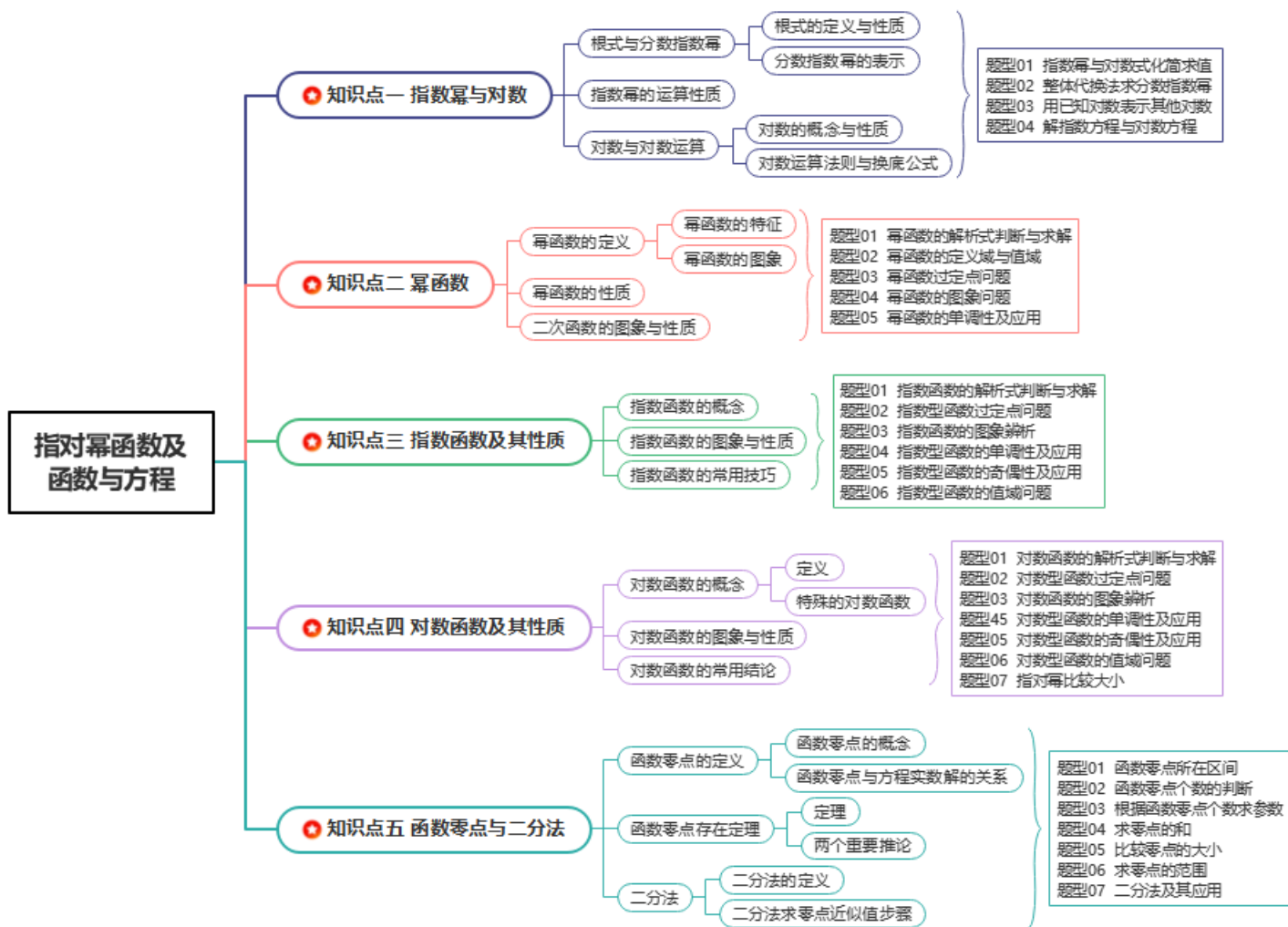


专题 04 指对幂函数及函数与方程

(思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧+易混易错)

思维构建 · 理清脉络



知识盘点 · 查漏补缺

知识点 1 指数幂与对数

1、根式与分数指数幂

(1) 根式的定义：一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n > 1$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$ 。

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数， a 叫做被开方数。

(2) 根式的性质 ($n > 1$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$)： $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ； $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a, n \text{ 为奇数,} \\ |a|, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(3) 分数指数幂的表示

