华师一附中 2024 届高三一轮复习补充作业 21

（数列与不等式 1）

1.证明：

（1）$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times2+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{3\cdot2^{n-1}+1}<\frac{4}{7}$

（2）$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}$

（3）$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}>\frac{7}{6}-\frac{1}{2(2n-1)}, n\geq2$

（4）$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$

（5）$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}<\sqrt{2n+1}-1$

（6）$\frac{2\times3^1}{(3^1-1)^2}+\frac{2\times3^2}{(3^2-1)^2}+\frac{2\times3^3}{(3^3-1)^2}+\cdots\cdots+\frac{2\times3^n}{(3^n-1)^2}<2, n\geq2$

2.数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n^2a_n}{n^2+1}(n\in N^*)$，证明：$a_n>\frac{1}{4}$。

3.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，且满足$2S_n^2=a_n(2S_n-1),(n\geq2)$。

（1）求证：数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是等差数列；

（2）设$b_n=\frac{S_n}{n}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求证：$T_n<\frac{17}{12}$。

4．已知正项数列$\{a_n\}$的前项和为S_n，满足$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，

（1）求数列的前n项和S_n；

（2）记$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots+\frac{1}{S_n}$，证明：$\sqrt{n+1}-1<\frac{T_n}{2}<\sqrt{n}$

5.已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1, a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}, n\in N^*$，且$n\geq2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{\left(\frac{1}{a_n}+1\right)\right\}$前$n$项积为$T_n$，证明：$\sqrt{2n+1}<T_n<2n+1$，$n\in N^*$

6.已知数列 $\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n， $2S_n + a_n = 1(n \in N^*)$，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $c_n = \frac{1}{1+a_n} + \frac{1}{1-a_{n+1}}$， T_n 为数列$\{c_n\}$前 n 项和，证明： $T_n > 2n - \frac{1}{3}$

7.已知正项数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$，其前 n 项和为 S_n ,且 $a_n a_{n+1} = 2S_n$.数列 $\{b_n\}$ 满足：

$a_{n+1}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = a_n$.

（1）.求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）.记 $C_n = \sqrt{\frac{b_n}{a_{n+2}}}, n \in N^*$，证明： $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{n+2}} < c_1 + c_2 + \dots + c_n < 2$.

8.已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$ ， $a_{n+1} = S_n + (-1)^n$ ， $n \in N^*$，且 $\{a_n + \frac{2}{3}(-1)^n\}$ 是等比数列.

（1）求 a 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

（3）.求证： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n}} < \frac{3}{2}$

9.设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 3S_2 + 2$, $a_{2n} = 2a_n$.

（1）求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

（2）令 $b_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2 a_n^2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,证明对任意 $n \in N^*$，都有 $\frac{3}{16} < T_n < \frac{1}{4}$.

10.已知数列 $\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n ，首项 $a_1 = 1$ ，且对于任意 $n \in N^*$ 都有 $na_{n+1} = 2S_n$.

(1)求 $\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n = \frac{4a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+2}^2}$,且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和为 T_n ,求证: $T_n < \frac{5}{4}$.

11.已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$的前 n 项和， $S_n = na_n - 3n(n-1)$ $(n \in N^*)$ ，且 $a_2 = 11$.

（1）求a_1的值;

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n；

（3）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sqrt{\frac{n}{S_n}}$，求证：$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n<\frac{2}{3}\sqrt{3n+2}$.

12.已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$2S_n=1-a_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{1+a_n}-\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}$，且数列$\{b_n\}$前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{1}{3}$.

13.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}a_n-2a_{n+1}+1=0$，$n\in N^*$

（1）求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$是等差数列；

（2）求证：$\frac{n^2}{n+1}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<n$.

14.已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2+a_n$，$n\in N^*$.

（I）求a_2,a_3的值；

（II）令$b_n=\frac{1}{2+a_n}$，求证：$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n<1$；

（III）设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，求证：$2S_n+\frac{1}{4}>2^n$.

15.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n（$n\in N^*$），且满足$a_n+S_n=2n+1$.

（1）求证：数列$\{a_n-2\}$是等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求证：$\frac{1}{2a_1a_2}+\frac{1}{2^2a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{2^na_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$.

16.已知数列$\{a_n\}$的前项和S_n，满足$S_n=2a_n+(-1)^n,n>1$，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明:对任意的整数$m>4$,都有$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\ldots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$

17.已知数列 $\{a_n\}$满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = 4a_n + 3^{n-1}, n \in N^*$ ，

（1）求证:数列$\{a_n + 3^{n-1}\}$是等比数列 ，并求 a_n 的通项公式；

（2）记$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$，求证：对于任意的$n$ e N^*，$\frac{1}{2} < S_n < \frac{4}{9}$;

（3）设$b_n = \log_2\left(a_n + 3^{n-1}\right) + 1$，若不等式$\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$ 之 $\frac{m}{15}\sqrt{2n+3}$ 只对于任意的n e N^*恒成立，求正整数 m 的最大值.

