10.5　分式方程

知识梳理

考点 1：分式方程的概念

分式方程：分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

注意：“分母中含有未知数”是分式方程与整式方程的根本区别，也是判定一个方程为分式方程的依据 .

考点 2：分式方程的解法

（1）基本思路：分式方程 去分母 整式方程。

（2）基本步骤：

①找最简公分母，当分母是多项式时，先分解因式；

②去分母，方程两边都乘最简公分母，约去分母，化为整式方程；

③解整式方程；

④验根.

注意：解分式方程过程中，易错点有：①去分母时要把方程两边的式子作为一个整体，记得不要漏乘整式项；②忘记验根，最后的结果还要代回方程的最简公分母中，只有最简公分母不是零的解才是原方程的解 .

考点 3：分式方程的增根

在方程变形时，有时可能产生不适合原方程的根，这种根叫做方程的增根 . 由于可能产生增根，所以解分式方程要验根，其方法是将根代入最简公分母中，使最简公分母为零的根是增根，否则是原方程的根 .

注意：增根虽然不是方程的根，但它是分式方程去分母后变形而成的整式方程的根 . 若这个整式方程本身无解，当然原分式方程就一定无解 .

考点 4:分式方程的应用

列分式方程解应用题的一般步骤：

① 设未知数；

② 找等量关系；

③ 列分式方程；

④ 解分式方程；

⑤ 检验（一验分式方程，二验实际问题）；

⑥ 答.

题型探究

题型一：分式方程的概念

1．下列方程中，是分式方程的是（　）

A．$\frac{1}{3}+\frac{x}{2}=1$　　B．$x+\frac{1}{x}=2$　　C．$3x=x-5$　　D．$2x-y=1$

2．已知方程：①$\frac{1-9x^2}{x^2}=0$；②$\frac{x}{x}+\frac{x^2}{2}=1$③$x+\frac{2}{x-2}=2+\frac{2}{x-2}$；④$\left(x+\frac{4}{5}\right)(x-6)=-1$．这四个方程中，分式方程的个数是（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

3．下列关于x的方程中，不是分式方程的是（　　）

A．$\frac{1}{x}+x=1$　　B．$\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$　　C．$\frac{1}{x-1}=\frac{4}{x}$　　D．$\frac{2}{x}=1$

题型二：根据分式方程根的情况求参数范围

4．若关于x的方程$\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1$的解为负数，则$m$的取值范围是（　）

A．　$m<2$　　B．　$m<3$

C．　$m<2$且$3m\neq1$　　D．　$m<3$且$m\neq2$

5．关于x的方程$\frac{ax+1}{x-2}=-1$的解是正数，则a的取值范围是（　）

A．$a>1$　　B．$a>-1$且$a\neq-\frac{1}{2}$

C．$a>-1$且$a\neq2$　　D．$a\neq2$

6．若关于x的分式方程$\frac{1}{x-2}+\frac{a-2}{2-x}=1$的解为正数，则$a$的取值范围为（　）

A．$a<1$　　B．$a<5$

C．$a<1$且$a\neq-1$　　D．$a<5$且$a\neq3$

题型三：根据增根的情况求参数值

7．若分式方程$\frac{x-1}{x+4}=\frac{m}{x+4}$有增根，则$m$的值是（　）.

A．3　　B．−3　　C．5　　D．−5

8．若分式方程$\frac{x-3}{x-1}=\frac{m}{x-1}$有增根，则$m$等于（　）

A．3　　B．−3　　C．2　　D．−2

9．若关于x的分式方程$\frac{x-m}{x-3}-3=\frac{2}{x-3}$有增根，则$m$的值为（　）

A．1　　B．3　　C．−3　　D．−1

题型四：解分式方程

10．解方程：$\frac{2x-3}{x-2}-\frac{1}{2-x}=1$.

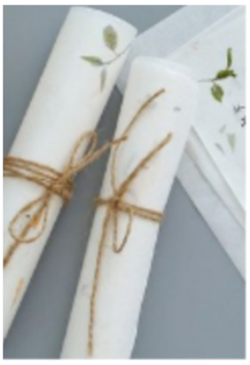
11．解分式方程：$\frac{x}{x+3}+\frac{5}{x-3}=1$．

12．解方程：$\frac{x}{x-1}-\frac{2x-2}{x}=-1$

13．解方程$\frac{1}{x+1}+1=\frac{5}{2x+2}$

题型五：分式方程的应用

14．宣纸是中国古典书画用纸，是中国传统造纸工艺之一．某宣纸厂计划生产生宣和熟宣共5000张，已知该工厂的工人平均每天生产生宣的数量是生产熟宣数量的2倍，生产800张熟宣比生产600张生宣多用1天．



(1)求该工厂的工人平均每天生产生宣和熟宣各多少张？

(2)若生产工期不超过6天，则最多生产熟宣多少张？

15．教育部印发的《义务教育课程方案》和课程标准（2022年版），将劳动从原来的综合实践活动课程中独立出来．某中学为了让学生体验农耕劳动，开辟了一处耕种园，需要采购一批菜苗开展种植活动．据了解，市场上每捆A种菜苗的价格是菜苗基地的$\frac{5}{4}$倍，用300元在市场上购买的A种菜苗比在菜苗基地购买的少3捆．求菜苗基地每捆A种菜苗的价格．

16．春节即将到来，家家户户贴春联，挂灯笼，欢天喜地迎新年．某百货超市计划购进春联和灯笼这两种商品，已知每个灯笼的进价比每幅春联的进价多5元，超市用200元购进的灯笼数量和用150元购进的春联数量相同，求每个灯笼的进价和每幅春联的进价各是多少元？

