福建省厦门第一中学2024-2025学年高二上学期期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．若直线l的一个方向向量为$\left(-\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$，则它的倾斜角为（　　）

A．$150°$　　B．$120°$　　C．$60°$　　D．$30°$

2．若椭圆$C:\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{9}=1\left(m>0\right)$的焦点在$y$轴上，其离心率为$\frac{1}{3}$，则椭圆$C$的短轴长为（　　）

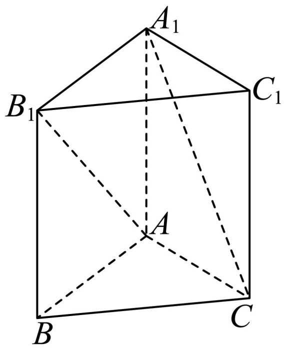
A．2　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．8

3．若$M(1,0,1)$，$N(2,m,3)$，$P(2,2,n+1)$三点共线，则$m+n=$（　　）

A．4　　B．-2　　C．1　　D．0

4．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，且$AB=AC=AA_1=1$

则异面直线AB_1与A_1C所成角的余弦值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

5．若点$\left(a,b\right)$关于直线$y=2x$的对称点在y轴上，则a,b满足的条件为（　　）

A．$4a-3b=0$　　B．$3a-4b=0$

C．$2a-3b=0$　　D．$3a-2b=0$

6．若圆$C_1:x^2+y^2-2x+4y+m=0$与圆$C_2:x^2+y^2+2x-1=0$恰有两条公共的切线，则m的取值范围为（　　）

A．$(-13,3)$　　B．$(3,5)$　　C．$(-\infty,5)$　　D．$(-\infty,3)$

7．已知A为双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的右顶点，$O$为坐标原点，$B,C$为双曲线$E$上两点，且$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，直线$AB,AC$的斜率分别为4和$\frac{1}{2}$，则双曲线$E$的离心率为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．2

8．PA，PB，PC 是从点 P 出发的三条线段，每两条线段的夹角均为$60°$,$PA=PB=PC=3$，若M 满足 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}$,则点$M$ 到平面PAB 的距离为（　）

A．$\sqrt{6}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{6}$

二、多选题

9．已知曲线$C_1:4x^2+3y^2=48$，$C_2:x^2-\frac{y^2}{3}=1$，则（　）

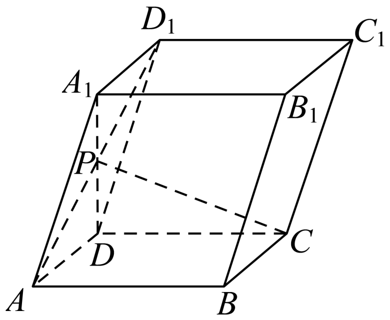
A．C_1的长轴长为4　　B．C_2的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$

C．C_1与C_2的焦点坐标相同　　D．C_1与C_2的离心率互为倒数

10．如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

$AB=AD=AA_1=1,AB\perp AD,\angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ,P$为$A_1D$与$AD_1$的交点，设

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则（　）



A．$\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　B．$\overrightarrow{BD_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

C．$\left|\overrightarrow{PC}\right|=\frac{3}{4}$　　D．$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{5}{4}$

11．一条动直线l_1与圆$x^2+y^2=1$相切，并与圆$x^2+y^2=25$相交于点A，B，点P为定直线$l_2:x+y-10=0$上动点，则下列说法正确的是（　）

A．存在直线l_1，使得以AB为直径的圆与l_2相切

B．$|PA|^2+|PB|^2$的最小值为$150-20\sqrt{2}$

C．$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为$-27+10\sqrt{2}$

D．$|PA|+|PB|$的最小值为$8\sqrt{3}$

三、填空题

12．已知平面α的一个法向量为$\vec{n}=(1,2,1)$，直线l的一个方向向量为$\vec{m}=(1,0,1)$，则直线l与平面α所成角的正弦值为______________.

