

长春市 2024 届高三质量监测（三）

数学

本试卷共 5 页. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项: 1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区.

2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂, 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚.

3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效.

4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.

5. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 经过 $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(0,2)$ 三个点的圆的方程为 ()

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$

D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】设经过 A, B, C 三个点的圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$, 代入三点坐标可得答案.

【详解】设经过 A, B, C 三个点的圆的方程为

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0),$$

$$\text{由题意可得} \begin{cases} 1+1+D+E+F=0 \\ 1+1-D+E+F=0 \\ 0+4+2E+F=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} D=0 \\ E=-2 \\ F=0 \end{cases},$$

且满足 $D^2 + E^2 - 4F = 4 > 0$,

所以经过 A, B, C 三个点的圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

即为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

故选: C.

2. 已知向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (3, -1)$, 则“ $k = \sqrt{2}$ ”是“ $(\vec{a} + k\vec{b}) \perp (\vec{a} - k\vec{b})$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】计算 $\begin{pmatrix} 1 \\ a+kb \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ a-kb \end{pmatrix}$ 时 k 的取值，再根据必要与充分条件的定义判断即可.

【详解】当 $\begin{pmatrix} 1 \\ a+kb \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ a-kb \end{pmatrix}$ 时， $\begin{pmatrix} 1 \\ a+kb \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a-kb \end{pmatrix} = 0$ ，即 $a^2 - k^2 b^2 = 0$ ，

故 $(2^2 + 4^2) - k^2 [3^2 + (-1)^2] = 0$ ，解得 $k = \pm\sqrt{2}$.

故“ $k = \sqrt{2}$ ”是“ $\begin{pmatrix} 1 \\ a+kb \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ a-kb \end{pmatrix}$ ”的充分不必要条件.

故选：A

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ f(x+2), & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $f(-3) = (\quad)$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】根据分段函数解析式，代入求值即可.

【详解】由函数可得， $f(-3) = f(-1) = f(1) = 2^1 = 2$.

故选：B.

4. 酒驾是严重危害交通安全的违法行为. 为了保障交通安全，根据国家有关规定：100mL 血液中酒精含量达到 20~79mg 的驾驶员即为酒后驾车，80mg 及以上认定为醉酒驾车. 假设某驾驶员喝了一定量的酒后，其血液中的酒精含量上升到了 0.6mg/mL. 如果停止喝酒以后，他血液中酒精含量会以每小时 30% 的速度减少，那么他至少经过几个小时才能驾驶？() (结果取整数，参考数据：

$\lg 3 \approx 0.48, \lg 7 \approx 0.85$)

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】设经过 x 个小时才能驾驶，则 $0.6 \times 100 \times (1 - 30\%)^x < 20$ ，再根据指数函数的性质及对数的运算计算可得.

【详解】设经过 x 个小时才能驾驶，则 $0.6 \times 100 \times (1 - 30\%)^x < 20$ 即 $0.7^x < \frac{1}{3}$.

由于 $y = 0.7^x$ 在定义域上单调递减, $x > \log_{0.7} \frac{1}{3} = \frac{\lg \frac{1}{3}}{\lg 0.7} = \frac{\lg 1 - \lg 3}{\lg 7 - 1} = \frac{-0.48}{0.85 - 1} = \frac{0.48}{0.15} = 3.2$.

他至少经过 4 小时才能驾驶.

故选: D.

5. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 3$, $z_1 + z_2 = 2 - \sqrt{5}i$, 则 $|z_1 - z_2| = (\quad)$

- A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】设出对应复数, 利用复数的运算性质整体代值运算即可.

