山东省实验中学2024-2025学年高三上学期11月期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x\left|x^2-\sqrt{2}x-4\leq 0\right.\right\}$，则 $A\cap\mathbf{N}=$（　）

A．$\{0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2\}$

2．若复数 $z=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{6+8\mathrm{i}}$，则 $|z|+|\bar{z}|=$（　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

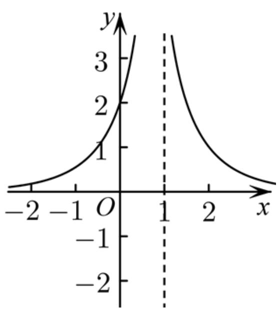
3．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是单位向量，则 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值是（　）

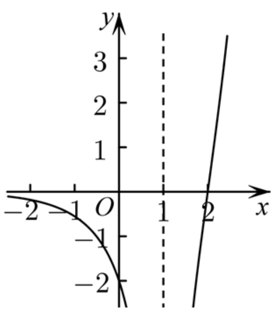
A．-1　　B．0　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．1

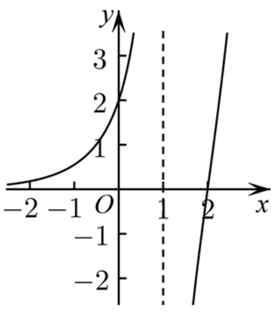
4．已知 $2\cos(2\alpha+\beta)-3\cos\beta=0$，则 $\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)=$（　）

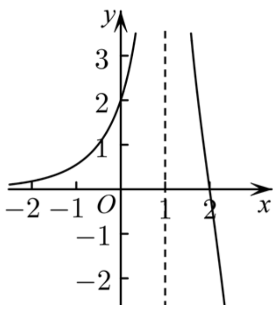
A．5　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．-5　　D．$-\dfrac{1}{5}$

5．函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x-1}$ 的图象大致是（　）

A．

B．

C．

D．

6．函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\sin x$ 的零点个数为（　）

A．1　　B．0　　C．3　　D．2

7．任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2，反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 1→4→2→1．这就是数学史上著名的"冰雹猜想"（又称"角谷猜想"等）．如取正整数 $m=6$，根据上述运算法则得出 6→3→10→5→16→8→4→2→1，共需经过 8 个步骤变成 1（简称为 8 步"雹程"）．现给出冰雹猜想的递推关系如下：已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=m$（m 为正整数），

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},当a_n为偶数时\\3a_n+1,当a_n为奇数时\end{cases}$$，则当 $m=42$ 时，则使 $a_n=1$ 需要的雹程步数为（　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

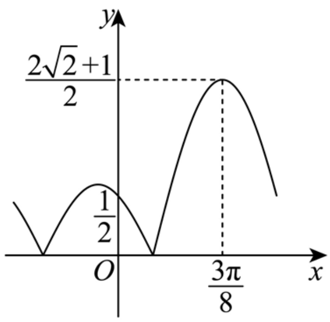
8．已知定义域为 **R** 的函数 $f\left(x\right)$，其导函数为 $f'\left(x\right)$，且满足 $f'(x)-2f\left(x\right)<0$，$f\left(0\right)=1$，则（　）

A．$e^2f\left(-1\right)<1$　　B．$f\left(1\right)>e^2$

C．$f\left(\frac{1}{2}\right)>e$　　D．$f\left(1\right)<ef\left(\frac{1}{2}\right)$

二、多选题

9．已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(0<\omega\le 2,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，函数 $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+\frac{1}{2}\right|$ 的部分图象如图所示，则下列说法中正确的是（　）



A．$f\left(x\right)$ 的表达式可以写成 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

B．$f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度后得到的新函数是奇函数

C．$h\left(x\right)=f\left(x\right)+1$ 的对称中心 $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},1\right),k\in Z$

D．若方程 $f\left(x\right)=1$ 在 $(0,m)$ 上有且只有 6 个根，则 $m\in\left(\frac{5\pi}{2},\frac{13\pi}{4}\right]$

10．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_n=2n+1,b_n=2^n$ 则（　）

A．$\left\{a_nb_n\right\}$ 的前 10 项和为 $19\times2^{10}+2$

B．$\left\{(-1)^na_n\right\}$ 的前 100 项和为 100

C．$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n,T_n<\frac{1}{6}$

D．$\left\{a_n+\frac{64}{a_n}\right\}$ 的最小项为 $16\frac{1}{7}$

11．已知奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f'\left(x\right)=g\left(x\right)$，$g'\left(x\right)=f\left(x\right)$，若 $f\left(2x\right)=2f\left(x\right)g\left(x\right)$，则（　）