17．某风景区计划修建一条长4000m的步道．修了1600m后开始加派人手，每天的工作效率提高了25%，比原计划提前6天完成任务．求原计划每天修多少米步道．



一、选择题

1．下列方程中是分式方程的是（　）

A．$\frac{x}{2}-2x=1$　　B．$2x^2=x-3$　　C．$\frac{1}{x-2}=2$　　D．$\frac{3x+1}{\pi}=2$

2．下列式子中是分式方程的是（　）

A．$-\frac{2}{x}$　　B．$\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=3$　　C．$\frac{x}{2}+1=0$　　D．$x^2+1=0$

3．关于x的方程$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{m}{3-x}+1$有增根，则$m$的值是（　）

A．3　　B．0或3　　C．7　　D．−7

4．关于x的分式方程$\frac{1}{x-2}+\frac{a-2}{2-x}=1$的解为正数，则$a$的取值范围是（　　）

A．$a<5$　　B．$a<5$且$a\neq 3$　　C．$a>5$且$a\neq 2$　　D．$a>5$

5．若关于y的不等式组$\begin{cases} y-1\geq 4m \\ \frac{y-m}{2}\leq 2m+3 \end{cases}$有解，且关于$x$的分式方程$\frac{mx}{x-3}=1+\frac{2x+3}{3-x}$有非负整数解，则符合条件的所有整数$m$的和为（　）

A．−16　　B．−13　　C．−9　　D．−6

6．若关于x的分式方程$\frac{m}{x-2}-\frac{3}{2-x}=1$有解，则$m$的值不等于（　）

A．2　　B．1　　C．3　　D．−3

7．若关于x的方程$\frac{x-a}{x-1}-\frac{3}{x}=1$的解为整数，则整数$a$的值的个数为（　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

8．若关于x的方程$\frac{k-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=0$没有增根，则$k$的值不能是（　　）

A．-1　　B．1　　C．2　　D．3

9．若关于x的分式方程$\frac{3}{x-4}+\frac{x+m}{4-x}=1$有增根，则$m$的值是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．-1

10．分式方程$\frac{2}{x}+\frac{a}{x-1}=2$的解为$x=2$，则$a$的值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

11．关于y的分式方程$\frac{a+7}{y-1}-\frac{4}{1-y}=3$有非负整数解，则满足条件的所有负整数$a$的个数是（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

12．关于方程$\frac{1}{x-3}+\frac{m+1}{x+3}=\frac{m+2}{x^2-9}$的解满足$-4<x<\frac{7}{2}$，则整数$m$有（　）个.

A．10个　　B．11个　　C．12个　　D．13个

二、填空题

13．若关于x的分式方程$\frac{1-x}{x-2}=\frac{m}{2-x}-2$有增根，则$m$的值是_____.

14．若关于x的分式方程$\frac{2x-1}{x+1}=3-\frac{m}{x+1}$的解为负数，则$m$的取值范围是 _____ .

15．当关于x的方程$\frac{x+m}{x-3}+\frac{3m}{3-x}=4$的解为$x=2$时，$m$的值为_____.

16．若整数a既使得关于x的分式方程$\frac{6-ax}{1-x}-2=\frac{x}{x-1}$有整数解，又使得关于$x$，$y$的方程组$\begin{cases}ax-y=1\\8x-2y=-1\end{cases}$的解为正数，则$a=$____.

17．使得关于x的不等式组$\begin{cases}x+5>m\\x+2>4m+3x\end{cases}$有解，且使分式方程$\frac{1}{x-2}+\frac{x-m}{2-x}=2$有非负整数解的$m$的取值有：_____.

18．若解分式方程$\frac{k}{x-2}=\frac{k-x}{2-x}-3$产生增根，则$k$的值为_____.

19．有一项工程，甲单独做正好按期完成，乙单独做则要超期3天才能完成．现甲、乙合做2天，余下由乙单独做正好按期完成，问甲单独做需要几天完成？若设甲单独做需要x天完成，则根据题意可列方程_____.

20．高铁为居民出行提供了便利，从铁路沿线相距720km的甲地到乙地，乘坐高铁列车比乘坐普通列车少用4h．已知高铁列车的平均速度是普通列车平均速度的3倍．设普通列车的平均速度为$x$km/h，则可列方程为_____.

三、解答题

21．解方程：

(1)$\frac{2+x}{x-3}=2+\frac{1}{3-x}$　　(2)$1-\frac{x}{x-2}=\frac{8}{4-x^2}$

22．解方程

(1)$\frac{3-x}{x-4}=\frac{1}{4-x}-2$　　(2)$\frac{x}{x-2}-1=\frac{4}{x^2-4x+4}$

23．解方程：$\frac{x}{x-2}-1=\frac{6}{x(x-2)}$.

24．解方程：$\frac{2-x}{x-3}+2=\frac{1}{3-x}$.

25．解下列方程.

(1)$\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x^2-2}{2-x}=1$　　(2)$\frac{3}{x-1}-\frac{x+2}{x^2-x}=0$

26．为创建国家卫生城市，我市计划将城市道路两旁的人行道进行改造．经调查可知，若该工程由甲工程队单独来做，恰好能在规定时间内完成．若该工程由乙工程队单独完成，则需要的天数是规定时间的 3 倍．若甲、乙两工程队合作 3 天后，余下的工程由甲工程队单独来做还需 4 天完成．

(1)问我市要求完成这项工程规定的时间是多少天？

(2)已知甲工程队做一天需付工资 3 万元，乙工程队做一天需付工资 0.8 万元．应该怎样安排才能在规定的时间完成这项工程，并使工程花费最少？最少是多少元？

27．2022 年 10 月 12 日“天宫课堂”第三课在中国空间站开讲了，精彩的直播激发了学生探索科学奥秘的兴趣。某中学为满足学生的需求，充实物理兴趣小组的实验项目，决定购入 A 、 *B* 两款物理实验套装，其中 A 款套装单价是 *B*

款套装单价的 1.5 倍，用 12000 元购买的 A 款套装数量比用 7500 元购买的 *B* 款套装数量多 5 套，求 A 、*B* 两款套装的单价分别是多少元.