正分数指数幂：规定： $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1)$

负分数指数幂：规定： $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \ (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1)$

性质：0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

2、指数幂的运算性质

(1) 无理数指数幂：一般地，无理数指数幂 a^α ($a > 0$, α 为无理数) 是一个确定的实数。

有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂。

(2) 指数幂的运算性质

$$\textcircled{1} a^r a^s = a^{r+s} \ (a > 0, r, s \in \mathbf{R}). \quad \textcircled{2} (a^r)^s = a^{rs} \ (a > 0, r, s \in \mathbf{R}). \quad \textcircled{3} (ab)^r = a^r b^r \ (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{R}).$$

3、对数与对数运算

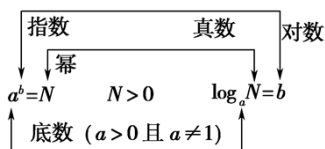
(1) 对数的概念：如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)，那么数 x 叫做以 a 为底数 N 的对数，记作 $x = \log_a N$ ，其中 a 叫做对数的底数， N 叫做真数， $\log_a N$ 叫做对数式。

(2) 对数的性质

对数式与指数式的互化： $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)；

$$\textcircled{1} \log_a 1 = 0, \quad \textcircled{2} \log_a a = 1, \quad \textcircled{3} a \log_a N = N, \quad \textcircled{4} \log_a a^N = N \ (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1).$$

指数式与对数式的关系



(3) 对数的运算法则与换底公式：如果 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

$$\text{运算法则: } \textcircled{1} \log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N \quad \textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad \textcircled{3} \log_a M^n = n \log_a M \ (n \in \mathbf{R})$$

$$\text{换底公式: } \textcircled{1} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1, \ c > 0, \text{ 且 } c \neq 1, \ b > 0),$$

选用换底公式时，一般选用 e 或 10 作为底数。

$$\textcircled{2} \text{换底公式的三个重要结论: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_{am} b^n = \frac{n}{m} \log_a b; \quad \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d =$$

$\log_a d$.

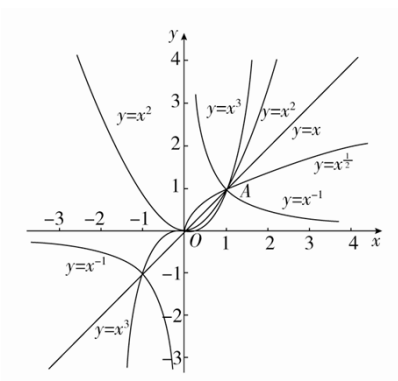
知识点 2 幂函数及其性质

1、幂函数的定义：一般地，函数 $y = x^\alpha$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量， α 是常数。

(1) 幂函数的特征： x^α 的系数是 1； x^α 的底数 x 是自变量； x^α 的指数 α 为常数。

只有满足这三个条件，才是幂函数。对于形如 $y = (2x)^\alpha$, $y = 2x^5$, $y = x^\alpha + 6$ 等的函数都不是幂函数。

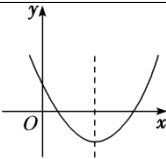
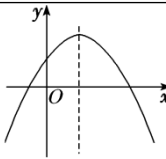
(2) 幂函数的图象：同一坐标系中，幂函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象(如图)。



2、幂函数的性质

- (1) 所有的幂函数在 $(0, +\infty)$ 上都有定义，并且图象都过点 $(1, 1)$ ；
- (2) 如果 $\alpha > 0$ ，那么幂函数的图象过原点，并且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增；
- (3) 如果 $\alpha < 0$ ，那么幂函数的图象在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减，在第一象限内，当 x 从右边趋向于原点时，图象在 y 轴右方无限接近 y 轴，当 x 从原点趋向于 $+\infty$ 时，图象在 x 轴上方无限接近 x 轴；
- (4) 在 $(1, +\infty)$ 上，随幂指数的逐渐增大，图象越来越靠近 y 轴。

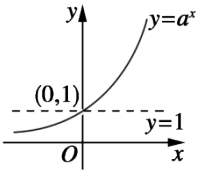
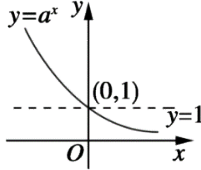
2、二次函数的图象和性质