A．$g\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

B．$g\left(2x\right)=g^2\left(x\right)+f^2\left(x\right)$

C．$g\left(0\right)=0$ 或 1

D．$g^2\left(x\right)-f^2\left(x\right)=1$

三、填空题

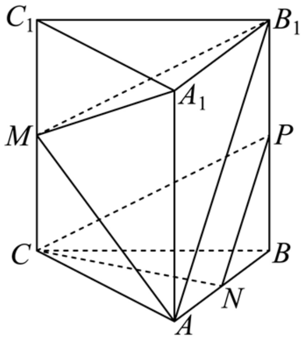
12．已知向量 $\vec{a}=\left(\sin\theta,\cos\theta\right)$，$\vec{b}=\left(3,1\right)$，若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则 $\sin^2\theta+\sin2\theta$ 的值为_____.

13．已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积为 $6\sqrt{3}$，则该正三棱柱外接球的体积的最小值为______.

14．设 $k>0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_4x-k\cdot2^{kx-1}\geq0$ 成立，则 k 的最大值为______.

四、解答题

15．如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC=CC_1,M,N,P$ 分别是 CC_1,AB,BB_1 的中点.



(1)求证：平面 $NPC//$ 平面 AB_1M .

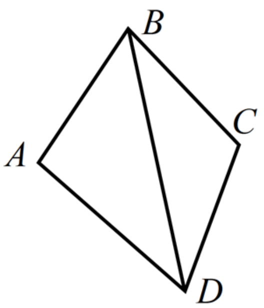
(2)在线段 BB_1 上是否存在一点 Q，使 $AB_1\perp$ 平面 A_1MQ？若存在，确定点 Q 的位置；若不存在，也请说明理由.

16．函数 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$ 的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=ax-a-3, a\in\mathbf{R}$.

(1)求 λ 的值；

(2)求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上零点的个数.

17. 平面多边形中，三角形具有稳定性，而四边形不具有这一性质．如图所示，四边形 $ABCD$ 的顶点在同一平面上，已知 $AB=BC=CD=2, AD=2\sqrt{3}$.



(1)当 BD 长度变化时，$\sqrt{3}\cos A-\cos C$ 是否为一个定值？若是，求出这个定值；若否，说明理由.

(2)记 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，请求出 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.

18．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{(x+a)^2}{e^x}$.

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)设 m,n 分别是 $f\left(x\right)$ 的极小值点和极大值点，记 $M\left(m,f\left(m\right)\right),N\left(n,f\left(n\right)\right)$.

（i）证明：直线 MN 与曲线 $y=f\left(x\right)$ 交于除 M,N 外另一点 P；

（ii）在（i）结论下，判断是否存在定值$t\in(a,a+1)$且$a\in Z$，使$|MN|=t|PN|$，若存在，请求出a的值；若不存在，请说明理由.

19．对于数列$\{a_n\}$，如果存在等差数列$\{b_n\}$和等比数列$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则称数列$\{a_n\}$是“优分解”的.

(1)证明：如果$\{a_n\}$是等差数列，则$\{a_n\}$是“优分解”的.

(2)记$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$，$\Delta^2 a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，证明：如果数列$\{a_n\}$是“优分解”的，则$\Delta^2 a_n=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$或数列$\{\Delta^2 a_n\}$是等比数列.

(3)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，如果$\{a_n\}$和$\{S_n\}$都是“优分解”的，并且$a_1=3$，$a_2=4$，$a_3=6$，求$\{a_n\}$的通项公式.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	D	D	C	A	B	D	ABD	BC
题号	11									
答案	ABD									

1．C

【分析】先确定集合A，再求交集$A\cap \mathbf{N}$.

【详解】根据题意，$A=\left\{x\left|x^2-\sqrt{2}x-4\le 0\right.\right\}=\left\{x\left|-\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}\right.\right\}$，

所以$A\cap \mathbf{N}=\left\{0,1,2\right\}$.

故选：C

2．B

【分析】利用复数的运算对复数z化简，再求$|z|,|\overline{z}|$，即可求解.

【详解】由$z=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{6+8\mathrm{i}}=\dfrac{(-2\mathrm{i})\times(6-8\mathrm{i})}{(6+8\mathrm{i})\times(6-8\mathrm{i})}=\dfrac{-16-12\mathrm{i}}{100}=-\dfrac{4}{25}-\dfrac{3}{25}\mathrm{i}$，

则$\overline{z}=-\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}\mathrm{i}$，

则$|z|=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{25}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{25}\right)^2}=\dfrac{1}{5}=|\overline{z}|$，

因此$|z|+|\overline{z}|=\dfrac{2}{5}$，

故选：B.

