江西师范大学数学与信息科学学院
学士学位论文

求函数极限的若干方法
The Methods of Functional Limit

姓　　名：　***

学　　号：　090*0*0**3

学　　院：数学与信息科学学院

专　　业：数学与应用数学

指导老师：

完成时间：2013 年 4 月 19 日

求函数极限的若干方法

【摘要】在数学分析中，极限思想贯穿于始末，求极限的方法也显得至关重要。极限包括数列的极限与函数的极限，两类极限的本质上是相同的，其中数列极限是函数极限的特例，因此本文只就函数极限进行讨。结合例题，本文阐述了求函数极限的十三种方法，包括利用无穷小量、洛必达法则、泰勒公式、中值定理等求极限。

【关键词】函数极限　洛必达法则 泰勒公式 中值定理

The Methods of Functional Limit

【**Abstract**】In the mathematical analysis, the limit idea runs through the whole story. The methods of the limit are crucial. Limit includes the sequence limit and functional limit. Essence of the two kinds of limit is the same, and the sequence limit is a special case of functional limit, therefore this paper only discusses the functional limit. With the examples, this paper discusses thirteen methods of functional limit , including the use of infinitesimal, L’ Hospital Rule, Taylor formula, the mean value theorem and so on.

【**Key words**】functional limit   L’Hospital Rule   Taylor formula   the mean value theorem.

目录

1 引言

数学分析的主要任务是研究函数的各种性态以及函数值的计算或近似计算，主要内容是微积分， 在微积分中几乎所有的基本概念都是用极限来定义的。可以说，没有极限理论就没有微积分。众所周知常见的求极限的方法包含四则运算，夹逼准则、无穷小量、重要极限公式、洛必达法则等。但实际在求极限时并不是依靠单一方法， 而是把多种方法加以综合运用。对函数极限求解方法的讨论是本文的核心点， 本文给出了十三种求极限的方法， 每种方法都是以定理或简述开头，然后以例题来全面展示具体的求法，下面就根据函数的特点分类进行讨论。

2 函数极限的定义及作用

定义 1[1]：设函数f 在点x_0 的某空心邻域$U^{o}\left(x_0;\delta\right)$ 内有定义, A 为定数. 若对任给的$\varepsilon > 0$, 存在正数δ（$<\delta$），使得当$0 < |x-x_o| < \delta$时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$， 则称函数f 当x趋于x_0 时以A 为极限, 记作

$$\lim_{x \text{喻} x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \text{喻} A \left(x \text{喻} x_0\right).$$

定义 2[1]：设f 为定义在$\left[a,+\text{伪}\right)$ 上的函数, A 为定数.若对任给的$\varepsilon > 0$，存在正数$M\left(> a\right)$, 使得当$x > M$ 时有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数f 当x 趋于$+\text{伪}$ 时以A 为极限, 记作

$$\lim_{x \text{喻} +\text{伪}} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \text{喻} A \left(x \text{喻} +\text{伪}\right).$$

对于其他形式函数极限的定义我就用ε-δ语言描述定义：

$\lim\limits_{x\text{喻}x_0^-} f(x)$=A: v$\varepsilon > 0$,二$\delta > 0$, 当-$\delta$<x- x_0 <0 时， |f（x）A |<ε

$\lim\limits_{x\text{喻}x_0^+} f(x)$=A: v$\varepsilon > 0$,二$\delta > 0$, 当 0< x- x_0 <δ时， |f（x）- A |<ε

$\lim\limits_{x\text{喻伪}} f(x) = A$: v$\varepsilon > 0$,二$M > 0$, 当|x|>M 时， |f（x）- A |<ε

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A: \forall\varepsilon > 0, \exists M > 0,$ 当 x<-M 时， |f（x）- A |<ε

在数学分析中我们经常用函数极限的定义来证明极限存在问题。

例 1 用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$

证 由 $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|$

$$=\left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right|=|x-2|$$

$$=\left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|$$

$\forall\varepsilon > 0$ 取δ=ε 则当 0<|x-2|<δ时，就有

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|<\varepsilon$$

由函数极限ε-δ定义有：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$

3 函数极限的计算及多种求法

极限一直是数学分析中一个重要的内容，并且函数极限运算是数学分析的一个重要的基本运算。极限的求法也是多种多样的， 本文通过归纳， 总结出一些极限的计算方法.

