质点动力学基础方程

10.1 惯性坐标系定义

同一物体，对于不同的坐标系来说，运动情况是不同的。适用于牛顿定律的坐标系称为惯性坐标系。实践证明，在绝大多数工程问题中，可取固结于地球的坐标系为惯性坐标系，只是对于某些必须考虑地球自转的影响问题(如落体对铅球垂线的偏离等)才选取以地心为原点，而三个坐标轴指向三个恒星的坐标系为惯性坐标系。在以后的章节中，如果没有特殊说明，所有运动都是对惯性坐标系而言的。物体在惯性坐标系中的运动称为绝对运动，我们也习惯地把惯性坐标系称为静坐标系或固定坐标系。

10.2　牛 顿 定 律

动力学的基本定律是牛顿提出的三个定律，即所谓的牛顿三定律。

第一定律 任何物体，如不受外力作用，将保持静止或作匀速直线运动的状态。

第二定律 质点受到外力作用时，所产生的加速度的大小与力的大小成正比，而与质点的质量成反比，加速度的方向与力的方向相同。这一定律的数学公式可表示为：

$$F=ma \quad (10.1a)$$

其中m为质点的质量，而F=是指作用于质点的所有力的合力。

第三定律 即反作用定律，两物体间相互作用的力(作用力与反作用力)同时存在，大小相等，作用线相同而指向相反。

10.2　牛 顿 定 律

不受外力作用时，物体将保持静止或匀速直线运动状态的属性称为惯性。所以第一定律也称为惯性定律，而匀速直线运动也称为惯性运动。由此可见，假设以相等的力作用于不同的质点，则质量m愈大，它的惯性也愈大。所以质点的质量是它的惯性的量度。

在古典力学里，一个物体的质量m被看作是常量，不因为物体的运动状态不同而改变。但是根据相对论力学，物体的质量将随运动速度而变化，只有当物体的速度可与光的速度相比时，变化才显著。在古典力学里，由于所考察的物体的机械运动速度都远小于光速，因而认为物体的质量为常量已足够精确。

任一物体的质量m与它的重力P之间存在着如下关系：

$$P=mg$$

其中g是重力加速度。

显然，质量与重力是两个不同的概念。

因为第二定律是就一个质点而言的，而理论力学中的问题，大量是关于质点系的。要使根据第二定律建立起来的质点动力学理论推广应用于质点系，就必须利用反作用定律。反作用定律对于研究质点系的动力学问题具有重要的意义。

$F=\sum F_i$

10.3 质点运动微分方程

设有一质点*M*，质量为m，作用于该质点的所有的力的合力为 $F=\sum F_i$，如图10.1所示。令质点的加速度为*a*，则有：

$$ma=F \tag{10.1}$$

由运动学知，当用质点*M* 对坐标原点O的矢径*r*来表明它的位置时，质点的加速度 *a*是：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

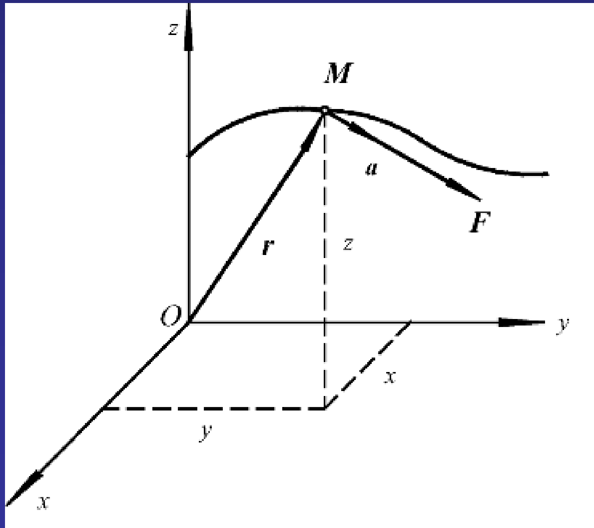

图10.1 作用于质点*M*的合力*F*

其中v是质点的速度。于是方程可以改写为：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \quad 或 \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \tag{10.2}$$