【详解】设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, 且 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

由已知得 $|z_1| = |z_2| = 3$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2} = 3$, 得 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 9$,

又 $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i = 2 - \sqrt{5}i$,

故 $a + c = 2$, $b + d = -\sqrt{5}$,

同时平方得 $a^2 + 2ac + c^2 = 4$, $b^2 + 2bd + d^2 = 5$,

相加并化简得 $2ac + 2bd = -9$,

而 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2 - (4ac + 4bd)}$,

$= \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2 - 2(2ac + 2bd)} = \sqrt{9 - 2 \times (-9)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

故选: D

6. 为了迎接 2025 年第九届亚冬会的召开, 某班组织全班学生开展有关亚冬会知识的竞赛活动. 已知该班男生 35 人, 女生 25 人. 根据统计分析, 男生组成绩和女生组成绩的方差分别为 s_1^2 、 s_2^2 , 该班成绩的方差为 s^2 , 则下列结论中一定正确的是 ()

- A. $s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$ B. $s^2 \geq \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$
- C. $s^2 = \frac{7s_1^2 + 5s_2^2}{12}$ D. $s^2 \geq \frac{7s_1^2 + 5s_2^2}{12}$

【答案】D

【解析】

【分析】借助分层抽样的方差公式计算即可得.

【详解】设该班男生组成绩和女生组成绩的平均分分别为 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, 两个班的总的平均分为 $\bar{x}$,

$$\text{则 } s^2 = \frac{35}{35+25} \left[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2 \right] + \frac{25}{35+25} \left[s_2^2 + (\bar{x} - \bar{x}_2)^2 \right]$$

$$s^2 = \frac{7 \left[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2 \right]}{12} + \frac{5 \left[s_2^2 + (\bar{x} - \bar{x}_2)^2 \right]}{12} \geq \frac{7s_1^2 + 5s_2^2}{12},$$

故选: D.

7. 已知随机事件 A , B 满足 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{7}{16}$, 则 $P(B) =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{16}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{41}{48}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据已知结合条件概率公式, 即可得出 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{7}{48}$, 进而推得 $P(\bar{A}B) = \frac{3}{16}$. 即可根据条件概率公式, 得出答案.

【详解】由已知可得, $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A)} = \frac{7}{16}$.

因为 $P(A) = \frac{1}{3}$,

所以, $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{7}{48}$.

又 $P(A) = P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{3}$,

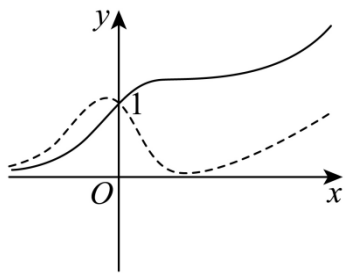
所以, $P(\bar{A}B) = \frac{3}{16}$.

又 $P(A|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{3}{4}$,

所以, $P(B) = \frac{1}{4}$.

故选: A.

8. 在同一平面直角坐标系内, 函数 $y = f(x)$ 及其导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 已知两图象有且仅有一个公共点, 其坐标为 $(0, 1)$, 则 ()



A. 函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 的最大值为 1

B. 函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 的最小值为 1

C. 函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的最大值为 1

D. 函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的最小值为 1

【答案】C

【解析】

【分析】AB 选项，先判断出虚线部分为 $y = f'(x)$ ，实线部分为 $y = f(x)$ ，求导得到 $y = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，AB 错误；再求导得到 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减，故 C 正确，D 错误.

【详解】AB 选项，由题意可知，两个函数图像都在 x 轴上方，任何一个为导函数，则另外一个函数应该单调递增，判断可知，虚线部分为 $y = f'(x)$ ，

实线部分为 $y = f(x)$ ，

故 $y' = f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = (f'(x) + f(x)) \cdot e^x > 0$ 恒成立，

故 $y = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，则 A，B 显然错误，

对于 C，D， $y' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

由图像可知 $x \in (-\infty, 0)$ ， $y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$ 恒成立，故 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增，

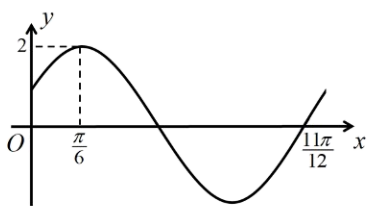
当 $x \in (0, +\infty)$ ， $y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$ ， $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减，

所以函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $x = 0$ 处取得极大值，也为最大值， $\frac{f(0)}{e^0} = 1$ ，C 正确，D 错误.