28．列分式方程解决问题

某校组织学生到相距 80 km 的江阴黄山湖公园进行社会实践活动．上午 8：00 学生乘长途汽车从学校出发．上午 9：00 一位老师带着两名迟到的学生乘小轿车从学校出发，结果小轿车与长途汽车同时到达目的地．已知小轿车的平均速度是长途汽车的 2 倍，求小轿车的速度.

29．2022 年 10 月 16 日，习总书记在中国共产党第二十次全国代表大会上的报告中提出：“积极稳妥推进碳达峰碳中和”．某公司积极响应节能减排号召，决定采购新能源 *A* 型和 *B* 型两款汽车，已知每辆 *A* 型汽车的进价是每辆 *B* 型汽车的进价的1.5倍，若用 1500 万元购进 *A* 型汽车的数量比 1200 万元购进 *B* 型汽车的数量少 10 辆.

(1)*A* 型和 *B* 型汽车的进价分别为每辆多少万元？

(2)该公司决定用不多于 2400 万元购进 *A* 型和 *B* 型汽车共 100 辆，最多可以购买多少辆 *A* 型汽车？

30．某书店为了迎接“读书节”决定购进 *A*、*B* 两种新书，相关信息如表：

种别	*A* 种	*B* 种
进价（元）	18	12
备注	①用不超过 16800 元购进 *A*、*B* 两种图书共 1000 本； ②*A* 种图书不少于 600 本；	

(1)已知 *A* 种图书的标价是 *B* 种图书标价的 1.5 倍，若顾客用 540 元购买图书，能单独购买 *A* 种图书的数量恰好比单独购买 *B* 种图书的数量少 10 本，请求出 *A*、*B* 两种图书的标价；

(2)经市场调查后，陈经理发现他们高估了“读书节”对图书销售的影响，便调整了销售方案，*A* 种图书按照标价 8 折销售，*B* 种图书价格不变，那么书店应如何进货才能获得最大利润？

高分突破

一、选择题

1．下列结论正确的是（　　）

A．$\frac{y+1}{5}=\frac{y}{3}$是分式方程　　B．方程$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=1$无解

C．方程$\frac{x}{x^2+x}=\frac{3x}{x^2+x}$的根为$x=0$　　D．解分式方程时，一定会出现增根

2．下列方程不是分式方程的是（　）

A．$\frac{x-3}{x}=1$；　　B．$\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1}=1$；　　C．$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=2$；　　D．$\frac{1}{2}-\frac{x-2}{3}=x$

3．若关于x的方程$\frac{1}{x^2-4}=\frac{m}{x-2}$有解，则$m$应满足（　）

A．$m\neq 0$　　B．$m\neq\frac{1}{4}$　　C．$m\neq 0$且$m\neq\frac{1}{4}$　　D．m不存在

4．若整数a使关于x的分式方程$\frac{1}{x-3}+\frac{x+a}{3-x}=1$有非负整数解，且使关于$y$的不等式组$\begin{cases}\frac{y+3}{2}>\frac{2y+1}{6}\\ 2y\geq 3y-a\end{cases}$至少有3个整数解，则符合条件的所有整数$a$的和是（　）

A．–4　　B．–3　　C．0　　D．2

5．解关于x的方程$\frac{x}{x\text{-}1}-\frac{k}{x^2\text{-}1}=\frac{x}{x+1}$不会产生增根，则$k$的值是（　　）

A．2　　B．1　　C．$k\neq 2$且$k\neq -2$　　D．无法确定

6．若关于x的方程$\frac{x}{x-5}$－2＝$\frac{m}{x-5}$有增根，则m的值应为（　）

A．2　　B．-2　　C．5　　D．-5

7．关于x的方程$\frac{mx-1}{x-2}+\frac{1}{2-x}=2$，有整数解，则满足条件的整数$m$的值有（　　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

8．若关于x的方程$\frac{2ax}{a-x}=\frac{8}{3}$的解为$x=1$，则$a$等于（　）

A．–1　　B．1　　C．4　　D．8

9．已知关于x的方式方程$\frac{3x-a}{x-3}=\frac{1}{3}$的解是非负数，那么$a$的取值范围是（　　）

A．$a>1$　　B．$a\geq 1$且$a\neq 3$　　C．$a\geq 1$且$a\neq 9$　　D．$a\leq 1$

10．从–4，–3，1，3，4这五个数中，随机抽取一个数，记为m，若m使得关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}2x+y=2\\ mx-2y=-3\end{cases}$有解，且使关于$x$的分式方程$\frac{1-m}{x-1}-1=\frac{2}{1-x}$有正数解，那么这五个数中所有满足条件的$m$的值之和是(　)

A．1　　B．2　　C．–1　　D．–2

二、填空题

11．分式方程$\frac{5}{2x}-\frac{3}{2x-4}=0$的解是_____.

12．对于实数a，b，定义一种新运算“⊗”为：$a\otimes b=\frac{1}{a^2-b^2}$，这里等式右边是实数运算，例如：

$1\otimes 3=\frac{1}{1^2-3^2}=-\frac{1}{8}$，则方程$x\otimes(-2)=\frac{1}{x-2}$的解是_____.

13．对于两个不相等的实数a、b，我们规定符号$\max\{a,b\}$表示a、b中较大的数．如$\max\{3,5\}=5$按照这个规定，

方程$\max\left\{\frac{5}{x},\frac{2}{x}\right\}=3-\frac{2}{x-2}$的解为_____.

14．已知$a_1=x+1$（$x\neq 0$，且$x\neq -1$），$a_2=\frac{1}{1-a_1}$，$a_3=\frac{1}{1-a_2}$，…，$a_n=\frac{1}{1-a_{n-1}}$.