10.3 质点运动微分方程

这就是矢量形式的质点运动微分方程。过原点O取直角坐标系Oxyz，将方程投影到各坐标轴上，就得到了直角坐标形式的质点运动微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_X,m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_Y,m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_Z \qquad (10.3)$$

其中*FX*、*FY*、*FZ*分别为作用于质点的各力在*x*、*y*、*z*轴上的投影之和。

如果质点作平面曲线运动，取运动平面为Oxy平面，则方程成为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_X,m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_Y,F_Z=0 \qquad (10.4)$$

如果质点作直线运动，取*x*轴沿路径直线，则方程成为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_X,F_Y=0,F_Z=0 \qquad (10.5)$$

10.3 质点运动微分方程

设已知质点的运动轨迹曲线，以轨迹曲线在质点所在处的切线(指向曲线正方向)、法线n (指向曲率中心)及垂直于和n的b为自然坐标轴，如图10.2(a)所示。将方程投影到自然坐标轴上，有

$$ma_\tau = F_\tau, ma_n = F_n, ma_b = F_b$$

但 $$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}, a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

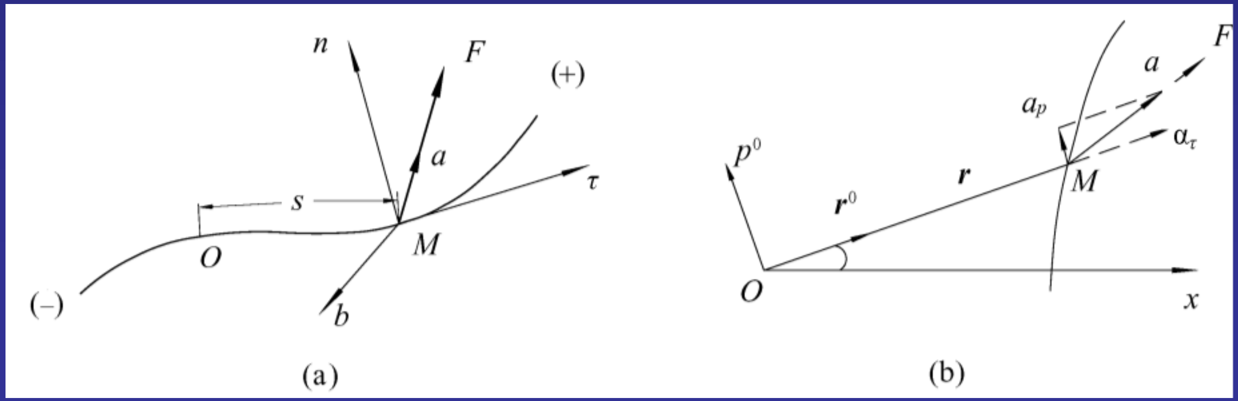

图10.2 自然坐标与极坐标

10.3 质点运动微分方程

而加速度在b方向上的投影$a_b = 0$ ，于是

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = F_\tau, m\frac{v^2}{\rho} = F_n, F_b = 0 \qquad (10.6)$$

这就是自然坐标轴形式的质点运动微分方程。

当质点作平面曲线运动时，如采用极坐标表示法，如图10.2(b)所示，则质点的加速度为

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)r^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})P^0$$