18.已知$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，其前 8 项和为 64．$\{b_n\}$是公比大于 0 的等比数列，

$b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48$;（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n$ e N^*，

（i）证明$\{c_n{}^2 - c_{2n}\}$是等比数列；

（ii）证明$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 \quad c_{2k}}} < 2\sqrt{2}$（$n$ e N^*）

19.已知数列$\{a_n\}, \{b_n\}$满足$a_1 = 6, a_2 = \frac{15}{4}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$

（1）证明：$\{a_n b_n\}$为常数数列，且$a_n > a_{n+1} > 3$

（2）设数列$\{\frac{1}{b_n{}^2}\}$的前n项和为S_n，证明$S_n < \frac{4}{9} + \frac{n}{9}$

20.已知数列$\{a_n\}$满足递推关系：$a_{n+1} = \frac{2a_n{}^2 + 3a_n + m}{a_n + 1}$（$n$ e N^*），又$a_1 = 1$

（1）当$m = 1$时，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$满足不等式a_{n+1} 之 a_n恒成立，求m的取值范围：

（3）当$-3 < m < 1$时，证明$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}$ 之 $1 - \frac{1}{2^n}$

21.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n = 2a_n - 2^{n+1}, n$ e N^*，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n = \log_{\frac{a_n}{n+1}} 2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n ，若存在正整数 m ，使得对任意

$n 之 2$且$n \in N^*$都有$B_{3n}-B_n > \frac{m}{20}$，求$m$的最大值；

（3）设$C_n=\frac{a_n}{n+1}-1$，证明$\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\ldots+\frac{1}{C_{n+1}}<\frac{2}{3}$

22. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足：$S_n^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3(n \in N^*)$，其中$S_n$为数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）（i）求证：$\frac{2n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}}<(\frac{1}{a_1})^{\frac{3}{2}}+(\frac{1}{a_2})^{\frac{3}{2}}+(\frac{1}{a_3})^{\frac{3}{2}}+\ldots+(\frac{1}{a_{2n+1}})^{\frac{3}{2}}<3$;

（ii）求证：$\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\frac{1}{a_3^3}+\ldots+\frac{1}{a_n^3}<\frac{5}{4}$

23.数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^2}$.证明：$a_n 之 \frac{2}{n+2}, n 之 2$

24. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}, a_n^2=a_{n-1}a_n+a_{n-1}, n 之 2$,设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n$，证明：对任意$n \in N^*$,有$\frac{S_n}{n}<\frac{n}{2}$

25. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=a_n^2+a_n+1, n \in N^*$，

证明：（1）$a_{n+1} 之 3a_n$；

（2）设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$前$n$项的和为$S_n$，证明：$S_n<3$

26.已知数列$\{a_n\}$满足$a_n 之 0, a_1=0, a_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, a_n<a_{n+1}$，$T_n=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\ldots+\frac{1}{(1+\ \ )(1+\ \ )\cdots(1+\ \ )}, n \in N^*$，求证：

$$\frac{1}{1+a_1}+$$

$T_n < 3$

27. 已知数列 $\{a_n\}$满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n^2 a_n}{n^2+1}, n \in N^*$，证明：$a_n > \frac{1}{4}$

28. 已知数列 $\{a_n\}$满足 a_n 之 $0, a_1 = 0, a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 = a_n^2, n \in N^*$, 设数列 $\{a_n\}$的前 n 项和为

S_n，证明：（1）$a_n < a_{n+1}$

（2）$S_n > n-2$

29.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n^3+\frac{2}{3}a_n, n\in N^*$，证明：$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < a_n < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

30.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4, a_{n+1}=\sqrt{\frac{6+a_n}{2}}, n\in N^*$，设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和为 S_n，

（1）求证：$a_n > a_{n+1}$;

（2）$2 < S_n - 2n < \frac{16}{7}$

31.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2a_n+1}, n\in N^*$，

（1）证明：数列 $\left\{\left|a_n-\frac{1}{2}\right|\right\}$ 为单调递减数列；

（2）记 S_n 为数列 $\{|a_{n+1}-a_n|\}$ 前 n 项的和，证明：$S_n < \frac{5}{3}$

一轮复习补充作业 21——数列与不等式 1 参考答案：

1. 证明：（1）∵ $\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1} < \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$，

$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times 2+1}+\frac{1}{3\times 2^{2}+1}+\cdots+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3\times 2^{2}}+\cdots+\frac{1}{3\times 2^{n-1}+1}<\frac{11}{28}+\frac{1}{3\times 2^{2}}+\cdots+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}=\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{47}{84}<\frac{48}{84}=\frac{4}{7}$