故选：C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则 ()



- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 满足 $f(x) + f\left(\frac{5\pi}{3} - x\right) = 0$
- C. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 的值域为 $[-1, \sqrt{3}]$
- D. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上有 3 个极值点

【答案】AD

【解析】

【分析】根据图象确定 A 和周期，再确定 ω ，代入最值点确定 φ ，从而得出解析式，再由正弦函数的图象与性质逐项判断即可．

【详解】由图象可知， $A = 2, \frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3T}{4}$ ，所以 $T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，故 A 正确；

又因为 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

而且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以函数解析式为 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ．

所以

$$f(x) + f\left(\frac{5\pi}{3} - x\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left[2\left(\frac{5\pi}{3} - x\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \text{ 故}$$

B 错误；

对于 C，当 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ ，所以 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [-1, \frac{1}{2}]$ ，所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$

的值域为 $[-2, 1]$ ，故 C 错误；

对于 D, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}\right)$, 当 $2x + \frac{\pi}{6}$ 取得 $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得极值, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上有 3 个极值点, 故 D 正确.

故选: AD.

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 并且满足条件 $a_1 > 1$, $a_7 a_8 > 1$, $\frac{a_7 - 1}{a_8 - 1}$

< 0 . 则下列结论正确的是 ()

A. $0 < q < 1$

B. $a_7 a_9 < 1$

C. T_n 的最大值为 T_7

D. S_n 的最大值为 S_7

【答案】ABC

【解析】

【分析】依题意可得 $a_1 > 1$, $0 < q < 1$, 进而可得结果.

【详解】 $\because a_1 > 1$, $a_7 a_8 > 1$, $\frac{a_7 - 1}{a_8 - 1} < 0$, $\therefore a_7 > 1$, $0 < a_8 < 1$, $\therefore 0 < q < 1$, 故 A 正确;

$a_7 a_9 = a_8^2 < 1$, 故 B 正确;

因为 $a_7 > 1$, $0 < a_8 < 1$, 所以 T_7 是 T_n 中的最大项, 故 C 正确;

因为 $a_1 > 1$, $0 < q < 1$, 所以 S_n 无最大值, 故 D 错误.

故选: ABC.

11. 某圆锥的侧面展开图是圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 面积为 3π 的扇形, 则 ()

A. 该圆锥的母线与底面所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. 若该圆锥内部有一个圆柱, 且其一个底面落在圆锥的底面内, 则当圆柱的体积最大时, 圆柱的高为 $\frac{2}{3}$

C. 若该圆锥内部有一个球, 则当球的半径最大时, 球的内接正四面体的棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 若该圆锥内部有一个正方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$, 且底面 $ABCD$ 在圆锥的底面内, 当正方体的棱长最大

时, 以 A 为球心, 半径为 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 的球与正方体表面交线的长度为 $\frac{5\sqrt{6}}{9}\pi$

【答案】ACD

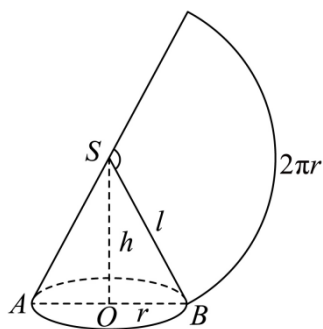
【解析】

【分析】先根据圆锥侧面积公式 $S_{\text{侧}} = \pi r l$ 和扇形弧长公式得出圆锥的母线长 $l = 3$ 、底面半径 $r = 1$ 和高 $h = 2\sqrt{2}$ 即可求出圆锥的母线与底面所成角 θ 正弦值，进而判断 A；根据三角形相似比得出圆柱高与其底面半径比的关系，再代入圆柱体积公式 $V_{\text{柱}} = \pi r_1^2 h_1$ 得到 $V_{\text{柱}} = 2\sqrt{2}\pi(r_1^2 - r_1^3)$ ，再利用导数工具求出最值即可突破求解进而判断 B；CD 属于简单几何体的接切和相交问题，要结合相应几何体的结构特征和关系进行分析判断，具体看详解。