13．圆$C_1:x^2+y^2=1$与圆$C_2:x^2+y^2-2x-2y+1=0$的公共弦所在直线被圆C_3：$(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{25}{4}$所截得的弦长为__________.

14．已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2,P$为椭圆上不与顶点重合的任意一点，$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，记直线$OP,OI$的斜率分别为$k_1,k_2$，若$k_1=\dfrac{5}{4}k_2$，则椭圆$E$的离心率为__________.

四、解答题

15．已知直线l_1：$2x+3y-2=0$，l_2：$mx+(2m-1)y+1=0$，其中m为实数.

(1)当$l_1 // l_2$时，求直线l_1，l_2之间的距离；

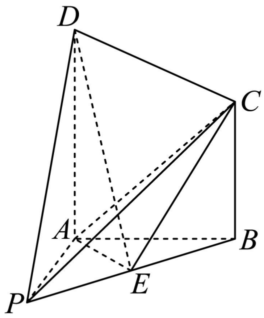
(2)当$m=1$时，求过直线l_1，l_2的交点，且垂直于直线$x-2y+4=0$的直线方程.

16．已知圆C过点$A(4,0),B(0,4)$，且圆心C在直线$l:x+y-6=0$上.

(1)求圆C的方程；

(2)若从点$M(4,1)$发出的光线经过x轴反射，反射光线l_1恰好平分圆C的圆周，求反射光线l_1的一般方程.

17．如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AD\perp$平面ABP，$BC \parallel AD,\angle PAB=90^\circ,PA=AB=2,AD=3,BC=m$，$E$是$PB$的中点.



(1)证明：$AE\perp$平面PBC；

(2)若二面角$C-AE-D$的余弦值是$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求m的值；

(3)若$m=2$，在线段AD上是否存在一点F，使得$PF\perp CE$．若存在，确定F点的位置；若不存在，说明理由．

18．已知椭圆E的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$，点M在椭圆E上，$MF_2\perp F_1F_2$，$\triangle MF_1F_2$的周长为$4+2\sqrt{3}$，面积为$\dfrac{1}{2}c$．

(1)求椭圆E的方程．

(2)设椭圆E的左、右顶点分别为A，B，过点$(1,0)$的直线l与椭圆E交于C，D两点（不同于左右顶点），记直线AC的斜率为k_1，直线BD的斜率为k_2，问是否存在实常数λ，使得$k_1=\lambda k_2$，恒成立？若成立，求出λ的值，若不成立，说明理由．

19．双曲线 C：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点为 F_1、F_2，右顶点为A．$\odot M$ 的圆心在x轴上，位于A的右侧，与双曲线C有且仅有一个公共点，

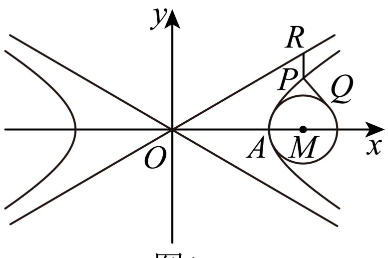


图1

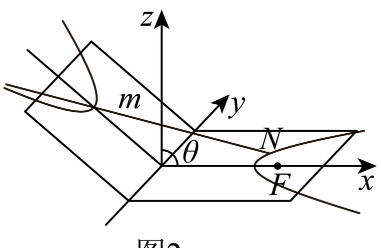


图2

(1)求⊙M 的最大半径为多少，及此时⊙M 的方程；

(2)如图 1，在（1）的条件下，过双曲线 C 上一点 P 作⊙M 的切线，切点为 Q，过 P 且垂直于 x 轴的直线与双曲线其中一条渐近线交于 R，求 $|PQ|+|PR|$ 的最小值：

(3)双曲线右支上一点 N 在右焦点 F_2 的正上方，如图 2，将双曲线的左支绕 y 轴翻折． 使左右支所在的两个半平面所成的二面角大小为θ，若 $\forall\theta\neq0$,过 N 的直线 m 总与左支相交，以原双曲线所在坐标平面的 O 为原点，过 O 垂直于 xOy 平面方向为 z 轴建立空间直角坐标系，求直线 m 的一个方向向量．

