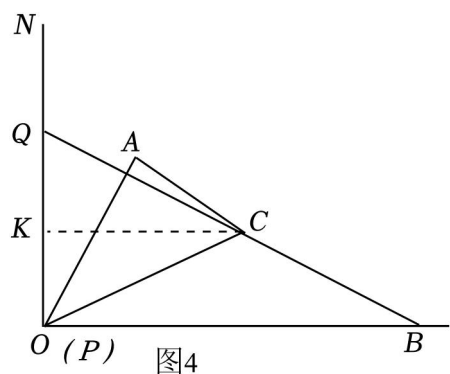
$$S_{\triangle CPQ}=S_{\triangle COQ}-S_{\triangle OQP}$$

$$=\frac{1}{2}(t-2)\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}(t-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(4-t),$$

$$\text{即 } S=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2+\sqrt{3},$$

$$\text{即 } S=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2+\sqrt{3} \quad (2<t<4);$$

④当 $t=4$ 时， P 在 O 点， Q 在 ON 上，如图 (3)



过 C 作 $CK \perp ON$ 于 K ,

$\because \angle B = 30^\circ$, 由 (1) 知 $BC = 2$,

$$\therefore OK = \frac{1}{2}BC = 1,$$

有勾股定理得: $CK = \sqrt{3}$,

$$\therefore S = \frac{1}{2}PQ \times CK = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3};$$

$$\text{综合上述: } S \text{ 与 } t \text{ 的函数关系式是: } S = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t & (0 < t < 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \sqrt{3} & (2 < t < 4) \\ \sqrt{3} & (t = 4) \end{cases};$$

(3) 解: 如图 (2), $\because ON \perp OB$,

$\therefore \angle NOB = 90^\circ$,

$\because \angle B = 30^\circ$, $\angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 30^\circ$,

$\therefore \angle NOC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

① $OM = PM$ 时,

$\angle MOP = \angle MPO = 30^\circ$,

$\therefore \angle PQO = 180^\circ - \angle QOP - \angle MPO = 90^\circ$,

$\therefore OP = 2OQ$,

$\therefore 2(t - 2) = 4 - t$,

解得: $t = \frac{8}{3}$,

② $PM=OP$ 时,

此时 $\angle PMO = \angle MOP = 30^\circ$,

$\therefore \angle MPO = 120^\circ$,

$\because \angle QOP = 60^\circ$,

$\therefore$ 此时不存在;

③ $OM=OP$ 时,

过 P 作 $PG \perp ON$ 于 G ,

$OP = 4 - t$, $\angle QOP = 60^\circ$,

$\therefore \angle OPG = 30^\circ$,

$\therefore GO = \frac{1}{2}(4 - t)$, $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - t)$,

$\because \angle AOC = 30^\circ$, $OM = OP$,

$\therefore \angle OPM = \angle OMP = 75^\circ$,

$\therefore \angle PQO = 180^\circ - \angle QOP - \angle QPO = 45^\circ$,

$\therefore PG = QG = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - t)$,

$\because OG + QG = OQ$,

$\therefore \frac{1}{2}(4 - t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - t) = t - 2$,

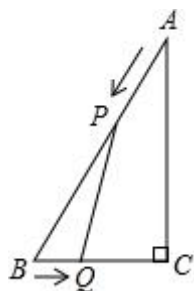
解得: $t = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

综合上述: 当 t 为 $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ 时, $\triangle OPM$ 是等腰三角形.

30. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, 动点 P 、 Q 同时从 A 、 B 两点出发, 分别在 AB 、 BC 边上匀速移动, 它们的速度分别为 $V_P = 2\text{cm/s}$, $V_Q = 1\text{cm/s}$, 当点 P 到达点 B 时, P 、 Q 两点同时停止运动, 设点 P 的运动时间为 $t\text{s}$.

(1) 当 t 为何值时, $\triangle PBQ$ 为等边三角形?

(2) 当 t 为何值时, $\triangle PBQ$ 为直角三角形?



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318103002072006103>