(2)因为 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,**所以** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)<1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

（3）因为 $\frac{1}{(2n-1)^2}>\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2}>1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)>1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n-1}\right)$

（4）$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{4}\left(1+1-\frac{1}{n}\right)$

（5）先运用分式放缩法证明出 $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,再结合 $\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ 进行裂项,最后就可以

（6）当 $n>2$ 时，$\frac{2\times 3^n}{(3^n-1)^2}<\frac{2\times 3^n}{(3^n-1)(3^n-3)}=\frac{2\times 3^{n-1}}{(3^n-1)(3^{n-1}-1)}=\frac{1}{3^{n-1}-1}-\frac{1}{3^n-1}$.所以当 $n>2$ 时,

$\frac{1}{a_n}=\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}>1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$T_n=\frac{3}{2}+\frac{2\times 3^2}{(3^2-1)^2}+\dots+\frac{2\times 3^n}{(3^n-1)^2}<\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2-1}\right)+\left(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}\right)+\dots+\left(\frac{1}{3^{n-1}-1}-\frac{1}{3^n-1}\right)=2-\frac{1}{3^n-1}<2$

且 $T_1=\frac{3}{2}<2$.故对 $n\in N^*$, $T_n<2$ 得证

2. 证明：

所以，当 $n \geq 3$ 时，

$$a_n > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{n}{4(n-1)} > \frac{1}{4}$$

又因为 $a_1 = 1 > \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

所以 $a_n > \frac{1}{4}$ 对一切 $n \in N^+$ 成立

3．⑴证明:（1）∵当 $n > 2$ 时， $2S_n^2 = a_n(2S_n - 1)$，∵ $a_n = S_n - S_{n-1}$，∴ $2S_n^2 = (S_n - S_{n-1})(2S_n - 1)$，

整理得：$S_n - S_{n-1} = -2S_nS_{n-1}$，∴ $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2(n > 2)$，又当 $n = 1$ 时，$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$，

∴数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 1,公差为 2 的等差数列.

（2）证明：由（1）知：$\frac{1}{S_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$，则 $b_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n(2n-1)}$，当 $n = 1$ 时，$T_1 = b_1 = S_1 = 1 < \frac{17}{12}$；

当 $n=2$ 时，$T_2=b_1+b_2=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}<\frac{17}{12}$，当 $n\geq 3$ 时，$b_n=\frac{1}{n(2n-1)}<\frac{1}{2n(n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<1+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{17}{12}-\frac{1}{2n}<\frac{17}{12}$，综上：$T_n<\frac{17}{12}$

4．解：由题意得：∵ $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，∴ $S_n=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$，等式两边同乘 $2(S_n-S_{n-1})$，得

$2S_n^2-2S_n\cdot S_{n-1}=S_n^2+S_{n-1}^2-2S_n\cdot S_{n-1}+1$，整理得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，由 $S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$，得 $S_1=1$，即 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，∴$S_n^2=n$，$S_n=\sqrt{n}$；

（2）∵ $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}$，$\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

∴ $T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots+\frac{1}{S_n}>\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$，∴$T_n>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$，

$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots+\frac{1}{S_n}<1+\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$=2\left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=2\sqrt{n}$，∴$T_n<2\sqrt{n}$，综上可证：$\sqrt{n+1}-1<\frac{T_n}{2}<\sqrt{n}$.

5．解：（1）当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，∵$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，∴$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，即

$\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，∵数列$\{a_n\}$各项为正，∴$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$，即 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，

则数列$\{\sqrt{S_n}\}$为$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$首项，公差$d=1$的等差数列，∴$\sqrt{S_n}=n$，即$S_n=n^2$，∴当$n\geq 2$时，

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n-1$，经检验$n=1$成立， $\therefore a_n = 2n-1$.

（2）$\because \frac{1}{a_n}+1 = 2n < \frac{2n+1}{2n-1}$，数列$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$前$n$项和为$T_n$

$\therefore T_n = \left(\frac{1}{a_1}+1\right)\left(\frac{1}{a_2}+1\right)\left(\frac{1}{a_3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+1\right) < \frac{3}{1}\text{根}\frac{5}{3}\text{根}\frac{7}{5}\text{根}\cdots\text{根}\frac{2n+1}{2n-1} = 2n+1$， $\because \frac{1}{a_n}+1 = \frac{2n}{2n-1} > \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}}$，

$\therefore T_n = \left(\frac{1}{a_1}+1\right)\left(\frac{1}{a_2}+1\right)\left(\frac{1}{a_3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+1\right) > \frac{\sqrt{3}}{}\text{根}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\text{根}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\text{根}\cdots\text{根}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}} = \sqrt{2n+1}$， $\therefore \sqrt{2n+1} < T_n < 2n+1$.

6.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/325044342314011131