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	A	B	B	A	A	D	BD	BD
题号	11									
答案	BCD									

1．B

【分析】根据已知先求出直线的斜率，进而可求直线的倾斜角．

【详解】因为直线l的一个方向向量为$(-\sqrt{2},\sqrt{6})$，

所以直线的斜率$k=-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$，

故直线的倾斜角为$120°$．

故选：B．

2．B

【分析】根据椭圆的离心率求出m，即可求得该椭圆的短轴长．

【详解】对于椭圆$C:\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\left(m>0\right)$，由已知可得$a=3$，$b=m$，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-m^2}$，

椭圆C的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{9-m^2}}{3}=\dfrac{1}{3}$，解得$m=2\sqrt{2}$，则$b=2\sqrt{2}$，

因此，椭圆C的短轴长为$2b=4\sqrt{2}$．

故选：B．

3．A

【分析】根据空间向量平行坐标关系计算求解即可．

【详解】因为$\overrightarrow{MN}=(1,m,2)$，$\overrightarrow{MP}=(1,2,n)$，所以$1=\dfrac{m}{2}=\dfrac{2}{n}$，

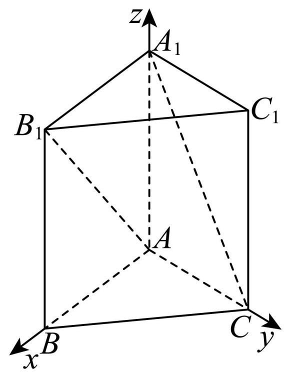
解得$m=n=2$．故$m+n=4$．

故选：A．

4．B

【分析】建系，由异面直线夹角的向量法即可求解．

【详解】



由题意如图建立空间直角坐标系，

可得：$A\left(0,0,0\right),B_1\left(1,0,1\right),A_1\left(0,0,1\right),C\left(0,1,0\right)$，

则 $\overrightarrow{AB_1}=\left(1,0,1\right)$ 与 $\overrightarrow{A_1C}=\left(0,1,-1\right)$，

所以 $\cos\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{A_1C}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，

所以异面直线 AB_1 与 A_1C 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$.

故选：B

5．B

【分析】由已知，设点 $\left(a,b\right)$ 关于直线 $y=2x$ 的对称点为 $(0,t)$，再由垂直直线的斜率关系和点 $\left(a,b\right)$ 与点 $(0,t)$ 的中点在 $y=2x$ 上，建立方程组，即可得到 $3a-4b=0$.

【详解】因为点 $\left(a,b\right)$ 关于直线 $y=2x$ 的对称点在 y 轴上，

设点 $\left(a,b\right)$ 关于直线 $y=2x$ 的对称点为 $(0,t)$，

则有 $\begin{cases}\dfrac{b-t}{a-0}\times 2=-1\\ \dfrac{b+t}{2}=2\times\dfrac{a+0}{2}\end{cases}$，解得 $3a-4b=0$.

故选：B.

6．A

【分析】根据两圆的公切线性质，结合两圆的位置关系进行求解即可.

【详解】由 $x^2+y^2-2x+4y+m=0\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5-m\Rightarrow 5-m>0\Rightarrow m<5$，

所以 $C_1(1,-2)$，半径 $\sqrt{5-m}$，

由 $x^2+y^2+2x-1=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=2$，所以 $C_2(-1,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，

因为圆 $C_1: x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2+2x-1=0$ 恰有两条公共的切线，所以这两个圆相交，

于是有 $\left|\sqrt{5-m}-\sqrt{2}\right|<\sqrt{(1+1)^2+(-2)^2}<\sqrt{5-m}+\sqrt{2} \Rightarrow -13<m<3$，而 $m<5$，

所以 m 的取值范围为 $(-13,3)$，

故选：A

7．A

【分析】由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$ 可得：O 是 BC 的中点，即 B,C 关于原点对称，然后设点 $B(m,n)$，$C(-m,-n)$ 去表达直线 AB,AC 的斜率，联立方程组可解得 $\begin{cases} m=\dfrac{9a}{7} \\ n=\dfrac{8a}{7} \end{cases}$，最后把这点 $B(\dfrac{9a}{7},\dfrac{8a}{7})$ 代入双曲线方程 E，就可以得到一个关于离心率的方程，并解得结果.