函数	$y = ax^2 + bx + c (a > 0)$	$y = ax^2 + bx + c (a < 0)$
图象(抛物线)		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$	$\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$	
奇偶性	当 $b = 0$ 时是偶函数，当 $b \neq 0$ 时是非奇非偶函数	
单调性	在 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是减函数； 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是增函数	在 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是增函数； 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是减函数

知识点 3 指数函数及其性质

- 1、指数函数的概念：一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，定义域是 $\mathbf{R}$ ， a 是指数函数的底数。

2、指数函数的图象与性质

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图象			
图像特征		在 x 轴的上方，过定点 $(0,1)$	
		当 x 逐渐增大时，图象逐渐上升	当 x 逐渐增大时，图象逐渐下降
性质	定义域	$\mathbf{R}$	
	值域	$(0, +\infty)$	
	单调性	在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
	奇偶性	非奇非偶函数	
	范围	当 $x < 0$ 时， $0 < y < 1$ ； 当 $x > 0$ 时， $y > 1$ ；	当 $x < 0$ 时， $y > 1$ ； 当 $x > 0$ 时， $0 < y < 1$ ；

3、指数函数的常用技巧

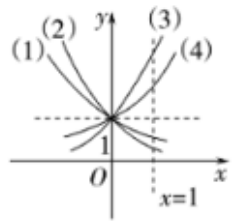
(1) 当底数大小不定时，必须分“ $a > 1$ ”和“ $0 < a < 1$ ”两种情况讨论；

(2) 指数函数的图象与底数大小的比较

如图是指数函数 (1) $y = a^x$ ；(2) $y = b^x$ ；(3) $y = c^x$ ；(4) $y = d^x$ 的图象，

底数 a, b, c, d 与 1 的之间的大小关系为 $c > d > 1 > a > b$ ；

规律：在 y 轴右（左）侧图象越高（低），其底数越大。



(3) 指数函数 $y = a^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称。

知识点 4 对数函数及其性质

1、对数函数的概念

(1) 定义：函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域为 $(0, +\infty)$ 。

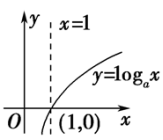
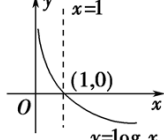
(2) 特殊的对数函数

①常用对数函数：以 10 为底的对数函数 $y = \lg x$ 。

②自然对数函数：以无理数 e 为底的对数函数 $y = \ln x$ 。

2、对数函数的图象与性质

图象	$a > 1$	$0 < a < 1$
----	---------	-------------

		
性质	定义域: $(0, +\infty)$	
	值域: $\mathbf{R}$	
	当 $x=1$ 时, $y=0$, 即过定点 $(1,0)$	
	当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y > 0$	当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y < 0$
	在 $(0, +\infty)$ 上为增函数	在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

3、对数函数图象的常用结论

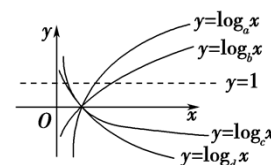
(1) 函数 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象 x 轴对称;

(2) 对数函数的图象与底数大小的关系

如图, 作直线 $y=1$, 则该直线与四个函数图象交点的横坐标为相应的底数,

故 $0 < c < d < 1 < a < b$.

由此我们可得到以下规律: 在第一象限内从左到右底数逐渐增大.



知识点 5 函数零点与二分法

1、函数零点的定义

(1) 函数零点的概念: 对于函数 $y=f(x)(x \in D)$, 把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x \in D)$ 的零点.

(2) 函数零点与方程实数解的关系

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

【注意】函数的零点不是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点, 而是交点的横坐标, 也就是说函数的零点不是一个点, 而是一个数.

2、函数零点存在定理

(1) 定理: 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么, 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

(2) 两个重要推论

推论 1: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 且 $f(x)$ 具有单调性, 则函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内只有一个零点.

推论 2: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 且函数 $f(x)$ 具有单调性, 则 $f(a) \cdot f(b) < 0$

3、二分法

(1) 二分法的定义: 对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断且 $f(a)f(b) < 0$ 的函数 $y=f(x)$, 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二, 使区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

(2) 给定精确度 ε , 用二分法求函数 $y=f(x)$ 零点 x_0 的近似值的步骤

①确定零点 x_0 的初始区间 $[a, b]$, 验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$

②求区间 (a, b) 的中点 c

③计算 $f(c)$, 进一步确定零点所在的区间:

若 $f(c)=0$ (此时 $x_0=c$), 则 c 就是函数的零点;

若 $f(a) \cdot f(c) < 0$ (此时 $x_0 \in (a, c)$), 则令 $b=c$;

若 $f(c) \cdot f(b) < 0$ (此时 $x_0 \in (c, b)$), 则令 $a=c$.