于是将方程两边投影到r0及p0方向，就得到

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_p$$

自然，所有的力在垂直于曲线平面方向如z轴上的投影之和必须等于零，即 $F_z = 0$

10.4　质点动力学两类问题的应用

质点动力学的问题基本可以分为两类：

(1) 设已知质点的运动规律，需求质点所受的力，则不难用微分方程求得解答。

(2) 设已知作用于质点的力，需求质点的运动规律，则归结为求解运动微分方程。在一般情况下，作用于质点的力可能是时间、质点的位置坐标、速度的函数。只有当函数关系较简单时，才能求得微分方程的精确解；如果函数关系复杂，求解将非常困难，有时只能满足于求出近似解。此外，求解微分方程时将出现积分常数，这些积分常数，须根据质点运动的初始条件和初始位置坐标来决定，所以对这一类问题，除了作用于质点的力以外，还必须知道质点运动的初始条件，才能完全确定质点的运动。顺便说明，对受约束的非自由质点，微分方程中自然也包括质点所受到的约束力，除此之外，质点的运动还必须满足约束对它施加的限制条件。关于约束力的方向，同静力学中一样，决定于约束的性质；而约束力的大小则是未知量，应根据质点的运动来求得。

10.4　质点动力学两类问题的应用

对于质点系，原则上可以就每个质点写出运动微分方程。但是，由于各质点的运动以及所受的力都是互相有关联的，就所有各质点写出的不论什么形式的微分方程，必须是联立微分方程，在大多数情况下，要求得这些联立微分方程的精确解是非常困难的。因此，对质点系的问题，只有最简单的情况下才用本节讲述的方法求解，一般则将应用以后各章讲述的定理求解。

【例10.1】 质量为M的小球在水平面内运动，如图10.3所示。运动轨迹为一椭圆，已知其直角坐标系形式的运动方程

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$$

求作用在小球上的力。

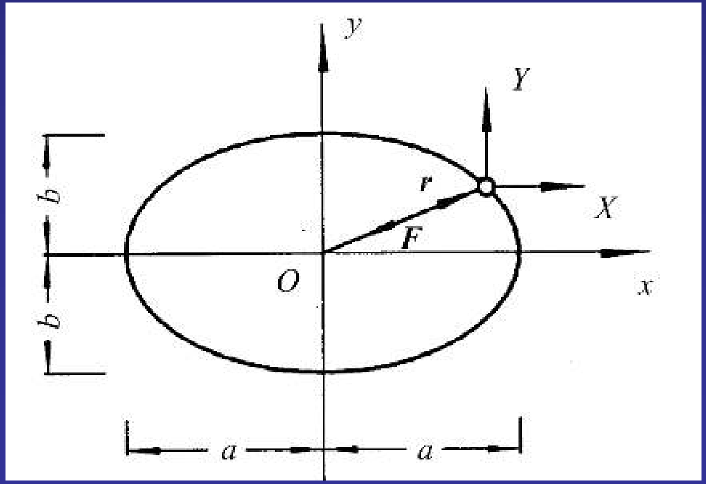

图10.3 小球作椭圆运动

10.4　质点动力学两类问题的应用

解：本题为第一类问题，即已知物体的运动，求作用于物体上的力。取小球为研究对象，进行受力分析。小球所受的力***F***是未知的，可假设它沿*x*、*y*坐标轴的两个分量为*FX*和*FY*。将小球的运动方程对时间*t*求二阶导数得

$$\begin{cases}\ddot{x}=-a\omega^2\cos\omega t\\ \ddot{y}=-b\omega^2\sin\omega t\end{cases}$$

代入直角坐标形式的运动微分方程，有

$$\begin{cases}M\ddot{x}=-Ma\omega^2\cos\omega t=F_X\\ M\ddot{y}=-Mb\omega^2\sin\omega t=F_Y\end{cases}$$

求出作用在小球上的力在两个坐标轴上的投影，就能写出力的解析式

$$\boldsymbol{F}=-Ma\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}+(-Mb\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j})=-M\omega^2(a\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\sin\omega t\boldsymbol{j})=-M\omega^2\boldsymbol{r}$$

其中r为小球所在位置的矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$ ，由此可知，力F与r共线、反向，其大小正比于r的模。