【详解】对于 A，由圆锥侧面积公式 $S_{\text{侧}} = \pi r l$ 和扇形弧长公式得
$$\begin{cases} \pi r l = 3\pi, \\ 2\pi r = \frac{2\pi}{3} l, \end{cases}$$

$\Rightarrow l = 3, r = 1$ ，所以圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，

设圆锥的母线与底面所成角 θ ，则 $\sin \theta = \frac{h}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，故 A 对；



对于 B，设圆锥内切圆柱底面半径为 $r_1 [r_1 \in (0, 1)]$ ，高为 h_1 ，

则有 $\frac{h - h_1}{h} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow h_1 = \frac{h(r - r_1)}{r} = \frac{2\sqrt{2}(1 - r_1)}{1} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r_1$ ，

所以圆柱体积为 $V_{\text{柱}} = \pi r_1^2 h_1 = \pi r_1^2 (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r_1) = 2\sqrt{2}\pi(r_1^2 - r_1^3)$ ，

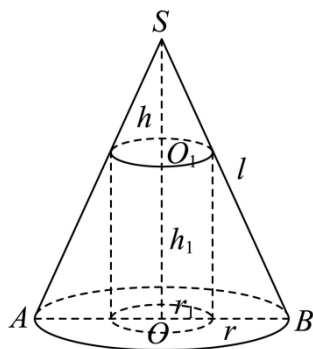
设 $y = x^2 - x^3 [x \in (0, 1)]$ ，则 $y' = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) [x \in (0, 1)]$ ，

所以当 $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ 时 $y' > 0$ ， $y = x^2 - x^3 [x \in (0, 1)]$ 单调递增；当 $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 时 $y' < 0$ ，

$y = x^2 - x^3 [x \in (0, 1)]$ 单调递减，

所以 $x = \frac{2}{3}$ 时 y 取得最大值，即 $r_1 = \frac{2}{3}$ 时圆柱体积取得最大，此时圆柱的高 $h_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，故

B 错。

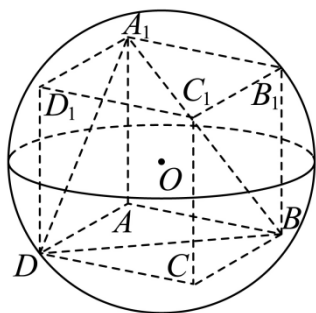


对于 C，当球的半径最大时，球为圆锥的内切球，设球的半径设为 R ，此时圆锥与球的轴截面如图，

$$\text{因为 } S_{V_{SAB}} = \frac{1}{2} \times |AB| \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{又 } S_{V_{SAB}} = \frac{R}{2} \times (SA + SB + AB) = \frac{R}{2} \times (2l + 2r) = 4R, \text{ 所以 } 4R = 2\sqrt{2}, \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

正四面体可由正方体面的对角线切割得到，如图，正四面体外接球与相对应正方体外接球为同一个球，

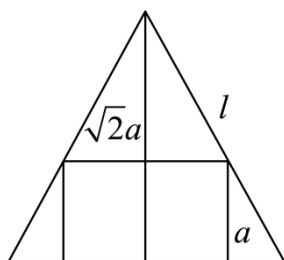


当正四面体的棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，其相对应的正方体棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

$$\text{所以外接球直径为 } 2R = \sqrt{3 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{2}, \text{ 所以外接球半径为 } R = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以该圆锥内部有一个球，则当球的半径最大时，球的内接正四面体的棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，故 C 对；

对于 D，设圆锥内接最大正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 a ，则沿着正方体体对角面作圆锥轴截面得到截面图如下，



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318110127026006063>