④判断是否达到精确度 ε : 若 $|a-b| < \varepsilon$, 则得到零点近似值 a (或 b); 否则重复(2)~(4)

【注意】初始区间的确定要包含函数的变号零点;



重难点 01 指数型复合函数的值域

1、形如 $y=f(a^x)$ ($a>0$, 且 $a \neq 1$)的函数求值域

换元法: 令 $a^x=t$, 将求原函数的值域转化为求 $f(t)$ 的值域, 但要注意“新元 t ”的范围

2、形如 $y=a^{f(x)}$ ($a>0$, 且 $a \neq 1$)的函数求值域

换元法: 令 $\mu=f(x)$, 先求出 $\mu=f(x)$ 的值域, 再利用 $y=a^\mu$ 的单调性求出 $y=a^{f(x)}$ 的值域。

【典例 1】(2024·贵州·模拟预测) 已知函数 $f(x)=2^{-x^2+2x+3}$, 则 $f(x)$ 的最大值是_____.

【答案】16

【解析】由 $f(x)=2^{-x^2+2x+3}$, 而 $t=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4 \leq 4$,

因为 $y=2^t$ 单调递增, 所以 $y=2^t \leq 2^4$, 则 $f(x)$ 的最大值是 16.

【典例 2】(23-24 高三上·福建福州·期中) 函数 $y=\frac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2}$ 的值域为_____.

【答案】 $(-1,1)$

【解析】因为 $y = \frac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2} = \frac{(e^{3x}+2)-4}{e^{3x}+2} = 1 + \frac{-4}{e^{3x}+2}$,

又 $e^{3x} > 0$, 所以 $e^{3x}+2 > 2$, 所以 $0 < \frac{1}{e^{3x}+2} < \frac{1}{2}$, 所以 $-2 < \frac{-4}{e^{3x}+2} < 0$,

所以 $-1 < 1 + \frac{-4}{e^{3x}+2} < 1$, 所以函数 $y = \frac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2}$ 的值域为 $(-1, 1)$.

【典例 3】(23-24 高三上·湖北·期中) 已知 $f(x) = a^{x+1} - 2a^{-x}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数.

(1) 函数 $g(x) = a^{2x} + a^{-2x} - 2f(x)$, $x \in [0, 2]$, 求 $g(x)$ 的最小值.

(2) 是否存在 $\lambda > 0$, 使得 $f(2x) \leq \lambda f(x)$ 对 $x \in [-2, -1]$ 恒成立, 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $g(x)_{\min} = -2$; (2) 存在, $0 < \lambda \leq \frac{5}{2}$

【解析】(1) 由 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 知 $f(0) = a - 2 = 0$, 得 $a = 2$;

代入函数得: $f(x) = 2^{x+1} - 2 \cdot 2^{-x} = 2(2^x - 2^{-x})$,

由于 $f(-x) = 2(2^{-x} - 2^x) = -f(x)$, 故 $a = 2$ 时, $f(x)$ 为奇函数, 满足条件,

$g(x) = 2^{2x} + 2^{-2x} - 2(2^{x+1} - 2 \cdot 2^{-x}) = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 - 4(2^x - 2^{-x}) = (2^x - 2^{-x})^2 - 4(2^x - 2^{-x}) + 2$,

令 $t = 2^x - 2^{-x}$, 易知 $t = 2^x - 2^{-x}$ 在 $x \in [0, 2]$ 上单调递增,

故当 $x = 0$ 时, t 取得最小值, $t_{\min} = 1 - 1 = 0$,

当 $x = 2$ 时, t 取得最大值, $t_{\max} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \therefore t \in \left[0, \frac{15}{4}\right]$,

则上式转化为 $h(t) = t^2 - 4t + 2 = (t - 2)^2 - 2$,

$\therefore t = 2$ 时, $g(x)_{\min} = -2$, 此时 $x = \log_2(1 + \sqrt{2})$;

(2) $f(x) = 2(2^x - 2^{-x})$, $f(2x) = 2(2^{2x} - 2^{-2x})$,

代入不等式得 $2(2^{2x} - 2^{-2x}) \leq 2\lambda(2^x - 2^{-x})$,

即得: $2(2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x}) \leq 2\lambda(2^x - 2^{-x})$,

$\because x \in [-2, -1]$ 时, $2^x - 2^{-x} < 0$, $\therefore \lambda \leq 2^x + 2^{-x}$,

又 $\because 2^x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\therefore$ 当 $2^x = \frac{1}{2}$, 即 $x = -1$ 时, $2^x + 2^{-x}$ 取得最小值,

而 $(2^x + 2^{-x})_{\min} = \frac{5}{2}$, $\therefore 0 < \lambda \leq \frac{5}{2}$.