【详解】由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$ 可得：O 是 BC 的中点，即 B,C 关于原点对称，

不妨假设点 $B(m,n)$，则 $C(-m,-n)$，

由 $A(a,0)$ 及直线 AB,AC 的斜率分别为 4 和 $\dfrac{1}{2}$ 可得：

$$\begin{cases} \dfrac{n}{m-a}=4 \\ \dfrac{-n}{-m-a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=4m-4a \\ 2n=m+a \end{cases}，联立解得：\begin{cases} m=\dfrac{9a}{7} \\ n=\dfrac{8a}{7} \end{cases}，$$

所以把点 $B(\dfrac{9a}{7},\dfrac{8a}{7})$ 代入双曲线方程 E 得：

$$\frac{\left(\frac{9a}{7}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{8a}{7}\right)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{81}{49}-\frac{64a^2}{49\left(c^2-a^2\right)}=1,$$

再由 $e=\dfrac{c}{a}$ 代入得：$\dfrac{64}{49\left(e^2-1\right)}=\dfrac{32}{49}$，解得：$e^2=3$，

$\because e>1, \therefore e=\sqrt{3}$，

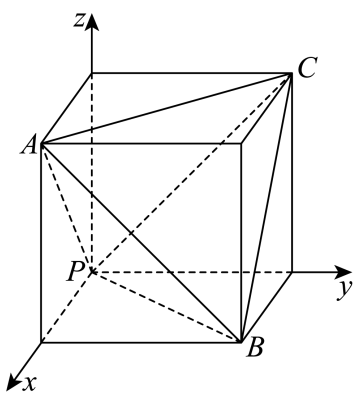
故选：A.

8．D

【分析】根据给定条件，可得 $PABC$ 是正四面体，并将其置于正方体中，再建立空间直角坐标系，利用空间向量求出点到平面的距离.

【详解】由线段 PA,PB,PC 两两的夹角均为 $60°$，且 $PA=PB=PC$，得 $PABC$ 是正四面体，

将正四面体$PABC$置于正方体中，使其棱分别为该正方体的面对角线，建立空间直角坐标系，如图，



设该正方体的棱长为a，则$a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$P(0,0,0),A(a,0,a),B(a,a,0),C(0,a,a)$，

$\overrightarrow{PA}=(a,0,a),\overrightarrow{PB}=(a,a,0),\overrightarrow{PC}=(0,a,a)$，$\overrightarrow{PM}=(2a,3a,3a)$，

设平面PAB的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=ax+az=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=ax+ay=0\end{cases}$，令$x=-1$，得$\vec{n}=(-1,1,1)$，

因此点M到面积PAB的距离$d=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{4a}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$.

故选：D

9．BD

【分析】根据椭圆与双曲线的标准方程，结合它们的几何性质逐项判断即可得.

【详解】由$C_1:4x^2+3y^2=48$，即为：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$，故焦点在$y$轴上，

长轴长为$2\times\sqrt{16}=8$，故A错误；

焦点坐标为$\left(0,\pm2\right)$，离心率为$\frac{\sqrt{16-12}}{\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$，

对$C_2:x^2-\frac{y^2}{3}=1$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，故B正确；

焦点坐标为$\left(\pm2,0\right)$，C_1与C_2的焦点坐标不相同，故C错误；

离心率为$\frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1}}=2$，$C_1$与$C_2$的离心率互为倒数，故D正确.

故选：BD.

10．BD