（1）根据上述规律，可得$a_2=$_____（用含字母x的代数式表示）；

（2）当$x=1$时，$a_{2013}=$_____；

（3）若a_{2022}的值为5，则x的值为_____.

15．若关于x的分式方程$\frac{3x-m}{mx-2}=1$无解，则m的值为_____.

三、解答题

16．解方程：

(1)$\frac{1}{2x}=\frac{2}{x+3}$

(2)$\frac{x}{x+1}-1=\frac{2x}{3x+3}$

17．解下列方程：

(1)$3-\frac{1}{2-x}=\frac{3-x}{x-2}$；

(2)$\frac{x+1}{4x^2-1}=\frac{3}{2x+1}-\frac{4}{4x-2}$.

18．解分式方程

(1)$\frac{x}{2x-3}+\frac{5}{3-2x}=4$

(2)$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$

19．观察下列等式：$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，

将以上三个等式两边分别相加得：

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(1)直接写出下列各式的计算结果：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$____

(2)猜想并写出：$\frac{1}{n(n+2)}=$____.

(3)探究并解方程：$\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+9)}=\frac{3}{2x+18}$.

20．完成下列各题.

(1)解方程：$\frac{x}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}=1$.

(2)若分式$\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$值为零，求x的值.

21．冉老师准备购买一辆油电混动车，税前标价一样的同一款油电混动车，甲店承诺免税前标价10%的购置税，另送3000元汽车保养券，保养券可抵现金，乙店承诺在税前标价的基础上直接降价3万元，冉老师经过核算，发现该车在乙店购买可以节省2000元.

(1)冉老师准备购买的这款油电混动车税前标价多少万元？

(2)经过协商，乙店同意冉老师试驾200公里，若行驶一公里的油费是电费的3倍，试驾完协商里程后，冉老师发现油费和电费各花60元，问该款车行驶一公里的油费和电费各多少元？

22．注意：为了使同学们更好地解答本题，我们提供了一种解题思路，你可以依照这个思路，填写表格，并完成本题解答的全过程．如果你选用其他的解题方案，此时，不必填写表格，只需按照解答题的一般要求，进行解答即可.

中国是最早发现并利用茶的国家，形成了具有独特魅力的茶文化，每年5月21日为国际茶日．某茶店5月份第一周绿茶、红茶的销售总额分别为1500元，900元，已知红茶每克售价是绿茶每克售价的1.2倍，红茶的销售量比绿茶的销售量少3000克．问绿茶、红茶每克的售价分别是多少元？

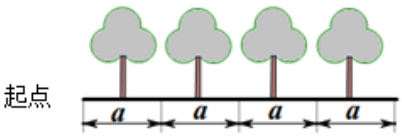
(1)设绿茶每克销售价格为x元，则用含x的式子把表格补充完整；

	售价（元/克）	销售量（克）	销售总额（元）
绿茶	x		1500
红茶			900

(2)列出方程，完成本题解答.

23．小宇家附近新修了一段公路，他想给市政写信，建议在路的两边种上银杏树．他先让爸爸开车驶过这段公路，发现速度为60千米/小时，走了约2分钟，由此估算这段路长约_____千米．然后小宇查阅资料，得知银杏为落叶大乔木，成年银杏树树冠直径可达8米．小宇计划从路的起点开始，每隔a米种一棵树，绘制示意图如图：考虑到投入资金的限制，他设计了另一种方案，将原计划的a扩大一倍，则路的两侧共计减少100棵数，请你求出a的值.





24．为倡导节能理念，国家实施了中央财政补贴条例支持高效节能电器的推广使用．某款节能空调扇在条例实施后，每购买一台，客户可获财政补贴 100 元，若同样用 8 万元所购买的此款空调扇的台数条例实施后比实施前多 20%，求条例实施前此款空调扇每台的售价为多少元？

25．《中华人民共和国道路交通安全法实施条例》中规定：超速行驶属违法行为．为确保行车安全，某一段总路程为 270 千米的高速公路全程限速 120 千米时（即行驶过程中任意时刻的车速都不能超过 120 千米时）．以下是王师傅和李师傅全程行驶完这段高速公路后的对话片断．

王师傅：“李师傅，你的平均车速比我的快 20%，行驶完全程比我少用了半个小时．”

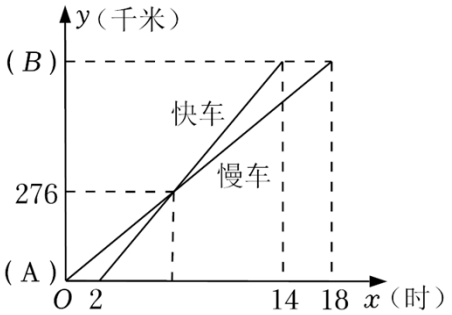
李师傅：“虽然我的平均车速比你的快，但是我在行驶过程中的最快车速只比我的平均车速快 15%，并没有超速啊！”

根据以上对话，你认为李师傅在行驶过程中是否有超速？请说明理由．

26．（1）解方程：$\dfrac{1}{x-3}+2=\dfrac{2-x}{3-x}$；

（2）列方程解应用题：由于受到疫情影响，某医用防护服生产车间有 7 人不能到厂生产．为了应对疫情，已复产的工人加班生产，每人每小时完成的工作量不变，由原来每天工作 8 小时增加到 10 小时，原来生产车间每天生产防护服 800 套，现在每天生产防护服 650 套．求原来生产车间的工人有多少人？

27．一慢车和一快车沿相同路线从 A 地到 B 地，所行的路程与时间的函数图象如图所示，请你根据图象，回答下列问题：



(1)慢车比快车早出发 _____小时，快车追上慢车时行驶了 _____千米，快车比慢车早_____ _____小时到达 B 地；

(2)求慢车、快车的速度；

(3)在慢车和快车行驶过程中，慢车出发多长时间两车相距 69 千米？

28．现有一工程由甲工程队单独完成这工程，刚好如期完成，若由乙工程队单独完成此项工程，则要比规定工期多用 6 天，现先由甲乙两队合做 3 天，余下的工程再由乙队单独完成，也正好如期完成．