重难点 02 对数型复合函数的值域

1、形如 $y = f(\log_a x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的函数求值域

换元法: 令 $\log_a x = t$, 先求出 $\log_a x = t$ 的值域, 再利用 $y = f(t)$ 的单调性, 再求出 $y = f(t)$ 的值域。

2、形如 $y = \log_a f(x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的函数的值域

换元法: 令 $\mu = f(x)$, 先求出 $\mu = f(x)$ 的值域, 再利用 $y = \log_a \mu$ 的单调性, 求出 $y = \log_a f(x)$ 的值域。

【典例 1】(23-24 高三上·四川广安·月考) 已知函数 $f(x) = \log_3(-x^2 + 2x + 3)$, 则 $f(x)$ 的值域是_____.

【答案】 $(-\infty, \log_3 4]$

【解析】 $\because f(x) = \log_3(-x^2 + 2x + 3)$, $\therefore y = \log_3 t, t = -x^2 + 2x + 3$,

$$t = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4 \leq 4,$$

$$\because y = \log_3 t \text{ 单调递增}, \therefore y = \log_3 t \leq \log_3 4,$$

则 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, \log_3 4]$ 。

【典例 2】(23-24 高三上·江苏常州·月考) 已知函数 $f(x) = 1 + \log_3 x$, $x \in [1, 9]$, 则函数 $y = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的值域为_____.

【答案】 $[2, 7]$

【解析】由于 $f(x) = 1 + \log_3 x$, $x \in [1, 9]$,

$$\text{由 } y = f^2(x) + f(x^2), \text{ 得 } \begin{cases} 1 \leq x \leq 9 \\ 1 \leq x^2 \leq 9 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 \leq x \leq 3,$$

即函数 $y = f^2(x) + f(x^2)$ 的定义域为 $[1, 3]$. $\therefore 0 \leq \log_3 x \leq 1$,

$$\text{又 } y = f^2(x) + f(x^2) = (1 + \log_3 x)^2 + 1 + \log_3 x^2 = (\log_3 x)^2 + 4\log_3 x + 2 = (2 + \log_3 x)^2 - 2,$$

$Q 0 \leq \log_3 x \leq 1, \therefore 2 \leq y \leq 7,$

故函数 $y = f^2(x) + f(x^2)$ 的值域为 $[2, 7]$.

重难点 03 嵌套函数的零点问题

处理复合函数 $y = f[g(x)]$ 的零点问题的方法:

①确定内层函数 $u = g(x)$ 和外层函数 $y = f(u)$;

②确定外层函数 $y = f(u)$ 的零点 $u = u_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$;

③确定直线 $u = u_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 与内层函数 $u = g(x)$ 图象的交点个数分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 则函数 $y = f[g(x)]$ 的零点个数为 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

【典例 1】 (2024·浙江金华·三模) 若函数 $f(x) = x + \frac{1}{|x|}$, 则方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根个数为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】D

【解析】 $f(x) = x + \frac{1}{|x|} = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x - \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases},$

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$,

此时 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$,

故当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

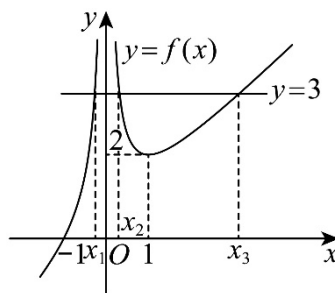
故 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

画出函数 $f(x)$ 和 $y = 3$ 的图象如下:

令 $x + \frac{1}{x} = 3$ 得, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

故 $x_1 \in (-1, 0), x_2 \in (0, 1), x_3 \in (2, +\infty)$,

令 $f(x) = t$, 则 $f(t) = 3$, 且 $t_1 \in (-1, 0), t_2 \in (0, 1), t_3 \in (2, +\infty)$,