10.4　质点动力学两类问题的应用

【例10.2】如图10.4(a)所示的摆动输送机，由曲柄带动货架AB输送木箱M，两曲柄等长，即O1A=O2B=L=1.5m，且O1O2=AB，设在θ=45°处由静止开始启动，已知曲柄O1A的初角加速度5rad/s，如启动瞬时木箱不产生滑动，求木箱与货架之间的静滑动摩擦系数最小值。

解：该问题的性质也是已知运动求力，属于第一类问题。取木箱为研究对象，作用在木箱上的力有重力*W*，摩擦力*F*，法向约束反力*FN*，受力图如图10.4(b)所示，因为O1A=O2B、O1O2=AB，所以*AB*杆作曲线平动，木箱相对货架无滑动，木箱的加速度应与点*A*的加速度相同。在启动瞬时，货架上各点速度为零但加速度不等于零，有

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0, a_x = l\varepsilon_0$$

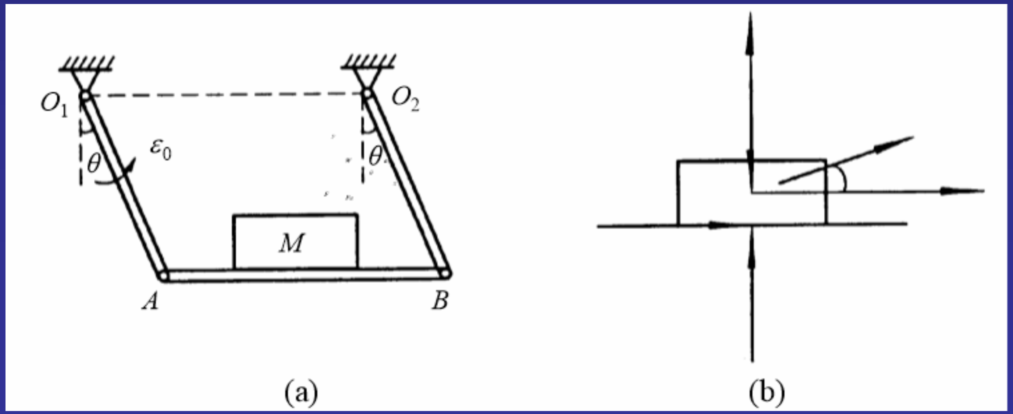

图10.4 摆动输送机

10.4　质点动力学两类问题的应用

直角坐标形式的质点运动微分方程可写为

$$m\ddot{x} = \sum F_x, ma_\tau \cos\theta = F$$

$$m\ddot{y} = \sum F_y, ma_\tau \sin\theta = F_N - W$$

根据静滑动摩擦力的性质，有

$$F \le f_{\mathrm{N}}$$

解以上方程组，可得

$$f \ge \frac{l\varepsilon_0 \cos\theta}{g + l\varepsilon_o \sin\theta} = 0.35$$

为保证木箱不滑动，所需最小净滑动摩擦系数为：

$$f_{\min} = 0.35$$

10.4　质点动力学两类问题的应用

【例10.3】 地球表面以初速度v0垂直向上发射一质量为m的物体，地球对物体的引力与物体到地心距离的平方成反比，与地球和物体的质量成正比，不计空气阻力与地球自转作用的影响，求该物体在地球引力作用下的运动速度。

解：本题为已知力求运动，属于第二类问题。取物体为研究对象，物体只受地球引力作用，大小为：

$$F=\frac{G_0 mM}{r^2}$$

其中G0为万有引力常数，*r*为物体到地球的中心的距离，m为物体的质量，*M* 为地球的质量。当物体在地球表面时，*r*=*R*,*F*=*mg*，代入上式，有

$$G_0 M=gR^2$$

于是万有引力公式变为

$$F=\frac{R^2 mg}{r^2}$$

设以地球的中心为坐标原点，坐标铅直向上，如图10.5所示。应用质点运动微分方程的投影形式，有

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{R^2 mg}{x^2}$$