(1)求该工程规定的工期天数；

(2)若甲工程队每天的费用为0.5万元，乙工程队每天的费用为0.4 万元，该工程总预算不超过3.9万元，问甲工程队至少要工作几天？

29．为了防疫，师大一中需购买甲、乙两种品牌的温度枪，已知甲品牌温度枪的单价比乙品牌温度枪的单价低 40 元，且用4800 元购买甲品牌温度枪的数量是用4000 元购买乙品牌温度枪的数量的$\frac{3}{2}$倍．

(1)求甲、乙两种品牌温度枪的单价．

(2)若学校计划购买甲、乙两种品牌的温度枪共80个，且乙品牌温度枪的数量不小于甲品牌温度枪数量的 2 倍，购买两种品牌温度枪的总费用不超过15000元．设购买甲品牌温度枪 m 个，则该校共有几种购买方案？

(3)在（2）条件下，采用哪一种购买方案可使总费用最低？最低费用是多少？

30．阅读材料：对于非零实数 a，b，若关于 x 的分式$\frac{(x-a)(x-b)}{x}$的值为零，则解得$x_1=a,x_2=b$．又因为$\frac{(x-a)(x-b)}{x}=\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x}=x+\frac{ab}{x}-(a+b)$，所以关于 x 的方程$x+\frac{ab}{x}=a+b$的解为$x_1=a,x_2=b$．

(1)理解应用：方程$\frac{x^2+2}{x}=5+\frac{2}{5}$的解为：$x_1=$____，$x_2=$____；

(2)知识迁移：若关于 x 的方程$x+\frac{3}{x}=7$的解为$x_1=a,x_2=b$，求a^2+b^2的值；

(3)拓展提升：若关于 x 的方程$\frac{6}{x-1}=k-x$的解为$x_1=t+1,x_2=t^2+2$，求$k^2-4k+4t^3$的值．

答案详解

题型探究详解

1．B

【分析】根据分母中含有未知数的方程叫做分式的定义进行判断即可．

【详解】解：A.该方程是一元一次方程，不符合；

B.该方程是分式方程，符合；

C.该方程是一元一次方程，不符合；

D.该方程是二元一次方程，不符合；

故选：B．

【点睛】本题考查了分式方程的定义，熟练掌握分式方程的定义是解决问题的关键．

2．B

【分析】分母中含有未知数的方程叫分式方程，根据定义判断即可．

【详解】解：根据定义可知，①②③为分式方程，④不是分式方程，

故选：B．

【点睛】本题考查了分式方程的定义，熟记定义是解题的关键．

3．B

【分析】由题意根据分母含有未知数的方程是分式方程依次对各选项进行分析判断．

【详解】解：A、C、D 选项中分母含有未知数，是分式方程；

B 选项中分母不含有未知数，故不是分式方程．

故选：B．

【点睛】本题考查分式方程的判断，熟练掌握分式方程的概念分母含有未知数的方程是分式方程是解题的关键．

4．D

【分析】先银分式方程求得解为$x=m-3$，再根据方程银为负数和分式有意义条件列不等式求解即可．

【详解】解：$\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1$，

$m-2=x+1$，

$x=m-3$，

∵原方程解为负数，

$\therefore m-3<0$，

$\therefore m<3$，

$\because x+1\neq 0$，

$\therefore m-3+1\neq 0$，

$\therefore m \neq 2$，

$\therefore m < 3$ 且 $m \neq 2$，

故选：D.

【点睛】本题考查解分式方程，熟练掌握根据分式方程解的情况求参是解题的关键.

5．B

【分析】根据分式方程的解法即可求出答案.

【详解】解：去分母得：$(a+1)x=1$，

$\therefore a+1>0$，

且 $\frac{1}{a+1} \neq 2$，

$\therefore a>-1$ 且 $a \neq -\frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】本题考查已知分式方程的解的情况求参数，解题的关键是熟练运用分式方程的解法，本题属于基础题型.

6．D

【分析】求出分式方程的解，根据方程的解为正数，且方程有解 $x \neq 2$，进行计算即可得出结论.

【详解】解：方程两边同乘 $(x-2)$，得：$1-(a-2)=x-2$，

解得：$x=5-a$，

∵分式方程 $\frac{1}{x-2}+\frac{a-2}{2-x}=1$ 的解为正数，

$\therefore \begin{cases} 5-a>0 \\ 5-a \neq 2 \end{cases}$，解得：$a<5$ 且 $a \neq 3$；

故选 D.

【点睛】本题考查根据分式方程解的情况，求参数的取值范围．正确的求出分式方程的解，是解题的关键．注意分式方程有解，最简公分母不为 0.

7．D

【分析】先去分母，把方程化为整式方程，再把方程的增根代入整式方程求解 m 即可.

【详解】解：$\frac{x-1}{x+4}=\frac{m}{x+4}$，

去分母得：$x-1=m$,

∵$\frac{x-1}{x+4}=\frac{m}{x+4}$ 的增根为 $x=-4$,

$\therefore m=-4-1=-5$.

故选 D

【点睛】本题考查的是分式方程的增根问题，掌握“分式方程的增根是使最简公分母为 0 的未知数的值”是解本题的关键.

8．D

【分析】方程两边都乘以最简公分母，把分式方程化为整式方程，再求出分式方程的增根，然后代入整式方程，解关于 m 的方程即可得解.

【详解】解：$\frac{x-3}{x-1}=\frac{m}{x-1}$，

去分母，得 $x-3=m$，

由分式方程有增根，得到 $x-1=0$，即 $x=1$，

把 $x=1$ 代入 $x-3=m$，并解得 $m=-2$.

故选：D.