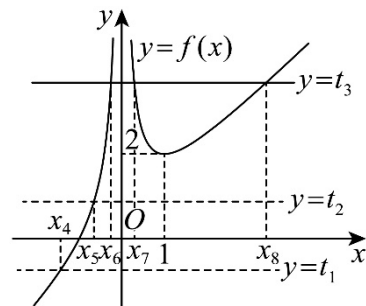


当 $f(x) = t_1 \in (-1, 0)$ 时, 结合图象可知, 只有 1 个解 x_4 ,

当 $f(x) = t_2 \in (0, 1)$ 时, 结合图象可知, 只有 1 个解 x_5 ,

当 $f(x) = t_3 \in (2, +\infty)$ 时, 结合图象可知, 由 3 个解 x_6, x_7, x_8 ,

综上, 方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数为 5. 故选: D

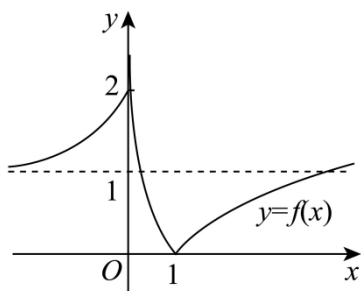


【典例 2】 (23-24 高三上·江西上饶·月考) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 0 \\ |\log_4 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的函数

$g(x) = f^2(x) - (a+1)f(x) + 1$ 恰好有五个零点. 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $1 < a \leq \frac{3}{2}$

【解析】 作出函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 0 \\ |\log_4 x|, & x > 0 \end{cases}$ 的图象如图,



令 $f(x) = t$, 函数 $g(x) = f^2(x) - (a+1)f(x) + 1$ 恰好有五个零点.

则方程 $f^2(x) - (a+1)f(x) + 1 = 0$ 化为 $t^2 - (a+1)t + 1 = 0$,

则 $t^2 - (a+1)t + 1 = 0$ 必有两个不同实根 t_1, t_2 , 则 $t_1 t_2 = 1$,

结合图形可知 $t_1, t_2 > 0$, 则 t_1, t_2 必不为 1,

故方程 $t^2 - (a+1)t + 1 = 0$ 的一根在区间 $(0, 1)$ 内, 另一根在区间 $(1, 2]$ 内,

令 $g(t) = t^2 - (a+1)t + 1$, 则 $\begin{cases} g(0) = 1 > 0 \\ g(1) = 1 - (a+1) \times 1 + 1 < 0 \\ g(2) = 4 - (a+1) \times 2 + 1 \geq 0 \end{cases}$, 解得: $1 < a \leq \frac{3}{2}$,

综上: 实数 a 的取值范围为 $1 < a \leq \frac{3}{2}$.

【典例 3】(23-24 高三下·重庆·月考) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \frac{2 \ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 + 2x + 1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$, 若关于 x

的方程 $f(g(x)) = \lambda$ 有 6 个解, 则 λ 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$

【解析】由题可得, 令 $g(x) = t$, 则方程 $f(t) = \lambda$ 的解有 3 个,

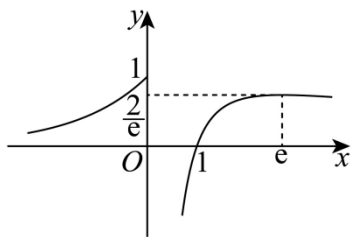
当 $t \leq 0$ 时, $f(t) = 2^t$, 所以 $f(t)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增,

当 $t > 0$ 时, $f'(t) = \frac{2(1 - \ln t)}{t^2}$,

则 $f(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$f(e) = \frac{2}{e}$, $f(1) = 0$, 当 $x > 1$ 时, $\ln x > 0$, 所以 $f(x) > 0$,

画 $y = f(t)$ 的图象如下:



由图象可得 $0 < \lambda < \frac{2}{e}$,

且方程 $f(t) = \lambda$ 的三个解分别为 t_1, t_2, t_3 , 不妨设 $t_1 < t_2 < t_3$,

则有 $2^{t_1} = \lambda$, 即 $t_1 = \log_2 \lambda$,

又 $g(x) = x^2 + 2x + 1 - 2\lambda = (x+1)^2 - 2\lambda$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(x)_{\min} = -2\lambda$,

又因为 $g(x) = t$, 所以 $-2\lambda < t_1 < t_2 < t_3$, 所以有 $\log_2 \lambda > -2\lambda$, 即 $2\lambda + \log_2 \lambda > 0$,