3．D

【分析】设$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\theta\in[0,\pi]$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta\in[-1,1]$，结合数量积的运算律分析求解.

【详解】设$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\theta\in[0,\pi]$，

因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=\cos\theta\in[-1,1]$，

可得$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=2+\cos\theta\ge 1$，当且仅当$\cos\theta=-1$时，等号成立，

所以$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值是1.

故选：D.

4．D

【分析】由角的变换$2\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+\beta),\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，利用余弦的和，差角公式和展开，从而可得答案.

【详解】$2\cos(2\alpha+\beta)=3\cos\beta$，则$2\cos(\alpha+\beta+\alpha)=3\cos(\alpha+\beta-\alpha)$

则$2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$,，

即$-5\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$，所以$-5\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=1$，

$\therefore\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=-\frac{1}{5}$，

故选：D

5．C

【分析】根据函数符号，单调性即可判断.

【详解】对于$f(x)=\frac{e^x(x-2)}{x-1}$，当$x<0$时，$f(x)>0$，故B错误；

$f'(x)=\frac{x^2-3x+3}{(x-1)^2}e^x=\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{(x-1)^2}e^x$，显然在定义域内$f'(x)>0$，

即在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$都是增函数，C正确，AD错误；

故选：C.

6．A

【分析】利用导数判断函数的单调性，结合$f(0)=0$，即可判断出答案.

【详解】由$\frac{1+x}{1-x}>0$，可得$-1<x<1$，即定义域为$(-1,1)$，

所以$f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1-x}{1+x}\times\frac{2}{(1-x)^2}-\cos x=\frac{1}{1-x^2}-\cos x$，

由于$1-x^2\in(0,1]$，故$\frac{1}{1-x^2}-\cos x\geq0$，

即$f'(x)\geq0$，当且仅当$x=0$时取等号，

即$f(x)$在$(-1,1)$上为单调递增函数，又$f(0)=0$，

所以$f(x)$仅有一个零点.

故选：A.

7．B

【分析】直接利用递推关系逐步计算可得$a_n=1$使得需要多少步雹程.

【详解】解：根据题意，当$m=42$，根据上述运算法则得出$42\to21\to64\to32\to16\to8\to4\to2\to1$，

所以共需经过 8 个步骤变成 1，故使$a_n=1$需要的雹程步数为 8.

故选：B

8．D

【分析】构造函数$g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\mathrm{e}^{2x}}$，由$f'\left(x\right)-2f\left(x\right)<0$得$g'\left(x\right)<0$，进而判断函数$g\left(x\right)$的单调性，判断各选项不等式.

【详解】依题意令$g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\mathrm{e}^{2x}}$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x\right)\cdot\mathrm{e}^{2x}-2f\left(x\right)\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2}=\dfrac{f'\left(x\right)-2f\left(x\right)}{\mathrm{e}^{2x}}$，

因为$f'\left(x\right)-2f\left(x\right)<0$在$\mathrm{R}$上恒成立，

所以$g'\left(x\right)<0$在R上恒成立，

故$g\left(x\right)$在R上单调递减，

所以$g\left(-1\right)>g\left(0\right)$，$\dfrac{f\left(-1\right)}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^2f\left(-1\right)>\dfrac{f\left(0\right)}{\mathrm{e}^0}=1$，故 A 不正确；

所以$g\left(1\right)<g\left(0\right)$，即$\dfrac{f\left(1\right)}{\mathrm{e}^2}<\dfrac{f\left(0\right)}{\mathrm{e}^0}$，即$f\left(1\right)<\mathrm{e}^2f\left(0\right)=\mathrm{e}^2$，故 B 不正确；

又$g\left(\dfrac{1}{2}\right)<g\left(0\right)$，即$\dfrac{f\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\mathrm{e}^1}<\dfrac{f\left(0\right)}{\mathrm{e}^0}=1$，即$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<\mathrm{e}$，故 C 错误；

因为$g\left(\dfrac{1}{2}\right)>g\left(1\right)$，即$\dfrac{f\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\mathrm{e}^1}>\dfrac{f\left(1\right)}{\mathrm{e}^2}$，即$f\left(1\right)<\mathrm{e}f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，故 D 正确；

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题解答的关键是根据题意构造函数$g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\mathrm{e}^{2x}}$，利用导数说明函数的单调性，即可比较函数值的大小.

9．ABD

【分析】对于 A，可以由两个特值$f\left(0\right)=-1$；$f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$得到$\omega$和$\varphi$；

对于 B，求出平移后的函数解析式，结合正弦函数性质判断；

对于 C，结合正弦型函数的性质求对称中心判断；

对于 D，结合图象列不等式$\dfrac{19}{4}\pi<2m-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{25}{4}\pi$，解不等式判断 D.