【点睛】本题考查了分式方程的增根问题，增根问题可按如下步骤进行：①让最简公分母为 0 确定增根；②化分式方程为整式方程；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

9．A

【分析】根据分式方程的增根的定义得出 $x=3$，然后代入化为整式方程的方程算出 m 的值即可.

【详解】∵关于 x 的分式方程 $\frac{x-m}{x-3}-3=\frac{2}{x-3}$ 有增根，

$\therefore x-3=0$，

$\therefore x=3$，

原分式方程两边同时乘以 $x-3$ 得 $x-m-3(x-3)=2$，

将 $x=3$ 带入得 $3-m-3\times(3-3)=2$，

解得 $m=1$，

故选 A.

【点睛】本题考查了分式方程的增根，增根问题可按如下步骤进行：①让最简公分母为 0 确定增根；②化分式方程为整式方程；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

10．$x=0$

【分析】两边都乘以 $x-2$，化为整式方程求解，求出 x 的值后再检验即可.

【详解】解：$\frac{2x-3}{x-2}-\frac{1}{2-x}=1$，

去分母，得 $2x-3+1=x-2$.

移项，得 $2x-x=-2-1+3$.

合并同类项，得 $x=0$.

检验：当 $x=0$，$x-2\neq 0$.

∴这个分式方程的解为 $x=0$.

【点睛】本题考查了分式方程的解法，其基本思路是把方程的两边都乘以各分母的最简公分母，化为整式方程求解，求出 x 的值后不要忘记检验.

11．$x=-12$

【分析】根据解分式方程的步骤，找出最简公分母$(x+3)(x-3)$，先去分母得出$x(x-3)+5(x+3)=(x+3)(x-3)$，再去括号得出$x^2-3x+5x+15=x^2-9$，然后进行移项、合并同类项，最后系数化为 1 解出答案即可.

【详解】$\frac{x}{x+3}+\frac{5}{x-3}=1$

去分母得：$x(x-3)+5(x+3)=(x+3)(x-3)$，

去括号得：$x^2-3x+5x+15=x^2-9$，

移项并合并得：$2x=-24$，

解得：$x=-12$，

检验：当$x=-12$时，$(x+3)(x-3)\neq 0$，

$\therefore x=-12$是原方程的解，

$\therefore$原方程的解是：$x=-12$

【点睛】本题考查了解分式方程，熟练掌握解题步骤并正确计算是解题的关键.

12．$x=\frac{2}{3}$

【分析】去分母化为整式方程，解方程后检验即可得到分式方程的解.

【详解】解：$\frac{x}{x-1}-\frac{2x-2}{x}=-1$

两边都乘以$x(x-1)$得，$x^2-(2x-2)(x-1)=-x(x-1)$，

解得，$x=\frac{2}{3}$，

把$x=\frac{2}{3}$代入$x(x-1)$得，$x(x-1)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\frac{2}{9}\neq 0$，

$\therefore$原分式方程的解是$x=\frac{2}{3}$.

【点睛】此题考查了分式方程，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键.

13．$x=\frac{1}{2}$

【分析】方程两边同时乘以$2(x+1)$，化为整式方程，解方程即可求解，最后要检验.

【详解】解：$\frac{1}{x+1}+1=\frac{5}{2x+2}$

方程两边同时乘以$2(x+1)$，得，

$2+2(x+1)=5$

解得：$x=\dfrac{1}{2}$

经检验，$x=\dfrac{1}{2}$时，$2(x+1)\neq 0$，

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$是原方程的解.

【点睛】本题考查了解分式方程，掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

14．(1)该工厂的工人平均每天生产熟宣500张，该工厂的工人平均每天生产生宣1000张

(2)1000张

【分析】⑴）设该工厂的工人平均每天生产熟宣 x 张，则该工厂的工人平均每天生产生宣 $2x$ 张，根据题意列出方程，求解、检验即可；

（2）设生产熟宣 a 张，根据题意列出不等式求解即可.

【详解】（1）解：设该工厂的工人平均每天生产熟宣 x 张，则该工厂的工人平均每天生产生宣 $2x$ 张，

由题意得：$\dfrac{800}{x}=\dfrac{600}{2x}+1$，

解得：$x=500$，

经检验，$x=500$ 是原分式方程的解，且符合题意，

$\therefore 2x=2\times 500=1000$；

答：该工厂的工人平均每天生产熟宣500张，该工厂的工人平均每天生产生宣1000张；

（2）设生产熟宣 a 张，

由题意得：$\dfrac{a}{500}+\dfrac{5000-a}{1000}\leq 6$，

解得：$a\leq 1000$，

∴最多生产熟宣1000张，

答：最多生产熟宣1000张.

【点睛】题目主要考查分式方程及不等式的应用，理解题意列出方程不等式是解题关键.

15．菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格是 20 元

【分析】设菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格是 x 元，根据用 300 元在市场上购买的 A 种菜苗比在菜苗基地购买的少 3 捆，列方程可得菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格是 20 元；

【详解】解：设菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格是 x 元，

根据题意得：$\dfrac{300}{x}=\dfrac{300}{\frac{5}{4}x}+3$，

解得 $x=$ 20，

经检验，$x=$ 20 是原方程的解，

答：菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格是 20 元.

【点睛】本题考查分式方程的应用，解题的关键是读懂题意，列出方程式.

16．每个灯笼的进价是20元，每幅春联的进价是15元

【分析】设每幅春联的进价是x元，则每个灯笼的进价是$(x+5)$元，根据题意，列出方程求解即可.

【详解】解：设每幅春联的进价是x元，则每个灯笼的进价是$(x+5)$元，

根据题意得：$\frac{200}{x+5}=\frac{150}{x}$，

解得：$x=15$，

经检验，$x=15$是所列方程的解，且符合题意，

$\therefore x+5=15+5=20$.

答：每个灯笼的进价是20元，每幅春联的进价是15元.