令 $h(\lambda) = 2\lambda + \log_2 \lambda, (\lambda > 0)$, 所以 $h'(\lambda) = 2 + \frac{1}{\lambda \ln 2} > 0$, 所以 $h(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 所以 $2\lambda + \log_2 \lambda > 0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

综上, λ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$ 。

重难点 04 关于函数零点求和问题

利用函数零点位置的对称性求和

(1) 将函数零点问题转化为两个函数图象的交点问题;

(2) ①如果两个函数图象都关于直线 $x=a$ 对称, 那么这两个函数图象的交点也关于直线 $x=a$ 对称, 则对应的两零点之和为 $2a$;

②如果两个函数图象都关于点 $(a,0)$ 对称, 那么这两个函数图象的交点也关于点 $(a,0)$ 对称, 则对应的两零点之和为 $2a$.

【典例 1】(23-24 高三上·河北邢台·月考) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=-f(-x)$, 且曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-\frac{1}{x-1}$ 有且只有两个交点, 则函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{x-1}$ 的零点之和是 ()

A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

【答案】A

【解析】由题意定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=-f(-x)$,

则 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 成中心对称,

函数 $y=-\frac{1}{x-1}$ 的图象是由 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象向右平移一个单位得到,

故 $y=-\frac{1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1,0)$ 成中心对称,

又曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-\frac{1}{x-1}$ 有且只有两个交点,

则这两个交点关于 $(1,0)$ 对称, 故这两个交点的横坐标之和为 2,

而函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{x-1}$ 的零点即为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=-\frac{1}{x-1}$ 交点的横坐标,

故函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{x-1}$ 的零点之和是 2, 故选: A

【典例 2】(2024·福建泉州·模拟预测) 已知函数 $f(x)=x^2\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)$, $g(x)$ 满足 $g(1+3x)+g(3-3x)=0$, $G(x)=f(x-2)-g(x)$, 若 $G(x)$ 恰有 $2n+1$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 个零点, 则这 $2n+1$ 个零点之和为 ()

A. $2n$ B. $2n+1$ C. $4n$ D. $4n+2$

【答案】D

【解析】因为 $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{e^x + 1}\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，关于原点对称，

$$\text{所以 } f(-x) = (-x)^2 \left(1 - \frac{2}{e^{-x} + 1}\right) = x^2 \left(1 - \frac{2e^x}{1 + e^x}\right) = x^2 \left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right) = -x^2 \left(1 - \frac{2}{e^x + 1}\right) = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数，关于原点 $(0,0)$ 中心对称，

而函数 $f(x-2)$ 是函数 $f(x)$ 向右平移两个单位得到的函数，

因而 $f(x-2)$ 关于 $(2,0)$ 中心对称，

函数 $g(x)$ 满足 $g(1+3x) + g(3-3x) = 0$ ，所以 $g(1+3x) = -g(3-3x)$ ，

即 $g(1+x) = -g(3-x)$ ，所以函数 $g(x)$ 关于 $(2,0)$ 中心对称，且 $g(2) = 0$ ，

且 $G(2) = f(2-2) - g(2) = 0$ ，

所以由函数零点定义可知 $G(x) = f(x-2) - g(x)$ ，即 $f(x-2) = g(x)$ ，

由于函数 $f(x-2)$ 和函数 $g(x)$ 都关于 $(2,0)$ 中心对称，

所以两个函数的交点也关于 $(2,0)$ 中心对称，

又因为 $G(x)$ 恰有 $2n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 个零点，

即函数 $f(x-2)$ 和函数 $g(x)$ 的交点恰有 $2n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 个，

且其中一个为 $x=2$ ，其余的 $2n$ 个交点关于 $(2,0)$ 对称分布，

所以 $2n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 个零点的和满足 $\frac{2n}{2} \times 4 + 2 = 4n + 2$ ，故选：D.



方法技巧 · 逆袭学霸

一、指数幂与对数式运算

1、指数幂运算的一般原则

- (1) 指数幂的运算首先将根式统一为分数指数幂，以便利用法则计算；
- (2) 先乘除后加减，负指数幂化成正指数幂的倒数；
- (3) 底数为负数，先确定符号；底数为小数，先化成分数；底数是带分数的，先化成假分数；
- (4) 运算结果不能同时包含根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318125121067006077>