3.1 利用左、右极限求极限

定理 1[1]：函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于A的充分必要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且都等于A。即有：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$。

此类方法多用于求分段函数极限问题。

例 2 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x}, & x > 0 \\ 1 + x, & x < 0 \end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的极限

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

3.2 利用极限运算法则求极限

这是求极限的基本方法，主要应用函数的和、差、积、商的极限法则及若干基本函数的极限结果进行极限的计算，为此有时往往要对函数作一些变形。

定理 2[1] :若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A+B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

(3)若 $B\neq 0$ 则： $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$ （C 为常数）

上述性质对于 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时也同样成立例

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+5}{x+4}$

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+5}{x+4}=\dfrac{2^2+3.2+5}{2+4}=\dfrac{5}{2}$

3.3 利用初等变形求函数极限

在求函数极限时， 利用简单的初等变形可使极限易于计算， 初等变形的方法有约分法、有理化、比较最高次幂法等。

3.3.1 约分法

适用于计算 $\frac{0}{0}$ 型函数极限，如果所求函数的分子分母都是整式且有公因子

（特别是零因子）时，可通过约简式计算极限值。

例 4 计算 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}$ 的值（ n 为正整数）。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\right]$$

$$=1+2+\cdots+n$$

$$=\frac{(1+n)n}{2}$$

注意 要首先将分子分母因式分解， 找到公因子（特别是零因子），接着即可约去公因子，再求函数极限。

3.3.2 有理化法

在求解存在根号的函数极限时， 通过选择分子或分母， 或分子分母同时有理化约去零因子，即可转化为一般的极限问题。

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$ （其中 $a>0$）

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{a^2+x}-a)(\sqrt{a^2+x}+a)}{x(\sqrt{a^2+x}+a)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a^2+x)-a^2}{x(\sqrt{a^2+x}+a)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a}$$

$$=\frac{1}{\quad}$$

$2a$

注意 此题是通过分子有理化来简化运算，在具体解题时根据简便原则进行选择何种方式的有理化。

3.3.3 比较最高次幂法

此方法是指除以分子分母的最高次幂来计算函数极限。

例 6 设$f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n}$， a_0 牛0 ，b_0 牛0，$m<n$，求 $\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}} f(x)$ 。

解 因为 $\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}\dfrac{1}{x}=0$ 牵 $\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}\dfrac{1}{x^k}=0$ $k=N_+$

则 $\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}} f(x)=\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}\dfrac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-n-1}+\dots+a_{m-1}x^{1-n}+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\dots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n}}$

$$=\frac{a_0\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}x^{m-n}+a_1\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}x^{m-n-1}+\dots+a_m\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}x^{-n}}{b_0+b_1\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}x^{-1}+\dots+b_n\lim\limits_{x\text{喻}+\text{伪}}x^{-n}}$$

$$\text{二}\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}m=n\\ 0, & \text{当}m\text{牛}n\end{cases}$$

3.4 利用迫敛性求函数极限

定理 3（迫敛性）[1]**：** 设 $\lim\limits_{x\text{喻}x_0} f(x)=\lim\limits_{x\text{喻}x_0} g(x)=A$，且在某 $u^o(x_0,\delta)$ 内有 $f(x)<h(x)<g(x)$，则 $\lim\limits_{x\text{喻}x_0} h(x)=A$ 。

做此类型题目的关键在于找出大于已知函数的函数和小于已知函数的函数，并且所找出的两个函数必须要收敛于同一个极限。

例 7 求 $\lim\limits_{x\text{喻}} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 的极限

解 ，$1<x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$． 且 $\lim\limits_{x\text{喻}}(1-x)=1$ 由迫敛性知

：$\lim\limits_{x\text{喻}0^-} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 二1

3.5 利用两个重要极限公式求函数极限

两个重要极限是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$和$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，第一个重要极限过于简单且可通过等价无穷小来实现。利用这两个重要极限来求函数的极限时要仔细观察所给的函数形式只有形式符合或经过变化符合这

两个重要极限的形式时才能够运用此方法来求极限。一般常用的方法是换元法和配指数法。

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=\dfrac{e}{e}=1$

注意 以后还会用到e的另一种极限形式：$\lim\limits_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$ 事实上，令$a=\dfrac{1}{x}$，

则$x\to\infty$常$a\to 0$，所以 $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}$

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$$\left[\left(\qquad\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=e^2$$

.

3.6 利用变量替换求函数极限