【点睛】本题考查了分式方程的实际应用，理解题意，找到等量关系列出方程是解题的关键.

17．原来每天修80米步道.

【分析】设原来每天修x米步道，由题意列出分式方程，解方程即可.

【详解】解：设原来每天修x米步道，则加派人手后每天修$(1+25\%)x$米，

由题意得：$\frac{4000-1600}{x}-\frac{4000-1600}{(1+25\%)x}=6$，

解得：$x=80$，

经检验，$x=80$是原方程的解，且符合题意，

答：原来每天修80米步道.

【点睛】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

随堂演练详解

1．C

【分析】根据分式方程的定义判断即可.

【详解】解：A，B，D选项中的方程，分母中不含未知数，所以不是分式方程，故不符合题意；

C选项方程中的分母中含未知数，是分式方程，故符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了分式方程的定义，掌握分母中含有未知数的方程叫做分式方程是解题的关键.

2．B

【分析】根据分式方程的定义，即可求解.

【详解】解：A、不是方程，故本选项不符合题意；

B、是分式方程，故本选项符合题意；

C、是整式方程，故本选项不符合题意；

D、是整式方程，故本选项不符合题意；

故选：B

【点睛】本题主要考查了分式方程的定义，熟练掌握分母中含有未知数的方程是分式方程是解题的关键.

3．D

【分析】先去分母，再将增根$x=3$代入$2x+1=-m+x-3$，求解即可.

【详解】解：$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{m}{3-x}+1$

去分母，得$2x+1=-m+x-3$，

∵关于x的方程$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{m}{3-x}+1$有增根$x=3$，

∴$6+1=-m$，

解得$m=-7$，

故选：D.

【点睛】本题考查了分式方程的增根，熟练掌握分式方程的增根$x=3$是解题的关键.

4．B

【分析】先化分式方程为整式方程得到$3-a=x-2$，求得方程的解$x=5-a$，根据解的属性，方程的增根两个角度去求解即可.

【详解】∵$\frac{1}{x-2}+\frac{a-2}{2-x}=1$，

去分母，得$3-a=x-2$，

解得$x=5-a$.

∵分式方程$\frac{1}{x-2}+\frac{a-2}{2-x}=1$的解为正数，且方程的增根为$x-2=0$，

∴$5-a>0, 3-a\neq 0$，

解得$a<5$且$a\neq 3$，

故选 B.

【点睛】本题考查了分式方程的解，增根，探求字母的取值范围，熟练根据解的属性，增根的意义建立不等式是解题的关键.

5．D

【分析】先根据不等式组有解，得 m 的取值，利用分式方程有非负整数解，找出符合条件的 m 值，并相加得出结果.

【详解】解：由$\begin{cases} y-1\geq 4m \\ \frac{y-m}{2}\leq 2m+3 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} y\geq 4m+1 \\ y\leq 5m+6 \end{cases}$，

∴$4m+1\leq y\leq 5m+6$，

∵ 不等式组$\begin{cases} y-1\geq 4m \\ \dfrac{y-m}{2}\leq 2m+3 \end{cases}$有解，

$\therefore 4m+1\leq 5m+6$，

$\therefore m\geq -5$，

$\dfrac{mx}{x-3}=1+\dfrac{2x+3}{3-x}$，

解得：$x=-\dfrac{6}{m+1}$，

∵ 关于x的分式方程$\dfrac{mx}{x-3}=1+\dfrac{2x+3}{3-x}$有非负整数解，，

$-\dfrac{6}{m+1}\geq 0$且$-\dfrac{6}{m+1}\neq 3$，

$\therefore m<-1$且$m\neq -3$，

$\therefore -5\leq m<-1$且$m\neq -3$，

所有m的值为$-4,-2$，的和为-6，

故选：D.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，分式方程的解，有难度，注意分式方程中的解要满足分母不为0的情况.

6．D

【分析】解分式方程，根据分式方程有解，求得m的取值范围即可.

【详解】解：$\dfrac{m}{x-2}-\dfrac{3}{2-x}=1$，

去分母得：$m+3=x-2$，

解得：$x=m+5$，

分式方程有解，

$\therefore x-2\neq 0$，

即$m+5-2\neq 0$，

解得$m\neq -3$，

故选：D.

【点睛】此题主要考查了分式方程的解，关键是明确分式方程有解的条件是分母不为0.

7．C

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，由分式方程有整数解确定出整数a的取值即可得到结论.

【详解】解：$\dfrac{x-a}{x-1}-\dfrac{3}{x}=1$，

去分母得：$x(x-a)-3(x-1)=x(x-1)$，

解得：$x=\dfrac{3}{a+4}$，

∵分式方程的解为整数，

∴$a+4$是$\pm1,\pm3$，且$\frac{3}{a+4}\neq0$，$\frac{3}{a+4}\neq1$，

当$a+4=1$时，$a=-3$，

当$a+4=-1$时，$a=-5$，

当$a+4=3$时，$a=-1$，

当$a+4=-3$时，$a=-7$，

∵$\frac{3}{a+4}\neq1$，

∴$a\neq-1$，

综上，符合条件的整数a为$-3,-5,-7$，

∴所有符合条件的整数a有3个.

故选：C.

【点睛】此题考查了分式方程的解，熟练分式方程的解法是解本题的关键.

8．C

【分析】先解分式方程，再根据分式方程的增根的定义解决此题.

【详解】解：$\frac{k-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=0$，

去分母，得$k-1-x=0$，

移项，得$x=k-1$.

∵关于x的方程$\frac{k-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=0$没有增根，

∴$k-1\neq1$，

∴，$k\neq2$.

故选：C.

【点睛】本题考查的是分式方程的增根，在分式方程变形的过程中，产生的不适合原方程的根叫做分式方程的增根．增根使最简公分母等于0，不适合原分式方程，但是适合去分母后的整式方程.

9．D

【分析】根据题意可得$x=4$，，然后把x的值代入整式方程中进行计算即可解答.

【详解】解：$\frac{3}{x-4}+\frac{x+m}{4-x}=1$，

$3-(x+m)=x-4$，

解得：$x=\frac{7-m}{2}$，

∵分式方程有增根，

∴$x=4$，

把$x=4$代入$x=\frac{7-m}{2}$中得：

$4=\frac{7-m}{2}$，

解得：$m=-1$，

故选：D.

【点睛】本题考查的是分式方程的增根，在分式方程变形的过程中，产生的不适合原方程的根叫做分式方程的增根．增根使最简公分母等于0，不适合原分式方程，但是适合去分母后的整式方程.

10．A

【分析】把$x=2$代入原方程，关于然后解a的方程即可.

【详解】解：把$x=2$代入原方程$\frac{2}{x}+\frac{a}{x-1}=2$得：$1+a=2$，解得$a=1$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了分式方程的解，掌握分式方程的解的定义是解题的关键.

11．A

【分析】解分式方程得出$y=\frac{a+14}{3}$，根据其有非负整数解，即得出$y\geq 0$，$y\neq 1$，且为整数．再根据a为负整数，即得出所有a的可能的值，即得出答案.

【详解】解：$\frac{a+7}{y-1}-\frac{4}{1-y}=3$，

等式两边同时乘$(y-1)$，得：$a+7+4=3(y-1)$，

解得：$y=\frac{a+14}{3}$.

∵该分式方程有非负整数解，

∴$y\geq 0$，$y\neq 1$，且为整数.

∵a为负整数，

∴a的值为-2或-5或-8或-14，

∴满足条件的所有负整数a的个数是4个.

故选A.

【点睛】本题主要考查根据分式方程的解的情况求参数．掌握解分式方程的步骤是解题关键.

12．A

【分析】根据题意将分式方程解出来，再根据其解满足$-4<x<\frac{7}{2}$，可得$-4<\frac{4m+2}{m+2}<\frac{7}{2}$进而根据题意求解即可.

【详解】解：$\frac{1}{x-3}+\frac{m+1}{x+3}=\frac{m+2}{x^2-9}$

$x+3+(m+1)(x-3)=m+2$

$x+3+(m+1)x-3m-3=m+2$

$(m+2)x=4m+2$，

当$m+2\neq 0$即$m\neq -2$时，$x=\dfrac{4m+2}{m+2}$，

$\because -4<x<\dfrac{7}{2}$，

$\therefore -4<\dfrac{4m+2}{m+2}<\dfrac{7}{2}$，且$x=\dfrac{4m+2}{m+2}\neq \pm 3$，即$m\neq 4$和$m\neq -\dfrac{8}{7}$，

当$m>-2$时，$m+2>0$，$-4(m+2)<4m+2<\dfrac{7}{2}(m+2)$，

解得$-\dfrac{5}{4}<m<10$，

此时，满足条件的整数m共有-1、0、1、2、3、5、6、7、8、9，共10个；

当$m<-2$时，$m+2<0$，$\dfrac{7}{2}(m+2)<4m+2<-4(m+2)$，

此等式无解，

综上所述，满足条件的整数m有10个，

故选A.

【点睛】本题考查了解分式方程，解一元一次不等式组，准确的计算是解决本题的关键.

13．1

【分析】先把分式方程去分母变为整式方程，然后把$x=2$代入计算，即可求出m的值.

【详解】解：$\because \dfrac{1-x}{x-2}=\dfrac{m}{2-x}-2$，

去分母，得：$1-x=-m-2(x-2)$；

∵分式方程有增根，

$\therefore x=2$，

把$x=2$代入$1-x=-m-2(x-2)$，则

$1-2=-m-2(2-2)$，

解得：$m=1$；

故答案为：1.

【点睛】此题考查了分式方程的增根，增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

14．$m<4$且$m\neq 3$

【分析】首先求出关于x的分式方程的解，然后根据解为负数，求出m的取值范围即可.

【详解】$\dfrac{2x-1}{x+1}=3-\dfrac{m}{x+1}$

去分母得：$2x-1=3(x+1)-m$，

去括号得：$2x-1=3x+3-m$，

合并同类项得：$-x=4-m$，

解得：$x=m-4$，

$\because m-4<0$，

$\therefore m<4$，

$\because x+1\neq 0$，即$x\neq -1$，

$\therefore m-4\neq -1$，

$\therefore m\neq 3$，

$\therefore m$的取值范围：$m<4$且$m\neq 3$.

故答案为：$m<4$且$m\neq 3$

【点睛】此题主要考查了分式方程的解，要熟练掌握；解答此题的关键是正确得出分母不为0.

15．3

【分析】把$x=2$代入方程中，即可求出m值.

【详解】解：把$x=2$代入$\frac{x+m}{x-3}+\frac{3m}{3-x}=4$中，得：

$\frac{2+m}{2-3}+\frac{3m}{3-2}=4$，

解得：$m=3$，

故答案为：3.

【点睛】本题考查了分式方程的解，解题的关键是理解方程的解能使方程左右两边相等.

16．5

【分析】先解分式方程，根据分式方程有整数解求出a的值，再解不等式组，根据不等式组解为正求出a的取值范围，再综合得出结论.

【详解】解：解方程$\frac{6-ax}{1-x}-2=\frac{x}{x-1}$得，

$x=\frac{4}{a-3}$，

∵分式方程有整数解，且$x\neq 1$，

$\therefore a-3=-4$或-2或-1或1或2或4，且$a\neq 7$，

$\therefore a=-1$或1或2或4或5，

解方程组$\begin{cases} ax-y=1 \\ 8x-2y=-1 \end{cases}$得，

$\begin{cases} x=\frac{3}{2a-8} \\ y=\frac{a+8}{2a-8} \end{cases}$，

∵方程组的解为正数，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/325323211130011144